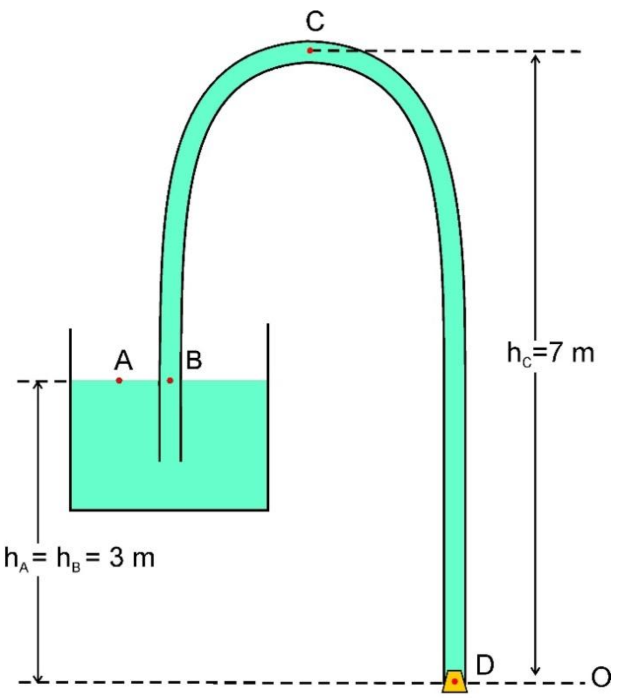
En el sifón de la figura, se mantiene tapada la boca en la que se encuentra el punto D. Se pide:



a) Presión en A, B, C y D
b) Velocidad (módulo) con que circulará el agua por el tubo y presión en cada uno de los puntos anteriores, una vez destapado dicho tubo.

Datos: Considerad que la presión atmosférica es P_{atm} = 1'013·10^5 N/m^2, que el líquido contenido es agua (ρ = 10^3 kg/m^3) y que la sección del depósito que contiene el agua es mucho mayor que la sección del tubo.

a) Como el agua se halla en equilibrio, podríamos determinar las presiones en los puntos que nos piden, utilizando la ecuación fundamental de la hidrostática. No obstante, también podemos aplicar el principio de Bernoulli, sin más que considerar que la velocidad es nula en todos los puntos del depósito y de la tubería, con lo que:

$$P_A + \rho g h_A = P_B + \rho g h_B = P_C + \rho g h_C = P_D + \rho g h_D$$

Y, teniendo en cuenta que $P_A = P_{atm}$ = 1'013·10^5 N/m^2 = 1 atm, tendremos:

Con A y B: $P_A + \rho g h_A = P_B + \rho g h_B$. Simplificando ($h_A = h_B$): $P_B = P_A$ = 1 atm

Con A y C: $P_A + \rho g h_A = P_C + \rho g h_C \rightarrow P_C = P_A - \rho g\cdot(h_C - h_A) = 1 - \dfrac{10^3\cdot 9'8\cdot 4}{1'013\cdot 10^5}$ = 0'613 atm

Con A y D: $P_A + \rho g h_A = P_D + \rho g h_D \rightarrow P_D = P_A + \rho g h_A = 1 + \dfrac{10^3\cdot 9'8\cdot 3}{1'013\cdot 10^5}$ = 1'29 atm

b) Al destapar el tubo, súbitamente, la presión en D pasa a valer 1 atm (hemos visto que antes valía 1'29 atm).

En ese mismo instante, en C, tendremos, por la izquierda, una presión de P_{atm}-ρg·4, mientras que, por la derecha, será de P_{atm}-ρg·7. Por tanto, sobre la sección circular que contiene a C, se ejercerá una fuerza neta hacia la derecha, rompiéndose el equilibrio inicial y desplazándose agua para alcanzar una situación estacionaria, en la que la nueva ecuación de Bernoulli será:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 + \rho g h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v_B^2 + \rho g h_B = P_C + \frac{1}{2}\rho \cdot v_C^2 + \rho g h_C = P_D + \frac{1}{2}\rho \cdot v_D^2 + \rho g h_D$$

-Si tenemos en cuenta que, tal y como se especifica en el enunciado, en este caso, la sección S_A es mucho mayor que la sección S del tubo ($S_B = S_C = S_D = S$), aplicando la ecuación de continuidad[1], está claro que la velocidad a la que desciende el nivel del agua en el depósito, v_A, será mucho más pequeña que la velocidad v a la que circula el agua por el interior del tubo ($v_B = v_C = v_D = v$), y, por tanto, podemos despreciar v_A.

-Por otra parte, sabemos que, $h_D = 0$ y que, en la nueva situación: $P_A = P_D = P_{atm} = 1$ atm

Si introducimos todo esto en la ecuación anterior, esta queda como:

$$P_{atm} + \rho g h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + \rho g h_B = P_C + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + \rho g h_C = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2$$

Considerando ahora A y D:

$$P_{atm} + \rho g h_A = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 \;\rightarrow\; v = \sqrt{2 g h_A}$$

Y sustituyendo valores: $v = \sqrt{2 \cdot 9'8 \cdot 3}$ = 7'67 m/s

Analicemos brevemente el resultado literal anterior: En él volvemos a encontrarnos con algo ya conocido (ved Teorema de Torricelli en problema 7), pero, además, nos muestra que para que el agua fluya en la situación descrita, es necesario que h_A sea mayor que 0, o, lo que es equivalente: que el nivel de la boca de salida (D) esté por debajo del nivel del recipiente (A). Esta es la explicación de por qué para poder transvasar un líquido (agua, vino, gasolina, etc.) de un depósito a otro mediante un tubo, no solo hay que llenar previa y totalmente el tubo con dicho líquido, sino que, además, hay que colocar el depósito receptor de modo que el nivel del líquido en el mismo quede por debajo del nivel existente en el depósito suministrador.

Vamos ahora a calcular los valores de la presión en los puntos A, B, C y D en la nueva situación (extremo inferior del tubo abierto y agua circulando en régimen estacionario):

Ya henos visto que, en esta nueva situación, se cumple que: $P_A = P_D = P_{atm}$

Si aplicamos de nuevo Bernoulli para A y B:

$$P_A + \rho g h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + \rho g h_B \rightarrow P_A = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 \rightarrow P_B = P_A - \frac{1}{2}\rho v^2 \rightarrow$$

[1] En ejercicios anteriores ya hemos usado la ecuación de continuidad, según la cual, para un fluido que circula en régimen estacionario por una conducción, el caudal (dado por S·v) ha de ser constante y, por tanto, si disminuye S, aumenta v (y viceversa). Para este caso en concreto: $S_A \cdot v_A = S \cdot v$ donde $S_A >> S \rightarrow v_A << v$

$P_B = P_A - \frac{1}{2}\rho \cdot (2gh_A)$

Y sustituyendo: $P_B = 1 - \frac{10^3 \cdot 9'8 \cdot 3}{1'013 \cdot 10^5}$ = 1-0’29 = 0’710 atm

El resultado literal anterior, nos muestra también que cuanto mayor sea la altura h_A, es decir, cuanto más alto se encuentre el nivel del líquido en el depósito del que se está extrayendo, respecto a la boca de salida del tubo por el que fluye, menor será el valor de P_B.

Finalmente, considerando A y C:

$P_A + \rho g h_A = P_C + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + \rho g h_C$

Si en la ecuación anterior, tenemos en cuenta que $v = \sqrt{2gh_A}$, nos queda:

$P_A + \rho g h_A = P_C + \rho g h_A + \rho g h_C \rightarrow P_C = P_A - \rho g h_C$

Y sustituyendo: $P_C = 1 - \frac{10^3 \cdot 9'8 \cdot 7}{1'013 \cdot 10^5}$ = 1-0’677 = 0’323 atm

Ya hemos visto que el funcionamiento de este dispositivo exige que $h_A > 0$ (es decir, que el nivel de líquido en el depósito de la izquierda esté por encima de la salida de la derecha). *Cabe plantearse, ahora, si existe alguna otra limitación para que el líquido fluya*.

1ª) Considerando A y C, hemos visto que se debe cumplir que:

$$P_A + \rho g h_A = P_C + \frac{1}{2} \cdot \rho v^2 + \rho g h_C$$

Teniendo en cuenta que $P_A = P_{atm}$ y despejando:

$$P_C + \frac{1}{2} \cdot \rho v^2 = P_{atm} + \rho g \ (h_A - h_C)$$

La presión atmosférica Patm = 1 atm, equivale a la presión existente en la base de una columna de agua de 10’34 m de altura. Introduciendo este dato en la ecuación anterior, nos queda:

$$P_C + \frac{1}{2} \cdot \rho v^2 = \rho g \cdot 10'34 + \rho g \ (h_A - h_C)$$

Y reagrupando: $P_C + \frac{1}{2} \cdot \rho v^2 = \rho g \cdot [10'34 - (h_C - h_A)]$

¿Qué nueva limitación a que fluya el agua queda contemplada en la ecuación anterior?

Como P_C no puede ser negativa, para que circule el agua de forma regular será necesario que: $h_C - h_A < 10'34$ m

2ª) Considerando ahora C y D:

Teniendo en cuenta que $P_D = P_{atm}$

$$P_C + \frac{1}{2} \cdot \rho v^2 + \rho g h_C = P_{atm} + \frac{1}{2} \cdot \rho v^2 \;\rightarrow\; P_C + \rho g h_C = \rho g \cdot 10'34 \;\rightarrow\; P_C = \rho g \cdot (10'34 - h_C)$$

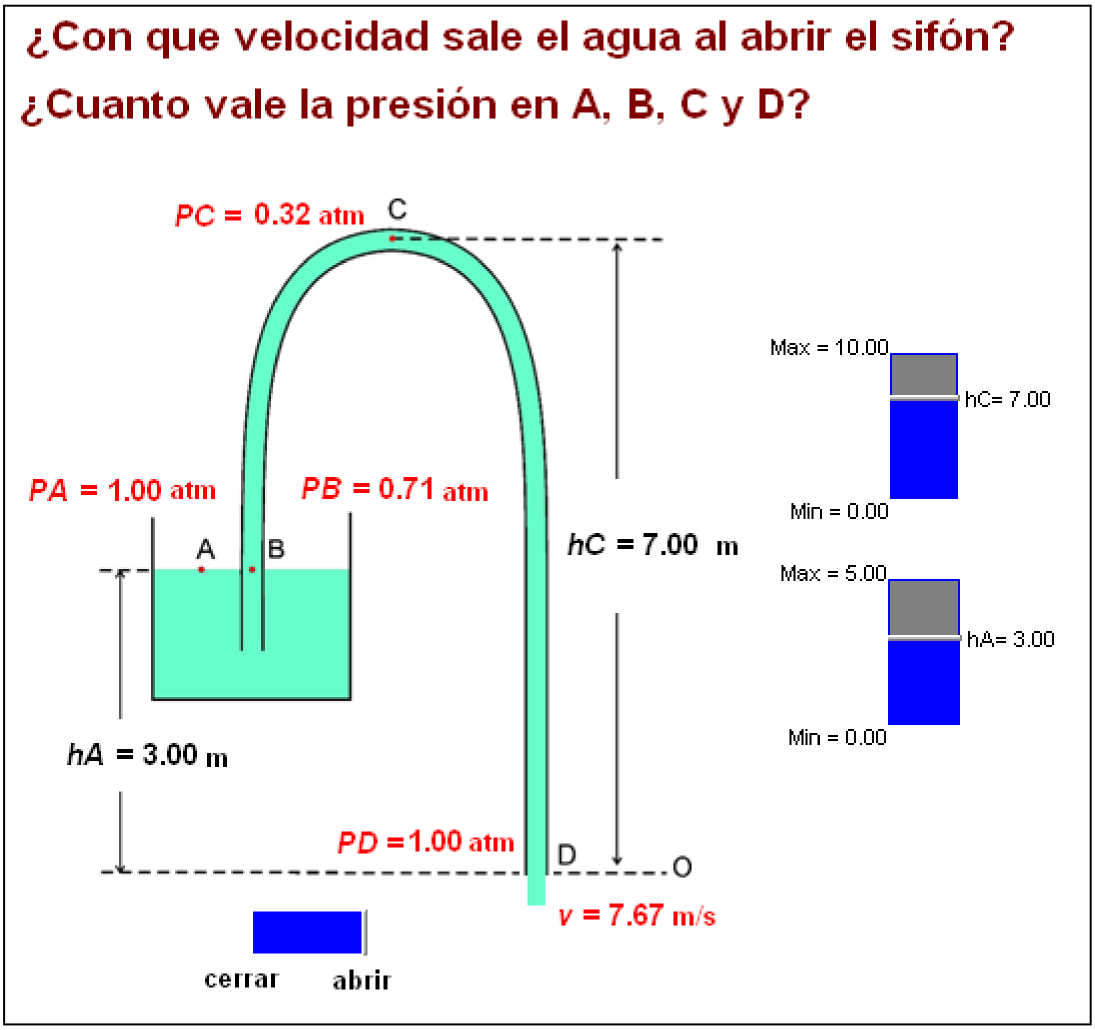
¿Qué otra limitación podemos observar analizando la última expresión obtenida?

Razonando igual que antes, como P_C no puede ser negativa, para que fluya el agua regularmente en el dispositivo manejado, deberá cumplirse también que: h_C < 10’34 m

Para reforzar este problema hemos elaborado una animación *Modellus* en la que se representa el esquema del sifón y se calculan todas las magnitudes que pide el enunciado. En la pantalla de la misma hemos colocado un cursor manual con el que los alumnos pueden dejar el sifón taponado o pueden destaponarlo, para comprobar, de este modo, cómo se modifican los valores de las presiones buscadas (en los puntos A, B, C y D) según esté el sifón abierto o cerrado. Cuando el sifón está abierto, la animación obtiene también el valor de la velocidad a la que circula el agua por el tubo y con la que, en consecuencia, sale por la boca del sifón (D).

Por otra parte, también hemos añadido otros dos cursores manuales para que los estudiantes puedan modificar las alturas h_A y h_C, viendo cómo influyen tales modificaciones sobre las presiones buscadas y sobre la velocidad con la que sale el agua cuando se destapa el sifón. Manipulando estos cursores se pueden extraer algunas lecciones del problema. En efecto, al modificar el valor de la altura del punto más alto del sifón (h_C), se constata que cambia el valor de la presión ahí (en C), pero también se comprueba que no se altera la presión en el punto de salida (D), ni tampoco la velocidad con la que circula el agua y sale al abrir el sifón. Así debe ser, ya que estas dos magnitudes dependen enteramente del desnivel que exista entre el depósito y la boca de salida del sifón, pero no de la altura adicional que pueda recorrer el líquido dentro del tubo. Del mismo modo, al modificar la altura del nivel del depósito (h_A), se comprueba que, estando el sifón cerrado, esta modificación implica sendas alteraciones del valor de la presión en el punto más alto del sifón (C) y en la boca del mismo (D) (al modificar h_A se alteran los desniveles entre el depósito y cada uno de esos puntos), y, al abrir así el depósito, el agua circula y sale de él con una velocidad también diferente (mayor cuanto mayor sea el desnivel entre el depósito y la boca de salida).

En la imagen siguiente, vemos el aspecto de la animación cuando los valores de los datos del problema coinciden con los que hemos adoptado aquí y el sifón está abierto.



La animación y el programa necesario para hacerla correr están disponibles en la Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física de la Sección Local de Alicante de la RSEF: http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm