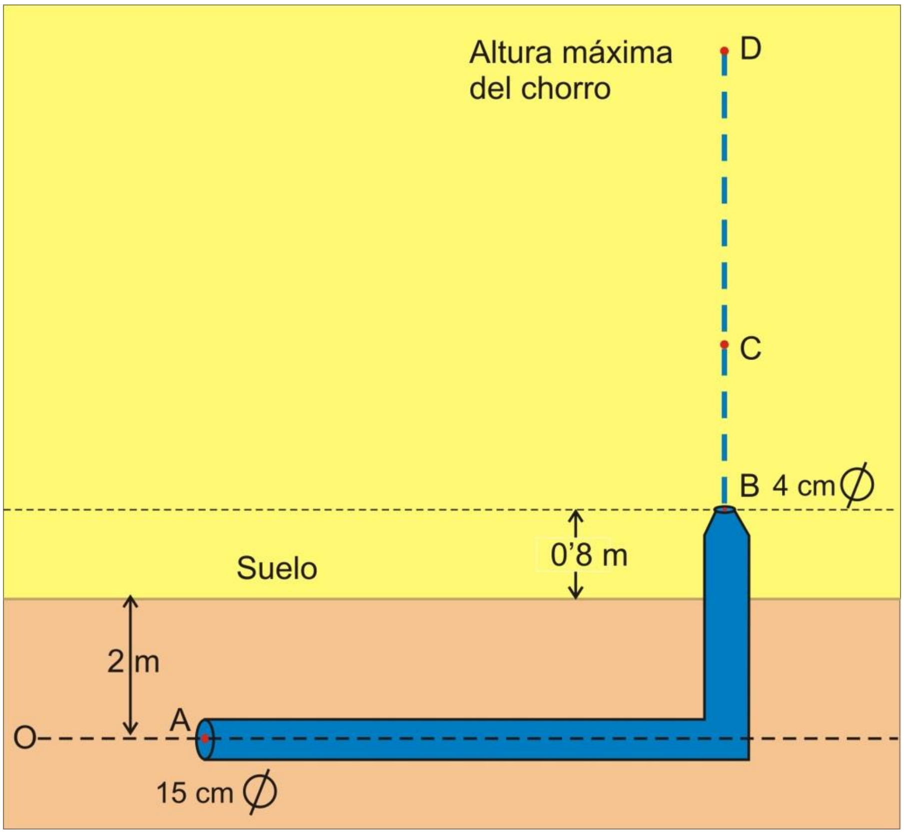
**Se pretende que el chorro de agua del surtidor de una fuente alcance una altura máxima de 5 m (D) sobre la boca de salida (B). Teniendo en cuenta la información reflejada en la figura adjunta, determinad los valores de la velocidad y presión en el punto A (presión de suministro) así como la sección que tendrá el chorro en el exterior cuando haya ascendido 2 m (C) por encima de la boca de salida. (Resuélvase considerando que no hay pérdidas en la conducción ni rozamiento con el aire).**




Podemos intentar resolver el problema aplicando Bernoulli entre el punto A y otro punto del trayecto recorrido por el agua del que dispongamos de más datos, como el punto D. En ese caso:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot h_A = P_D + \frac{1}{2}\rho \cdot v_D^2 + \rho \cdot g \cdot h_D$$

Dado que $P_D = P_{atm}$ y que $v_D = 0$, obtenemos:

$$P_A = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_D - \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 \quad (1)$$

La expresión anterior, es consistente con el hecho de que, a igualdad de los restantes factores, $P_A$ será mayor, cuanto mayor sea la altura máxima a alcanzar ($h_D$) y menor sea el valor de la velocidad en la boca de entrada ($v_A$). Sin embargo, no podemos hallar $P_A$, puesto que desconocemos $v_A$, por lo que será necesario determinar antes el valor de dicha velocidad.

*¿Cómo podríamos hacerlo?*

De acuerdo con la ecuación de continuidad, se cumple: $S_A \cdot v_A = S_B \cdot v_B$

Y despejando:

$$v_A = \frac{S_B}{S_A} \cdot v_B \quad (2)$$

Ciertamente, desconocemos $v_B$, pero podemos obtenerla si aplicamos Bernoulli a los puntos B y D, con lo que:

$$P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v_B^2 + \rho \cdot g \cdot h_B = P_D + \frac{1}{2}\rho \cdot v_D^2 + \rho \cdot g \cdot h_D$$

En la ecuación anterior, $P_B = P_D = P_{atm}$ y $v_D = 0$

Teniendo esto en cuenta y despejando, obtenemos:

$$v_B = \sqrt{2g \cdot (h_D - h_B)} \quad (3)$$

Sustituyendo $v_B$ en la ecuación (2), obtendremos $v_A$:

$$v_A = \frac{S_B}{S_A} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (h_D - h_B)}$$

$$v_A = \frac{\pi \cdot \frac{(4 \cdot 10^{-2})}{4}}{\pi \cdot \frac{(15 \cdot 10^{-2})}{4}} \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot (7{,}8 - 2{,}8)} = 2{,}64 \frac{m}{s}$$

Sustituyendo ahora $v_A$ en la ecuación (1), podremos obtener el valor de $P_A$ buscado:

$$P_A = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_D - \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 = 1{,}013 \cdot 10^5 + 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 7{,}8 - \frac{1}{2}10^3 \cdot 6{,}97$$

Y operando: $P_A = 174\,255{,}2$ N/m$^2$ = 1,72 atm [1]

Para obtener la sección que tendrá el chorro de agua cuando haya subido 2 m por encima de la boca de salida, bastará aplicar de nuevo la ecuación de continuidad, pero, esta vez, entre los puntos B y C, con lo que:

$$S_B \cdot v_B = S_C \cdot v_C \rightarrow S_C = S_B \cdot \frac{v_B}{v_C} \quad (5)$$

[1] Como ya comentamos anteriormente, N/m$^2$ = Pa (Pascal). El que no utilicemos aquí esta unidad internacional (Pa), obedece a la intención de evitar posibles confusiones que pueden generarse debido a los subíndices que habitualmente acompañan a la presión P.

Si analizamos el resultado literal, dado por la ecuación (5), nos daremos cuenta de que, dado que la velocidad del chorro va disminuyendo conforme este asciende ($v_C < v_B$), la sección del mismo deberá ir aumentando, por lo que $S_C > S_B$ (lógicamente, al descender ocurrirá lo contrario).

También veremos que, para poder calcular $S_C$, necesitamos conocer antes $v_C$. Esto lo podemos conseguir aplicando de nuevo Bernoulli, pero esta vez, entre C y D. En efecto:

$$P_C + \frac{1}{2}\rho \cdot v_C^2 + \rho \cdot g \cdot h_C = P_D + \frac{1}{2}\rho \cdot v_D^2 + \rho \cdot g \cdot h_D$$

Teniendo en cuenta que $P_C = P_D = Patm$ y que $v_D = 0$:

$$P_{atm} + \frac{1}{2}\rho \cdot v_C^2 + \rho \cdot g \cdot h_C = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_D$$

Y despejando:

$$v_C = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h_D - h_C)} \quad (6)$$

Sustituyendo ahora (3) y (6) en la ecuación (5) anterior, obtenemos finalmente:

$$S_C = S_B \cdot \sqrt{\frac{(h_D - h_B}{(h_D - h_C}} \quad (7)$$

En el resultado literal anterior, se contempla, como así debe ser, el hecho de que cuanto más se aproxime el punto C al punto B, tanto más se aproximará la sección del chorro en C a la sección del chorro en B.

Para terminar, sustituyendo los valores numéricos correspondientes, obtenemos:

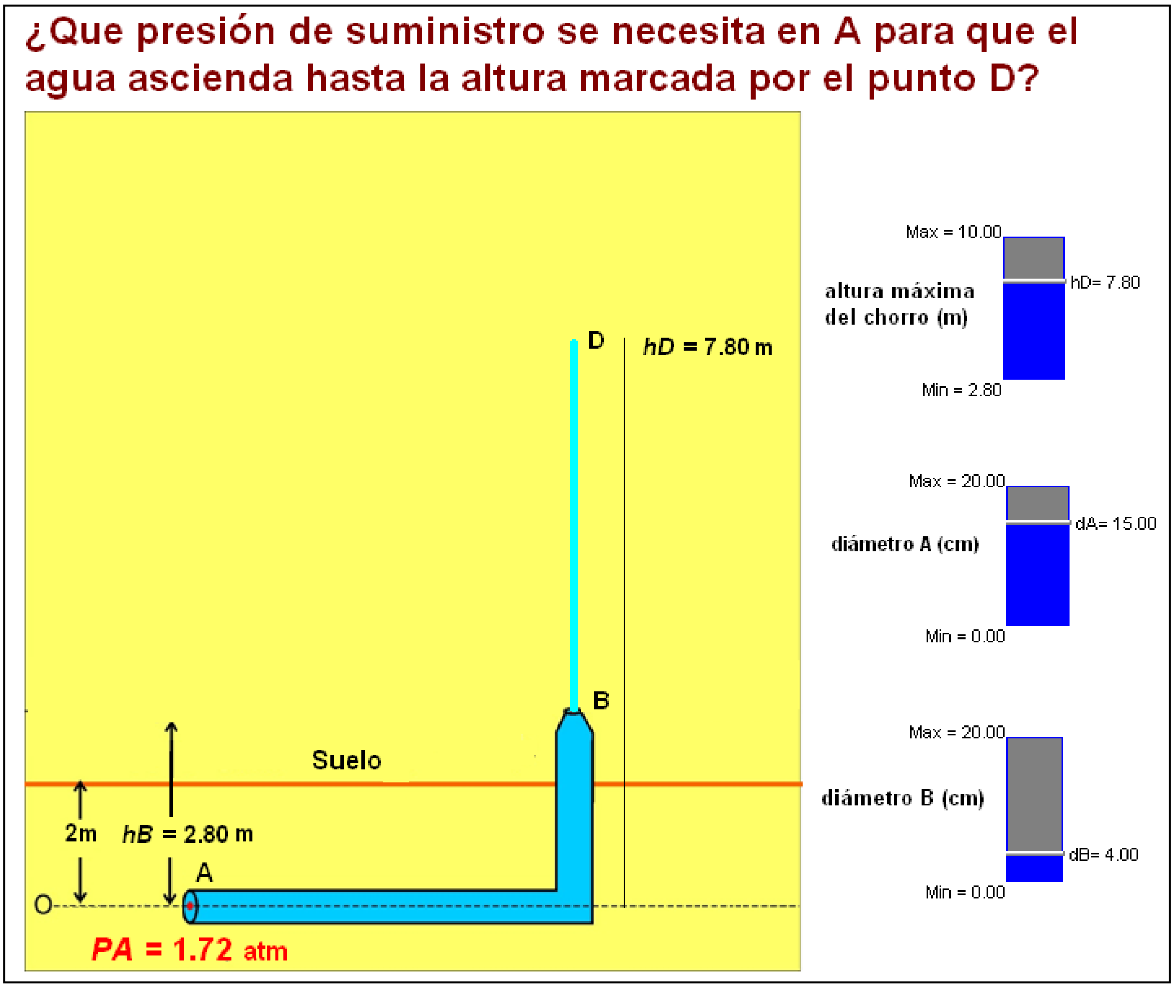
$$S_C = \pi \cdot \frac{\left(4 \cdot 10^{-2}\right)^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{(7{,}8 - 2{,}8)}{(7{,}8 - 4{,}8)}}$$

Y operando:

$$S_C = 12{,}57 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}29 = 16{,}2 \cdot 10^{-4}\ m^2 = 16{,}2\ cm^2$$

Para reforzar este problema hemos elaborado una animación *Modellus* que simula la situación y obtiene la presión de suministro buscada, $P_A$. Como hemos visto (ecuación 4), dicha presión, que hay que suministrar en el origen, depende, junto con otros factores, de la altura máxima del chorro de agua, $h_D$, y también de los diámetros de la tubería del surtidor en el punto de suministro y en la salida ($d_A$ y $d_B$). Por ello, en la pantalla de la animación, hemos colocado tres controladores manuales con los que los alumnos pueden modificar estas magnitudes y poner a prueba sus hipótesis acerca de ellas. Si lo desean, también pueden entrar en la ventana de condiciones iniciales para modificar los valores del resto de parámetros de los que depende $P_A$ (presión atmosférica, gravedad y densidad del líquido)

En la imagen siguiente, vemos su aspecto cuando los valores de los datos del problema coinciden con los que hemos adoptado aquí.




La animación y el programa necesario para hacerla correr están disponibles en la Web de Materiales para la enseñanza y la Divulgación de la Física de la Sección Local de Alicante de la RSEF: http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm