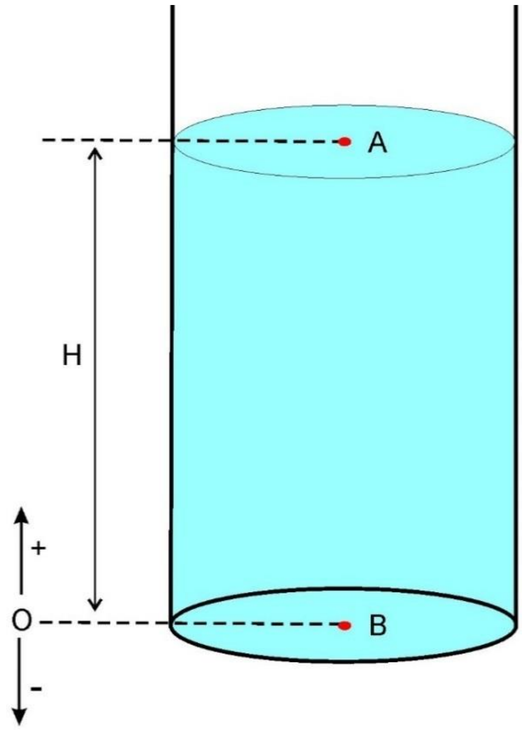
**Un depósito de 2 m de diámetro se llena con agua hasta una altura de 3 m. Si en su base se practica un orificio de 2 cm de diámetro, determinad el nivel de agua en el depósito en cualquier instante, el tiempo total de vaciado y la velocidad con que sale el agua en cualquier instante.**

En la figura siguiente se ha representado de forma esquemática la situación planteada en el enunciado. En ella, H corresponde a la altura inicial a la que se encuentra el nivel del agua (3 m). El punto A, situado en el centro de la superficie superior de la columna de agua, desciende conforme se va vaciando el depósito pasando desde una posición inicial (dada por $h_A = H$), hasta una posición final ($h_A = 0$) en el instante que se ha vaciado el depósito.




En principio, podemos pensar que conforme vaya bajando el nivel del agua (dado por $h_A$) en el depósito, tanto la velocidad ($v_A$) con la que desciende el nivel del agua como la velocidad ($v_B$) con la que sale el agua por el pequeño orificio practicado en la parte inferior, irán disminuyendo con el tiempo. Por otra parte, es lógico plantear, a modo de hipótesis, que (a igualdad de los restantes factores) el tiempo total de vaciado del depósito será mayor cuanto mayor sea la altura inicial del agua, $H$, cuanto mayor sea el cociente $S_A/S_B$, y cuanto menor sea la gravedad, $g$.

Empezamos expresando la velocidad a la que desciende el nivel del agua. Dicha velocidad vendrá dada por la variación de $h_A$ con el tiempo, cambiada de signo (ya que, al ir disminuyendo, es negativa):

$$v_A = -\frac{dh_A}{dt} \rightarrow -dh_A = v_A \cdot dt \quad (1)$$

Podemos tratar de expresar el nivel del agua, $h_A$, en función del tiempo, integrando en la ecuación anterior, para lo cual, necesitamos expresar primero la velocidad $v_A$ en función de las magnitudes que nos interesen.

Aplicando Bernoulli a los puntos A y B de la figura, nos queda que:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v_B^2 + \rho \cdot g \cdot h_B$$

donde podemos simplificar teniendo en cuenta que $P_A = P_B = P_{atm}$

Aplicando la ecuación de continuidad:

$$S_A \cdot v_A = S_B \cdot v_B \rightarrow v_B = \frac{S_A}{S_B} \cdot v_A$$

Sustituyendo $v_B$ en la expresión anterior y despejando:

$$v_A = \left(\sqrt{\frac{S_B^2 \cdot 2g}{S_A^2 - S_B^2}}\right) \cdot \sqrt{h_A} \quad (2)$$

En la ecuación (2), el término entre paréntesis es constante, mientras que $h_A$ no lo es. La ecuación nos dice que la velocidad a la que desciende el nivel del agua va disminuyendo al mismo ritmo que lo hace $\sqrt{h_A}$ . Obviamente, dicha velocidad, en el instante inicial ($h_A = H$), valdrá:

$$v_{A_0} = \left(\sqrt{\frac{S_B^2 \cdot 2g}{S_A^2 - S_B^2}}\right) \cdot \sqrt{H}$$

Mientras que, en el instante final ($h_A = 0$), valdrá 0

Sustituyendo (2) en (1):

$$-dh_A = \left(\sqrt{\frac{S_B^2 \cdot 2g}{S_A^2 - S_B^2}}\right) \cdot \sqrt{h_A} \cdot dt$$

Separando variables e integrando entre $H$ y $h$ (y entre 0 y $t$):

$$-\int_H^h \frac{dh_A}{\sqrt{h_A}} = \int_0^t \sqrt{\left(\frac{S_B^2 \cdot 2g}{S_A^2 - S_B^2}\right)} \cdot dt \rightarrow \left[-\frac{h_A^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_H^h = \sqrt{\left(\frac{S_B^2 \cdot 2g}{S_A^2 - S_B^2}\right)} \cdot t \rightarrow 2 \cdot \left(H^{\frac{1}{2}} - h^{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\left(\frac{S_B^2 \cdot 2g}{S_A^2 - S_B^2}\right)} \cdot t$$

y despejando:

$$h^{\frac{1}{2}} = H^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{S_B^2 \cdot g}{2(S_A^2 - S_B^2)}} \cdot t$$

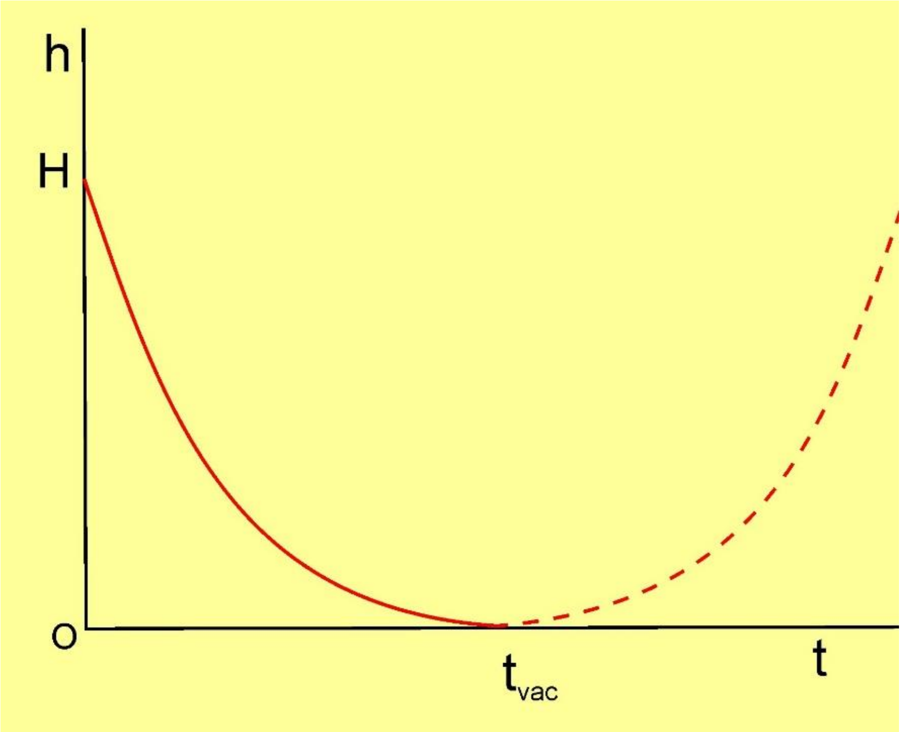
La última ecuación obtenida se puede expresar como:

$$h = \left(H^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{S_B^2 \cdot g}{2(S_A^2 - S_B^2)}} \cdot t\right)^2$$

Desarrollando el cuadrado del binomio:

$$h = \frac{S_B^2 \cdot g}{2(S_A^2 - S_B^2)} \cdot t^2 - \sqrt{\frac{S_B^2 \cdot 2g}{S_A^2 - S_B^2}} \cdot H^{\frac{1}{2}} \cdot t + H$$

La ecuación anterior, da el valor de la altura $h$ que va teniendo el agua en cada instante "$t$". Podemos ver que se trata de una función parabólica de ramas hacia arriba y que, como es lógico, en el instante $t$ = 0 se cumple que $h = H$ y que, para $t$ = tiempo de vaciado ($t_{vac}$), se cumple que $h = 0$. (Esta función matemática "en nuestro problema" solo existe en el intervalo entre 0 y $t_{vac}$).




Derivando $h$ = f($t$) e igualando a 0 (condición de máximo o mínimo), determinaremos el instante en que se produce el mínimo (es decir, el tiempo de vaciado $t_{vac}$):

$$\frac{S_B^2 \cdot g}{S_A^2 - S_B^2} \cdot t_{vac} - \sqrt{\frac{S_B^2 \cdot 2g}{S_A^2 - S_B^2}} \cdot H^{\frac{1}{2}} = 0 \rightarrow t_{vac} = \frac{\sqrt{\frac{S_B^2 \cdot g}{S_A^2 - S_B^2}} \cdot \sqrt{2H}}{\frac{S_B^2 \cdot g}{S_A^2 - S_B^2}}$$

Y simplificando:

$$t_{vac} = \left(\sqrt{\frac{S_A^2 - S_B^2}{S_B^2} \cdot \frac{2}{g}}\right) \cdot \sqrt{H} \quad (4)$$

El resultado literal anterior es dimensionalmente homogéneo (T en ambos lados) y corrobora las hipótesis que hemos formulado. Nos informa de que, para un depósito de unos valores determinados de $S_A$ y $S_B$, el tiempo total de vaciado es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la altura inicial de líquido, de manera que, conocido el valor de la constante de proporcionalidad (lo que hay entre paréntesis), se puede conocer fácilmente el tiempo que tardará en vaciarse el depósito.

Nos plantearemos ahora la determinación de la velocidad de salida del agua en cualquier instante "*t*" del vaciado:

De la ecuación de continuidad, sabemos que, en cualquier instante del vaciado, se cumplirá que:

$$v_B = \frac{S_A}{S_B} \cdot v_A$$

Sustituyendo $v_A$ por su expresión (2):

$$v_B = \frac{S_A}{S_B} \cdot \left( \sqrt{\frac{S_B^2 \cdot 2g}{S_A^2 - S_B^2}} \right) \cdot \sqrt{h}$$

Y sustituyendo ahora h:

$$v_B = -\left( \frac{S_A \cdot S_B \cdot g}{S_A^2 - S_B^2} \right) \cdot t + \frac{S_A}{S_B} \cdot \sqrt{\frac{S_B^2 \cdot 2g}{S_A^2 - S_B^2}} \cdot H^{\frac{1}{2}}$$

Vemos que se trata de una función lineal que nos proporcionará el valor de la velocidad de salida ($v_B$) del agua por el agujero inferior del depósito en cualquier instante y tiene una validez general (siempre que el régimen sea estacionario y la energía se conserve).

Ahora bien, en nuestro caso se cumple que la superficie $S_A$ es mucho mayor (10 000 veces mayor) que la superficie $S_B$ (concretamente: $S_A$ = 3,14 m$^2$ y $S_B$ = 3,14·10$^{-4}$ m$^2$). Por tanto, se puede considerar que: $S_A^2 - S_B^2 \approx S_A^2$

Si introducimos esta simplificación en la ecuación (5) anterior, la velocidad de salida queda finalmente como:

$$v_B = -(S_B \cdot g) \cdot t + \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$$

Si analizamos este resultado, nos podemos dar cuenta de que:

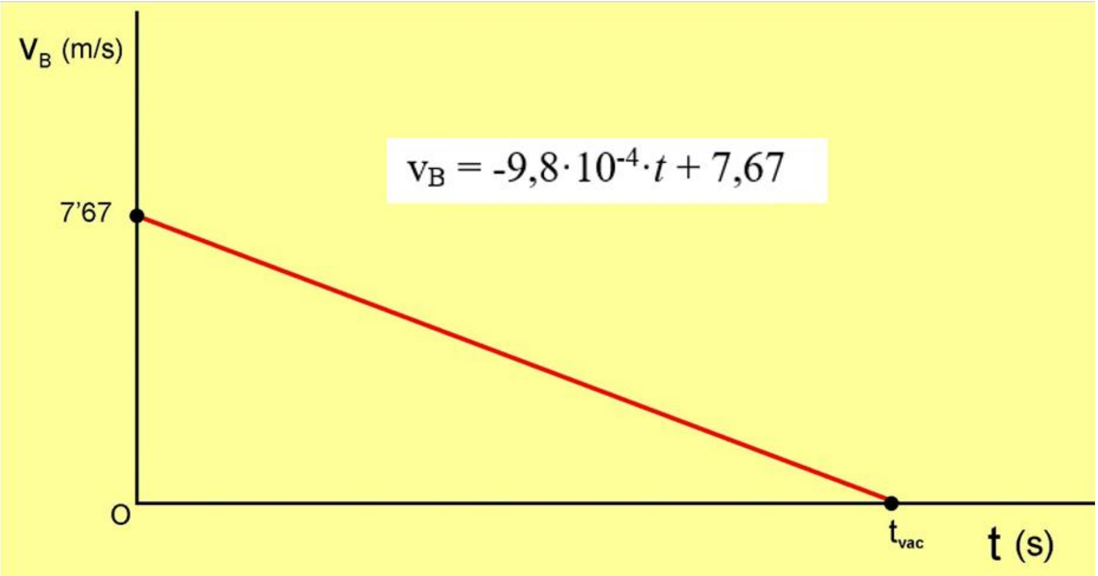
a) Es dimensionalmente homogéneo (L/T) en ambos lados
b) La velocidad de salida disminuye linealmente con el tiempo
c) Su valor inicial (para $t$ = 0), que es su valor máximo, viene dado por: $\sqrt{2 \cdot g \cdot H}$ = 7,67 m/s, y coincide con la velocidad correspondiente a un objeto dejado caer libremente desde una altura *H*. (Situación parecida a la que se planteó en el ejercicio 2 para el chorro de agua de un grifo).
d) Se cumplen varios casos límite evidentes, como, por ejemplo: si no hubiera gravedad ($g$ = 0), sería $v_B$ = 0 en todo instante, ya que, en ese caso obviamente el depósito no se vaciaría.

Sustituyendo los valores numéricos y operando:

$$v_B = -9{,}8 \cdot 10^{-4} \cdot t + 7{,}67$$

Al ser muy pequeño el coeficiente de "$t$" (pendiente de la recta), sucederá que la variación de $v$ con el tiempo, también lo será. Se puede comprobar que para que $v$ disminuya tan solo el 1 %, deben transcurrir más de 60 segundos.

Si representásemos gráficamente, se obtendría una línea recta de pendiente negativa, como la de la figura siguiente:




En cuanto al tiempo total de vaciado, si en la expresión general (4) realizamos la misma simplificación ($S_A^2 - S_B^2 \approx S_A^2$), obtenemos que:

$$t_{vac} = \frac{S_A}{S_B} \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

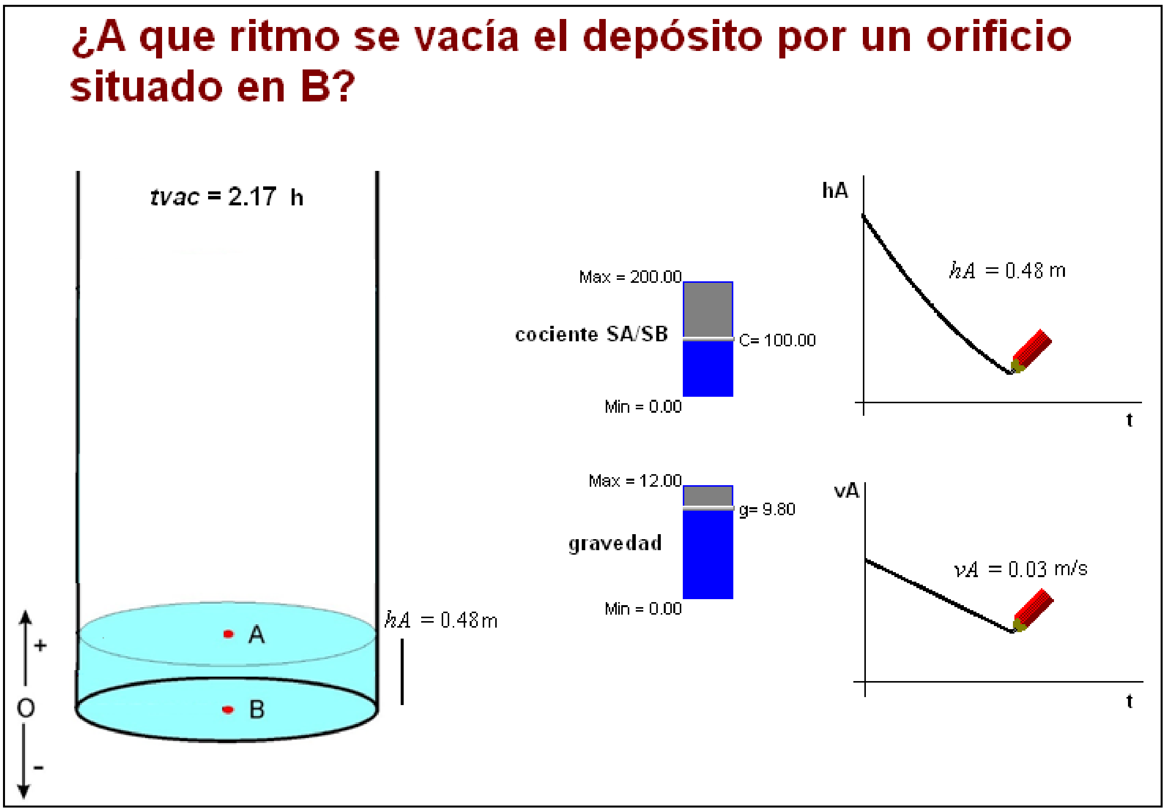
Si analizamos este resultado, vemos que, además de ser dimensionalmente homogéneo (T en ambos miembros de la igualdad), en él se contempla, como ocurría en el resultado más general obtenido antes (ecuación 4) que el valor del tiempo total de vaciado aumentará si (a igualdad de los restantes factores): aumenta el cociente $S_A/S_B$, aumenta $H$, o si disminuye "$g$". También contempla casos límite obvios como, por ejemplo: si $H = 0$, entonces $t_{vac} = 0$ (ya está vacío); si $g = 0$, $t_{vac} = \infty$ (no se vaciaría nunca).

Sustituyendo valores numéricos y operando:

$$t_{vac} = \frac{S_A}{S_B} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}} = \frac{3{,}14}{3{,}14 \cdot 10^{-4}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{9'8}} = 7{,}82 \cdot 10^3\ s = 2{,}17\ \mathrm{h}$$

Para reforzar este problema hemos construido una animación *Modellus* que simula el proceso de vaciado del depósito, obtiene los resultados buscados y va representando paulatinamente las gráficas de la altura que tiene el agua, $h_A$, y de la velocidad de vaciado, $v_A$. También hemos colocado sendos cursores manuales con los que se puede modificar sobre la marcha el valor de la gravedad, $g$, y el del cociente entre $S_A/S_B$. Manipulando estos cursores, los alumnos pueden poner a prueba sus hipótesis y algunos casos límite.

La imagen siguiente muestra el aspecto de la pantalla en un instante intermedio del proceso de vaciado, para el caso en que los valores de los parámetros del problema coinciden con los que hemos adoptado aquí.




La animación está disponible en la Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física de la Sección Local de Alicante de la RSEF: http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm