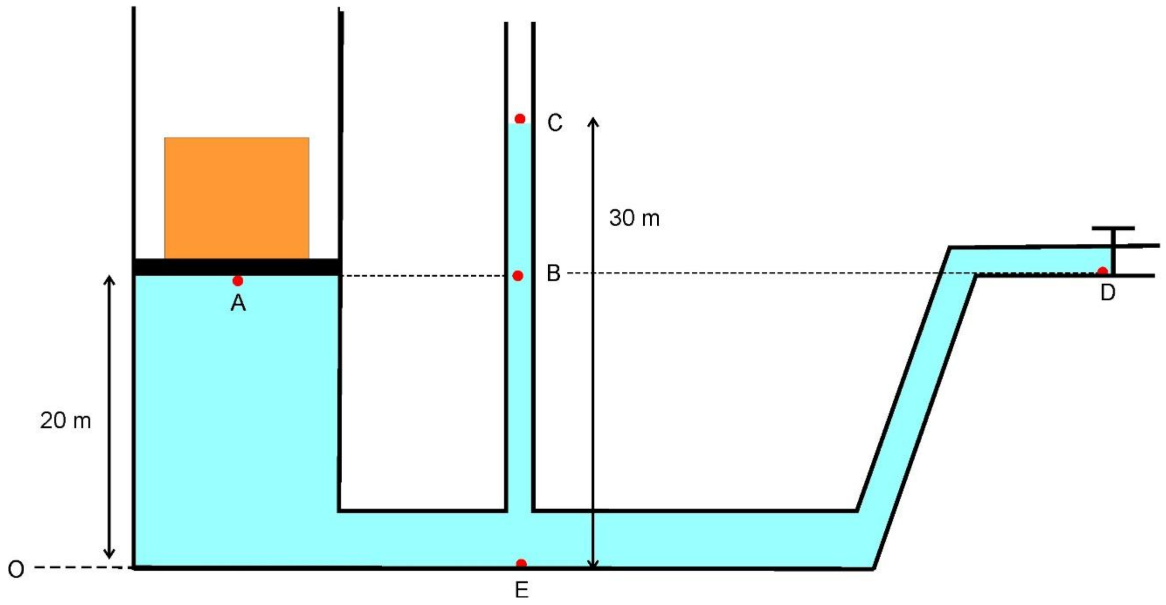
En el dispositivo esquematizado en la figura adjunta, el depósito de agua tiene una sección de 3 m^2 y la conducción presenta, en los tramos horizontales, secciones de 10 cm^2 en el tramo inferior y de 5 cm^2 en el superior (la figura no está a escala).



Sabiendo que, con la salida cerrada, la columna de agua en el tubo vertical alcanza una altura de 30 m, determinad:

a) Peso del conjunto cuerpo-plataforma.
b) Presión en un punto de la conducción horizontal superior (de 5 cm^2 de sección).
c) Caudal que se producirá al dejar libre la salida (considerando despreciables las pérdidas por fricción).
d) Altura del agua en el tubo vertical en la situación del apartado anterior.

Datos: Densidad del agua, $\rho = 10^3$ kg/m^3. Presión atmosférica, $P_{atm} = 1'013 \cdot 10^5$ N/m^2

Empezaremos resolviendo los dos primeros apartados, que consideran una situación inicial estática, la cual se mantiene mientras la válvula permanece cerrada:

a) Como, mientras la salida se encuentre cerrada, nos encontramos en una situación de equilibrio estático, todos los puntos que se encuentren al mismo nivel, han de tener la misma presión. Aplicando esta condición a los puntos A y B, escribimos:

$P_A = P_B$

Partiendo de la igualdad anterior, ¿cómo podríamos determinar el peso que se nos pide?

La presión en A dependerá de la presión debida a la fuerza peso F_p del conjunto cuerpo-plataforma y del valor de la presión atmosférica. Introduciendo estos datos, junto con los de P_B, en la igualdad anterior, podemos obtener el peso que buscamos:

$P_A = P_{atm} + F_p/S$

En el punto B, la presión es la atmosférica más la debida a una columna de agua de 10 m de altura:

$P_B = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_{CB}$

Por tanto, igualando $P_A = P_B \rightarrow P_{atm} + F_p/S = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_{CB} \rightarrow F_p/S = \rho \cdot g \cdot h_{CB}$

Y despejando: $F_p = S \cdot \rho \cdot g \cdot h_{BC}$ $\rightarrow$ $F_p = 3 \cdot 10^3 \cdot 9'8 \cdot 10 = 2'94 \cdot 10^5$ N

b) Dado que la situación de equilibrio no ha variado, podemos calcular la presión que se nos pide mediante la misma estrategia que acabamos de seguir en el apartado anterior, es decir, igualando la presión en D a la presión en A o en B:

$$P_D = P_B \rightarrow P_D = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_{BC}$$

Y sustituyendo[1]: $P_D = 1'013 \cdot 10^5 + 10^3 \cdot 9'8 \cdot 10 = 1'993 \cdot 10^5$ N/m^2

c) Para calcular el caudal de agua "Q" que saldrá por D cuando se abra la salida, aplicaremos el principio de Bernoulli a los puntos A y D para, después, obtener v_D y con ella Q mediante $Q = S_D \cdot v_D$.

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot h_A = P_D + \frac{1}{2}\rho \cdot v_D^2 + \rho \cdot g \cdot h_D$$

Como en la situación descrita se cumple que $h_A = h_D$ podemos simplificar y obtenemos:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 = P_D + \frac{1}{2}\rho \cdot v_D^2 \quad (1)$$

En la ecuación anterior:

- P_A, sigue valiendo lo mismo que antes ($1'993 \cdot 10^5$ N/m^2)
- P_D, ahora vale 1 atm = $1'1013 \cdot 10^5$ N/m^2
- ρ, es la densidad del agua (10^3 kg/m^3)
- v_A, es, en principio, desconocida.

No es posible, pues, utilizar (1) para calcular v_D si previamente no calculamos v_A o la expresamos en función de magnitudes cuyos valores conozcamos. ¿Cómo podríamos hacerlo?

Recordemos que, de acuerdo con la ecuación de continuidad, se cumple que:

$v_A \cdot S_A = V_D \cdot S_D$

Despejando v_A, obtenemos que: $v_A = \frac{S_D}{S_A} \cdot v_D \rightarrow v_A^2 = \frac{S_D^2}{S_A^2} \cdot v_D^2$

Sustituyendo ahora v_A^2 en la ecuación (1) y despejando v_D, obtenemos:

$$v_D = \sqrt{\frac{2(P_A - P_D)}{\rho\left(1 - \frac{S_D^2}{S_A^2}\right)}} \quad (2)$$

[1] La presión en unidades internacionales se mide en N/m^2. Sabemos que N/m^2 se denomina Pascal (Pa), de modo que 1 N/m^2 = 1 Pa. No obstante, para evitar confusiones al utilizar símbolos de presiones con subíndices, en este capítulo utilizaremos la notación N/m^2 en lugar de Pa (que sería más apropiado).

Antes de operar, conviene percatarse de que dado que S_A (3 m^2) es mucho mayor que S_D (5 cm^2) y que ambos términos están elevados al cuadrado, se cumplirá que el cociente entre los cuadrados de ambas secciones será mucho menor que 1. En efecto:

$$\frac{S_D^2}{S_A^2} = \left(\frac{5 \cdot 10^{-4}}{3}\right)^2 = 2'78 \cdot 10^{-8} \ll 1$$

De modo que, si despreciamos este cociente, la ecuación anterior se transforma en:

$$v_D = \sqrt{\frac{2(P_A - P_D)}{\rho}}$$

Y sustituyendo, obtenemos finalmente: $v_D = \sqrt{\frac{2\cdot(1'993\cdot10^5 - 1'013\cdot10^5)}{10^3}}$ = 14 m/s

Ahora para calcular el caudal Q, basta aplicar: Q = S·v, con lo que:

$Q = S_D \cdot v_D = 5\cdot10^{-4}\cdot14 = 7\cdot10^{-3}\ m^3/s$

Podemos analizar este resultado literal para ver que, además de ser dimensionalmente homogéneo ($L\cdot T^{-1}$ en ambos lados) es físicamente aceptable, ya que es lógico que la velocidad del agua que salga por D cuando se abra la válvula, dependa por un lado, de la diferencia de presión entre los puntos A y D (cuanto mayor sea dicha diferencia, el agua será "empujada" con mayor intensidad y saldrá con mayor velocidad) y, por otro, de la densidad del líquido (cuanto más "pesado" sea, para una misma diferencia de presiones, más lento se moverá).

d) Para terminar, hemos de calcular qué altura alcanzará el agua en el tubo vertical, en la situación anterior (agua circulando).

Antes de abrir la salida en D (situación de equilibrio estático), la altura del agua en el tubo vertical era h_{EC} = 30 m. Cabe esperar que, cuando se abra la salida y el agua se halle circulando, el nivel en el tubo vertical descienda de su nivel inicial C a otro C' y la altura $h_{EC'}$ será menor de 30 m.

Sugerid un procedimiento para determinar $h_{EC'}$

La presión P_E es la suma de la ejercida por la atmósfera (1 atm) y la ejercida por la columna de agua (dada por $\rho\cdot g\cdot h_{EC'}$). Es decir:

$P_E = P_{atm} + \rho\cdot g\cdot h_{EC'}$ (3)

Por tanto, la determinación de la altura buscada $h_{EC'}$ pasa por calcular previamente el valor de P_E, para lo cual disponemos de la ecuación de Bernoulli y de la ecuación de continuidad.

Aplicando Bernoulli entre los puntos E y D:

$$P_E + \frac{1}{2}\rho \cdot v_E^2 + \rho \cdot g \cdot h_E = P_D + \frac{1}{2}\rho \cdot v_D^2 + \rho \cdot g \cdot h_D$$

Despejando P_E y considerando que $h_E = 0$:

$$P_E = P_D + \frac{1}{2}\rho \cdot v_D^2 - \frac{1}{2}\rho \cdot v_E^2 + \rho \cdot g \cdot h_D \quad (4)$$

Aplicando ahora la ecuación de continuidad entre los mismos puntos E y D:

$$S_E \cdot v_E = S_D \cdot v_E \quad \rightarrow \quad v_E = \frac{S_D}{S_E} \cdot v_D$$

Sustituyendo v_E en (4) y simplificando, obtenemos que:

$$P_E = P_D + \frac{1}{2}\rho \cdot \left(1 - \frac{S_D^2}{S_E^2}\right) v_D^2 + \rho \cdot g \cdot h_D$$

Sustituyendo ahora la expresión de P_E obtenida, en la ecuación (3) y teniendo en cuenta que $P_D = P_{atm}$, obtenemos que:

$$h_{EC'} = \left(1 - \frac{S_D^2}{S_E^2}\right) \cdot \frac{v_D^2}{2g} + h_D \quad (5)$$

Finalmente, sustituyendo valores numéricos:

$$h_{EC'} = \left(1 - \frac{5^2}{10^2}\right) \cdot \frac{14^2}{2 \cdot 9'8} + 20 = 27'5m$$

Analizando el resultado literal (5) anterior, podemos ver que, además de ser una ecuación dimensionalmente homogénea (L en ambos lados), se contemplan en ella algunos casos particulares interesantes. Concretamente, si:

$S_D < S_E \rightarrow h_{EC'} > h_D$
$S_D > S_E \rightarrow h_{EC'} < h_D$
$S_D = S_E \rightarrow h_{EC'} = h_D$