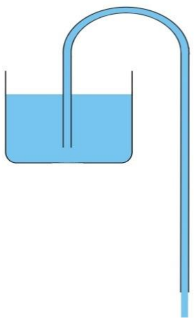
Un sifón de agua carbónica tiene, en su parte superior, una mezcla de aire y de dióxido de carbono que produce una presión de 1'4 atm. Si la diferencia de altura entre el nivel del líquido y la boca de salida es de 16 cm, determinad la velocidad con la que saldrá el agua carbónica al abrir la válvula de salida. (Considerad que la sección del recipiente es mucho mayor que la sección del tubo por el que asciende el líquido).

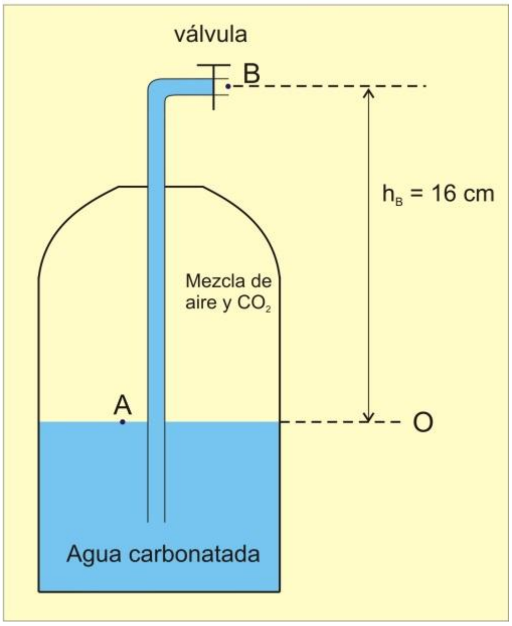
Datos: densidad del líquido $\rho = 10^3$ kg/m^3, intensidad del campo gravitatorio g = 9'81 N/kg, 1 atm = 1'013·10^5 N/m^2.

El sifón es el nombre que se da a una botella que contiene agua carbonatada. En el interior del envase, la presión es mayor que la presión atmosférica del exterior, a causa de la presión ejercida por el dióxido de carbono. Esta presión se mantiene por el equilibrio existente entre el CO_2 disuelto en el agua y el que existe en la parte superior del envase mezclado con aire. La diferencia de presión hace que el agua carbonatada ascienda por el tubo, en cuanto se abre la válvula que conecta el interior del recipiente con el exterior, y salga al exterior. Este utensilio, que antes era bastante común y se utilizaba para beber agua con gas o para mezclarla con vino y otras bebidas, está cada vez más en desuso y se ha sustituido por botellitas de soda. Sin embargo, en algunos países, como Argentina y Uruguay, los sifones de agua carbonatada siguen siendo muy utilizados, se fabrican de sustancias plásticas (más seguras frente a una posible explosión), y habitualmente son repartidos a domicilio por "soderos" o "sifoneros".

Conviene saber que el término *sifón* procede del griego antiguo y se utilizó para nombrar a los dispositivos que permitían al agua de un canal o de un acueducto, pasar por debajo de un camino o por una vaguada para retomar su nivel al otro lado y continuar su curso. Así este tipo de sifón ya era conocido por los romanos, que lo utilizaban en sus acueductos. Más adelante, se inventó la variante invertida que permite a un líquido pasar por un obstáculo situado a mayor altura que la superficie del mismo, aprovechando la diferencia de presión generada entre los extremos de dicho tubo, como ocurre también al usar el recipiente hermético que contiene agua carbonatada.



En la figura adjunta se ha representado, esquemáticamente, el corte longitudinal de una botella-sifón conteniendo agua carbonatada, incorporando los datos que figuran en el enunciado. Como puede verse, en el esquema se ha tomado como origen el nivel inicial del líquido, de modo que $h_A = 0$ y $h_B = 16$ cm.



Podemos empezar planteando, a modo de hipótesis, que la rapidez con que sale el agua carbonatada al hacer funcionar la válvula de apertura, v_B, será mayor cuanto mayor sea la diferencia de presiones entre los puntos A y B y que en el caso límite en que no existiera esa diferencia de presión ($P_A - P_B = 0$), el agua carbonatada no podría salir del sifón ($v_B = 0$). También deberán influir en el resultado del problema, la densidad del líquido, ρ (cuanto mayor sea ρ, más le costará al líquido ascender y, por tanto, menor será, v_B), así como la intensidad del campo gravitatorio, g, y la diferencia de altura entre la válvula a la salida y el nivel del agua carbonatada dentro del recipiente, h_B (recordemos que hemos tomado $h_A = 0$). Lógicamente, cuanto mayor sea cada uno de estos dos últimos factores, menor debería ser la velocidad a la que el sifón expulsará líquido.

Finalmente, la velocidad buscada, v_B, también dependerá del valor que tenga esa velocidad en el punto A (descendiendo por dentro de la botella), pero esta velocidad v_A, a su vez depende de las secciones respectivas en A y en B, ya que de acuerdo con la ecuación de continuidad entre A y B: $S_A \cdot v_A = S_B \cdot v_B$

Y despejando v_A, se obtiene: $v_A = \dfrac{S_B}{S_A} \cdot v_B$

Ahora bien, de esta forma no podremos hallar v_A, ya que en la expresión anterior, todos los valores son desconocidos, así que, en principio, tampoco podremos utilizarla para determinar la velocidad v_B que se pide en el enunciado. Sin embargo, en ese mismo enunciado se nos informa de que la sección S_A de la botella es mucho mayor que la sección del tubo por el que asciende el líquido, la cual coincide con S_B. Ello supone, de acuerdo con la ecuación anterior, que v_A ha de tener un valor muy pequeño y mucho más pequeño si está, como aparece en la raíz, elevada al cuadrado. Es decir:

$$v_A^2 = \left(\frac{S_B}{S_A}\right)^2 \cdot v_B^2 \quad \text{y como} \quad \left(\frac{S_B}{S_A}\right)^2 << 1 \rightarrow v_A^2 \approx 0$$

Por tanto, bajo estas condiciones, podemos finalmente resumir todas las hipótesis expresando que:

$$v_B = f\,(P_A - P_B,\ \rho,\ g,\ h_B)$$

Llegados aquí para determinar la rapidez con que sale el chorro de agua carbonatada por B al hacer funcionar la válvula de apertura, sólo necesitaremos aplicar la ecuación de Bernoulli entre A y B (en el razonamiento anterior hemos usado ya la ecuación de continuidad, llegando a $v_A \approx 0$):

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v_B^2 + \rho \cdot g \cdot h_B$$

Si en la ecuación anterior, tenemos en cuenta que $h_A = 0$, y que en las condiciones descritas en el enunciado $v_A \approx 0$, sólo necesitamos despejar v_B, para obtener el siguiente resultado:

$$\boxed{v_B = \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot (P_A - P_B) - 2gh_B}}$$

Si analizamos el resultado literal obtenido, vemos que, en primer lugar, es dimensionalmente homogéneo (L/T) en ambos lados de la ecuación. También podemos ver que se cumplen todas las hipótesis, ya que a igualdad de los restantes factores:

a) Cuanto mayor sea la diferencia de presiones, mayor será la rapidez de salida
b) Los líquidos más densos (y, por tanto, más pesados), salen (siempre a igualdad de los restantes factores), con menor rapidez que los menos densos.
c) Cuanto menor sea la altura a ascender por el líquido, mayor será la rapidez con que sale.

Sustituyendo ahora los valores numéricos, en unidades internacionales:

$$v_B = \sqrt{\frac{2}{10^3} \cdot (1'4 - 1) \cdot 1'013 \cdot 10^5 - 2 \cdot 9'81 \cdot 0'16} \;\rightarrow\; v_B = 8'8 \text{ m/s}$$

El resultado literal obtenido, también permite plantear nuevos interrogantes de interés, como, por ejemplo:

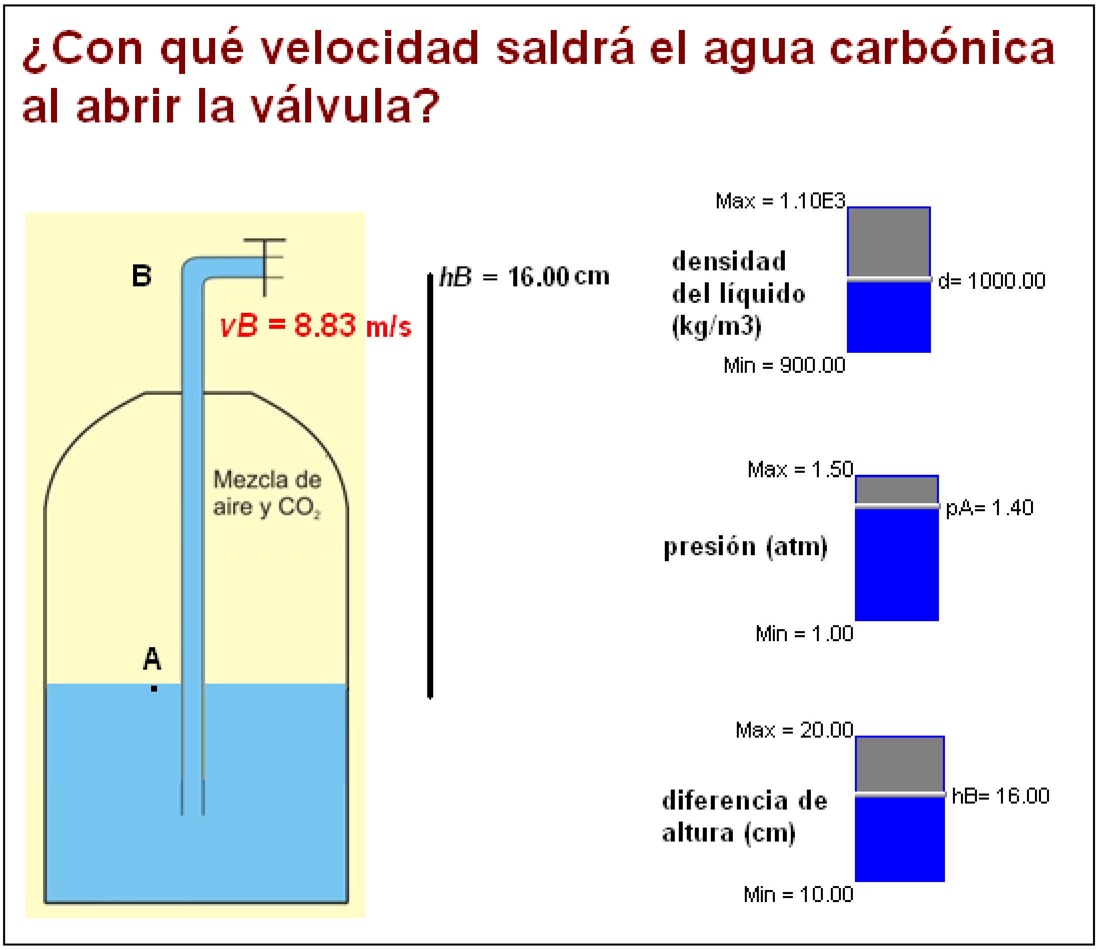
¿Cuál será el valor límite o máximo (para un líquido dado y una diferencia de presiones dada), que puede tener h_B para el cual $v_B = 0$?

Para responder, basta con igualar los términos que aparecen restando en el resultado literal obtenido, con lo que:

$$\frac{2}{\rho} \cdot (P_A - P_B) = 2gh_{B\max} \rightarrow h_{B\max} = \frac{P_A - P_B}{\rho \cdot g}$$

Sustituyendo: $h_{B\max} = \dfrac{(1'4-1) \cdot 1'013 \cdot 10^5}{10^3 \cdot 9'81} = 4\ m$

Finalmente, los alumnos pueden reforzar este problema manipulando una animación interactiva *Modellus* en la que disponen de tres cursores manuales para poder modificar la diferencia de presión entre A y B, la altura que asciende la bebida, y la densidad del líquido, comprobando cómo afectan dichas modificaciones al resultado. La figura adjunta muestra el aspecto de la animación cuando los valores de las magnitudes coinciden con los que hemos utilizado en esta resolución.



La animación y el programa necesario para hacerla correr están disponibles en la Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física de la Sección Local de Alicante de la RSEF http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm.