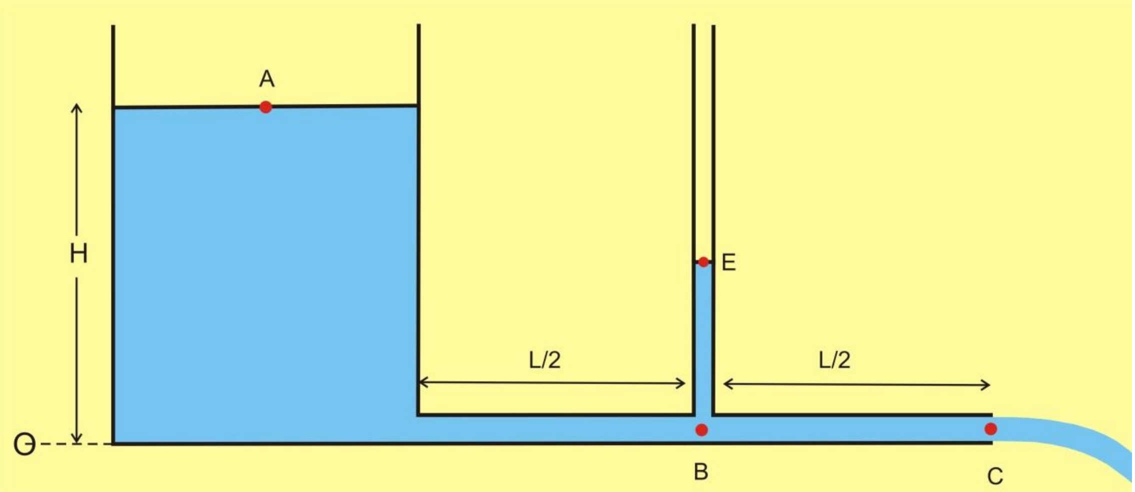
Dada la situación de la figura, en la que la sección del depósito es mucho mayor que la de la conducción, determinad:



a) Pérdida de presión que se produce en la conducción, utilizando la expresión de Darcy-Weisbach:

$$P_f = f \cdot \frac{\rho L v^2}{2D}$$

b) Altura del agua en el tubo vertical.

Datos: P_{atm} = 1'013·10^5 N/m^2, diámetro de la conducción D = 12 mm, densidad del líquido (agua) ρ = 10^3 kg/m^3, H = 10 m, L = 12 m, f = 0'05.

a) Para determinar P_f con la expresión de Darcy-Weisbach (dada en el enunciado), necesitamos conocer previamente la velocidad con la que circula el líquido en la conducción, la cual podemos obtener aplicando Bernoulli con pérdidas, entre los puntos A y C:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 + \rho g h_A = P_C + \frac{1}{2}\rho \cdot v_C^2 + \rho g h_C + P_f$$

Teniendo en cuenta que $P_A = P_C = P_{atm}$, $h_C = 0$, $v_C = v$ (la misma en cualquier punto de la tubería horizontal) y que, al ser la sección del depósito mucho mayor que la de la conducción, podremos despreciar v_A (como ya se justificó en problemas anteriores), la expresión anterior queda como:

$$P_{atm} + \rho g H = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + \mathrm{f} \cdot \frac{\rho L v^2}{2D}$$

Y despejando:

$$v = \sqrt{\frac{gH}{\frac{1}{2} + f \cdot \frac{L}{2D}}} \rightarrow v = \sqrt{\frac{9'8 \cdot 10}{\frac{1}{2} + 0'05 \cdot \frac{12}{2 \cdot 0'012}}} \rightarrow v = 1'96 m/s$$

Sustituyendo ahora en la expresión de Darcy-Weisbach:

$$P_f = f \cdot \frac{\rho L v^2}{2D} = 0'05 \cdot \frac{10^3 \cdot 12 \cdot 1'96^2}{2 \cdot 0'012} = 9'6 \cdot 10^4 \ \frac{N}{m^2} = 0'95 \text{ atm}$$

b) En cuanto a la altura "h" del agua en el tubo vertical, sabemos que está relacionada con la presión existente en el punto B mediante la ecuación fundamental de la hidrostática, por lo que, para determinarla, bastará con aplicar esta ecuación entre los puntos B y E

$$P_B = P_E + \rho g h \quad \rightarrow \quad h = \frac{P_B - P_{atm}}{\rho g} \quad (1)$$

En la ecuación anterior, se ha tenido en cuenta que $P_E = P_{atm}$

Necesitamos conocer P_B. Para ello aplicaremos Bernoulli entre A y B:

$$P_A + \rho g h = P_B + \frac{1}{2}\rho v^2 + P_{fB}$$

Como $P_{fB} = P_f/2$, tendremos que: $P_B = P_{atm} + \rho g H - \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 - \frac{P_f}{2}$

En la ecuación anterior todo es conocido. Sustituyendo P_B en la ecuación (1):

$$h = \frac{\rho g H - \frac{1}{2}\rho v^2 - \frac{P_f}{2}}{\rho g}$$

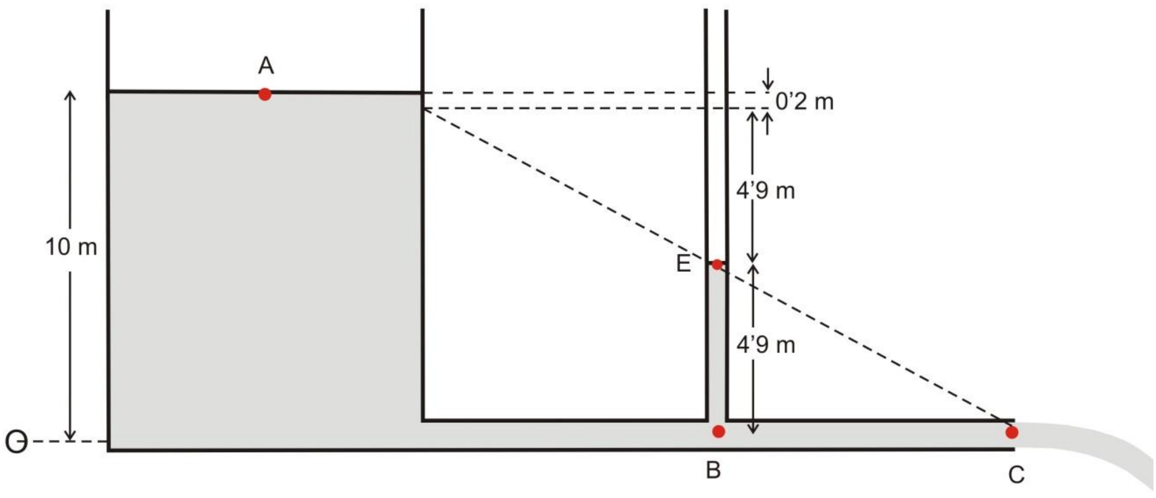
Finalmente, sustituyendo v, P_f y simplificando, obtenemos que:

$$h = H \cdot \left(1 - \frac{1 + f \cdot \frac{L}{2D}}{1 + 2f \cdot \frac{L}{2D}} \right)$$

Analizando la expresión obtenida, concluimos que h podrá tomar cualquier valor comprendido entre 0 y 0'5H. En efecto: cuanto menor sea fL/2D respecto de 1, tanto más próximo estará h del valor 0; mientras que cuanto mayor sea el valor de fL/2D respecto de 1, tanto más próximo estará h de 0'5 H.

Sustituyendo valores numéricos: $h = 10 \cdot \left(1 - \frac{1+25}{1+50} \right)$ = 4'90 m

El resultado obtenido en este ejercicio, queda reflejado en la figura siguiente (no a escala):

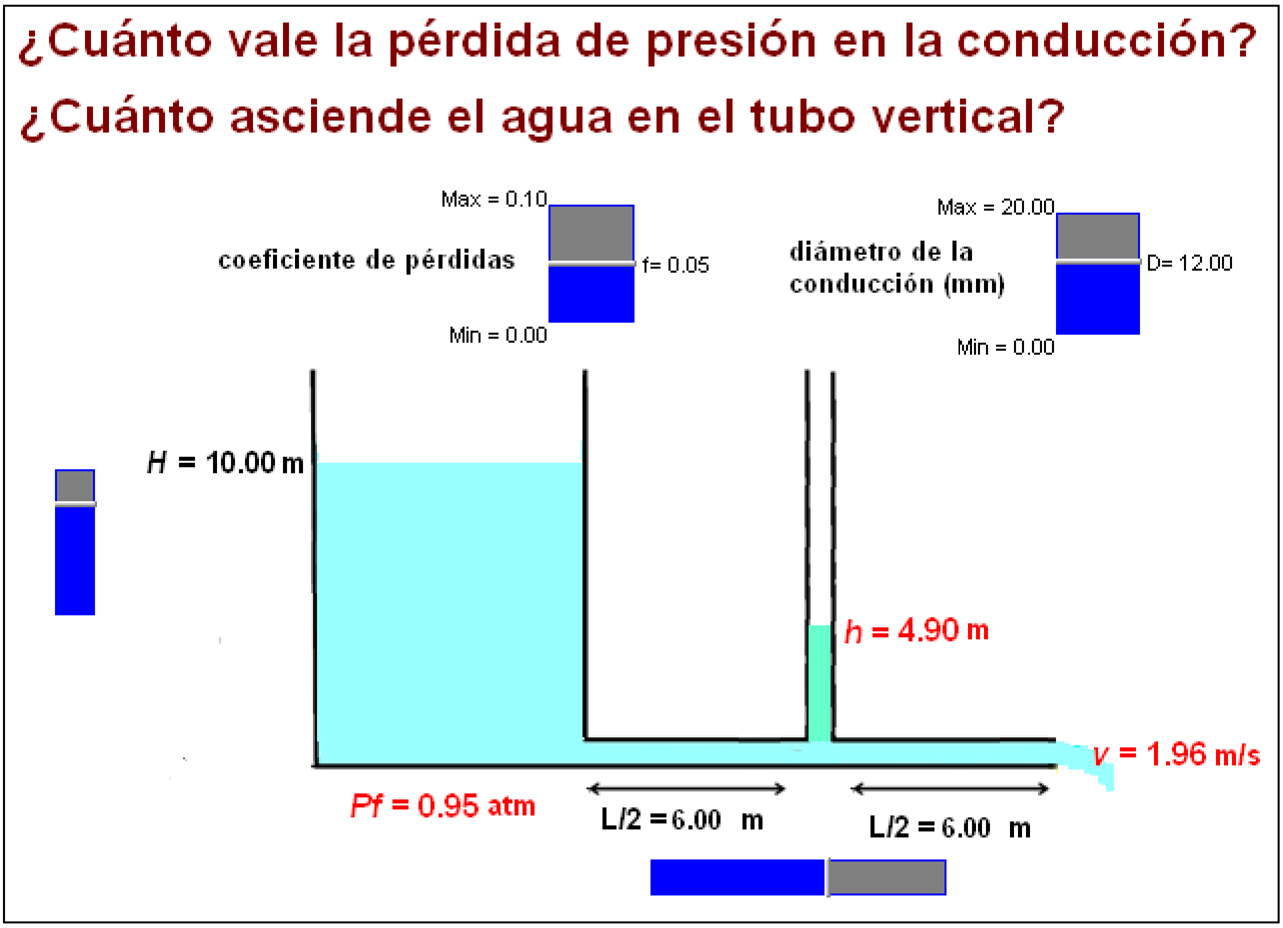


En la figura podemos ver que:

10 m = 0'2 m + 4'9 m + 4'9 m

Donde 0'2 m es la altura cinética ($v^2/2g$) mientras que los otros dos sumandos iguales, uno corresponde a la altura de pérdida de carga (parte del tubo vertical donde no hay agua) y el otro (donde sí hay agua) es altura de presión.

Para reforzar este problema hemos elaborado una animación *Modellus*, que representa la situación y calcula la altura del agua en el tubo vertical, la pérdida de carga en la conducción y la velocidad con la que sale el agua. En la pantalla hemos colocado varios controladores manuales para que los alumnos puedan modificar el valor de la altura del agua en la zona ancha de la conducción, H, los de la longitud, L, y el diámetro, D, del tubo, y el del coeficiente de pérdidas, f. Manipulando estos controladores, los estudiantes pueden poner a prueba hipótesis y constatar casos límite, como los que hemos comentado un poco más arriba.



La animación y el programa necesario para hacerla correr están disponibles en la Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física de la Sección Local de Alicante de la RSEF: http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm