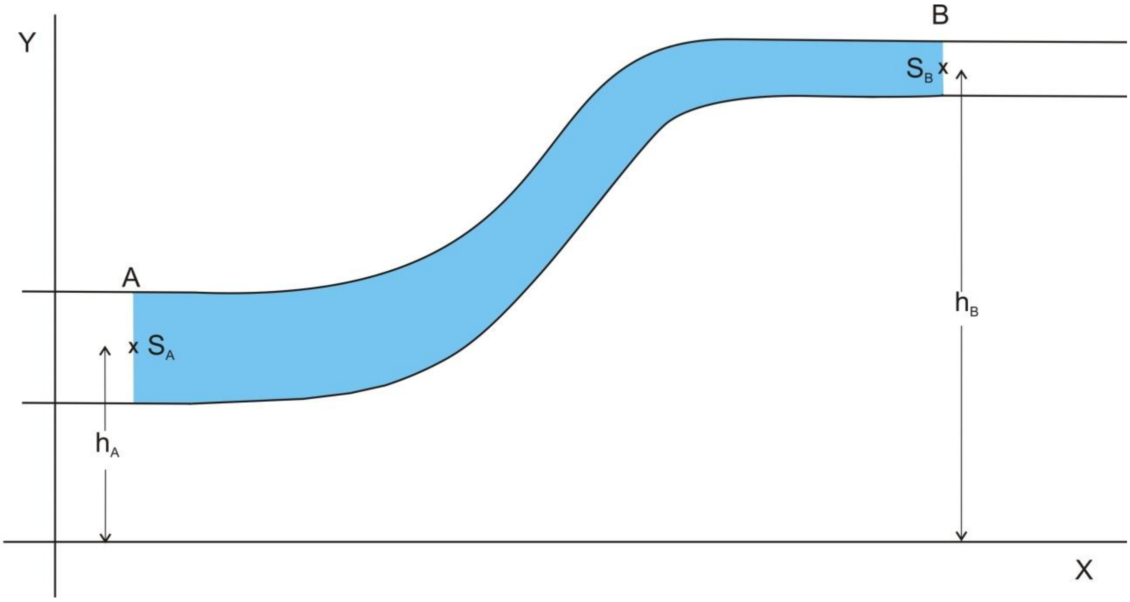
HIDRODINÁMICA: LÍQUIDOS EN MOVIMIENTO

Salvador Martínez Sala. Jaime Carrascosa Alís. Manuel Alonso Sánchez

Hace ya muchos años que, de forma experimental, se pudo establecer que cuando una tubería por la que circula un fluido (como, por ejemplo, agua) se estrecha, la rapidez con que circula dicho fluido aumenta, mientras que la presión disminuye (y al contrario cuando la tubería se ensancha). Estos hechos tienen un gran interés, dadas sus consecuencias en campos muy variados, que van desde la circulación sanguínea a la sustentación de los aviones en vuelo. La búsqueda de explicaciones teóricas a los mismos, condujo a dos expresiones de gran importancia en hidrodinámica: La llamada *Ecuación de Continuidad*, en la que se establece una relación general entre la sección de la conducción por la que circula un fluido y la rapidez con que este se desplaza, y el *Teorema de Bernoulli* en el que se establece una relación entre presión, velocidad y altura en los distintos puntos de una conducción. En la siguiente cuestión, nos plantearemos la obtención de dichas expresiones, las cuales utilizaremos reiteradamente en los restantes ejercicios.

1. La figura adjunta representa parte de una tubería por la que circula un fluido ideal (incompresible y sin viscosidad), en la que se produce un estrechamiento. Suponiendo que el régimen sea estacionario[1], obtened la relación existente entre:



a) La sección "S" de la tubería y la rapidez "v" del fluido
b) La presión "P" ejercida por el fluido y la rapidez con que este circula

[1] Se considera régimen estacionario cuando la velocidad del fluido en un punto cualquiera de su recorrido sea constante (aunque pueda no ser la misma en distintos puntos).

Lo que se pretende en el primer apartado de esta cuestión, es averiguar qué tipo de relación existe entre la rapidez con la que se desplaza un fluido por una tubería y la sección de la misma, en distintos puntos del recorrido.

Una posible estrategia será buscar algo que permanezca constante durante el movimiento del fluido a lo largo de una tubería en la que la sección de la misma varíe de alguna forma. A este respecto, no cabe duda de que si no hay aportaciones extra ni se produce ninguna pérdida en el tramo considerado, al tratarse de un fluido incompresible (la mayoría de los líquidos se pueden considerar aproximadamente como tales), si consideramos como sistema el fluido comprendido entre las secciones de los puntos A y B en un instante determinado, al cabo de un cierto tiempo (Δt) dicho sistema se habrá desplazado ocupando el volumen delimitado por las secciones que contienen a los puntos A' y B' (ved figura 1 siguiente) y, en esas condiciones, deberá cumplirse que la masa de fluido entre A y A' ha de ser exactamente igual a la masa de fluido existente entre B y B'.

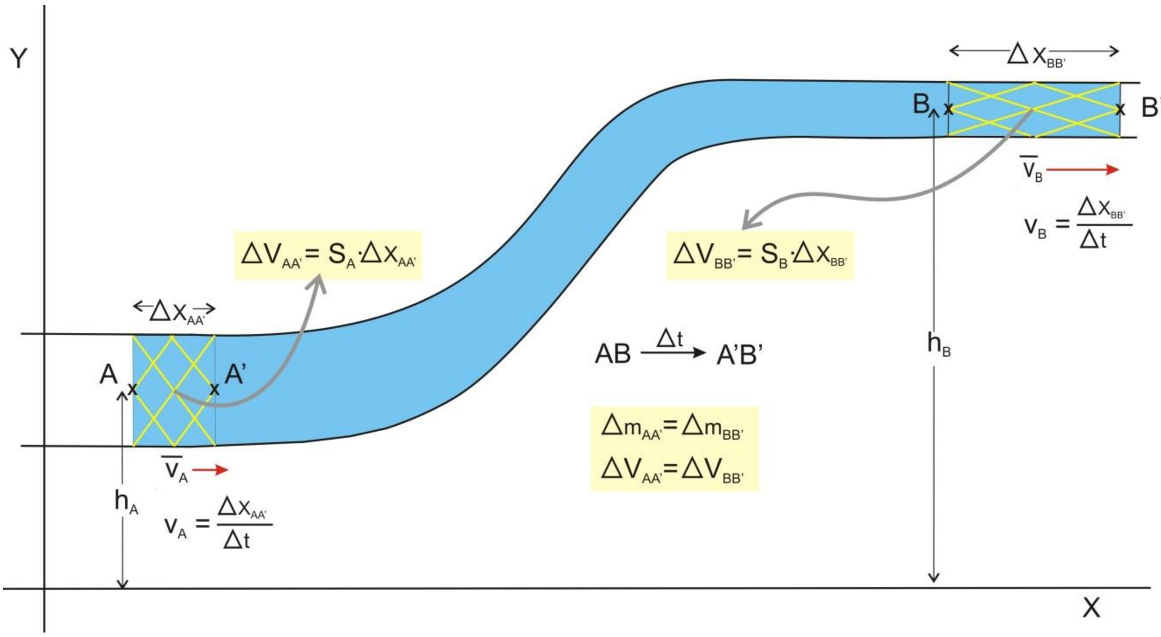


Figura 1

La conclusión anterior, se puede expresar como:

$$\Delta m_{AA'} = \Delta m_{BB'} \rightarrow \rho \cdot \Delta V_{AA'} = \rho \cdot \Delta V_{BB'} \rightarrow \Delta V_{AA'} = \Delta V_{BB'} \rightarrow S_A \cdot \Delta x_{AA'} = S_B \cdot \Delta x_{BB'}$$

En las expresiones anteriores, ΔV es el volumen ocupado por cada masa, ρ la densidad del fluido (constante al ser incompresible), S la sección del tubo y Δx la longitud correspondiente a cada caso.

Por otra parte, debe cumplirse:

$$\Delta x_{AA'} = v_A \cdot \Delta t$$
$$\Delta x_{BB'} = v_B \cdot \Delta t$$

Y sustituyendo en la ecuación anterior:

$$S_A \cdot \Delta x_{AA'} = S_B \cdot \Delta x_{BB'} \;\rightarrow\; S_A \cdot v_A \cdot \Delta t = S_B \cdot v_B \cdot \Delta t \;\rightarrow\; S_A \cdot v_A = S_B \cdot v_B \quad (1)$$

La expresión (1) obtenida se conoce como: Ecuación de Continuidad (establecida por Leonardo Da Vinci).

El producto de la sección del tubo por la rapidez con la que se mueve el fluido (S·v), representa el volumen de fluido que circula por unidad de tiempo (lo que se conoce como *caudal* o *gasto*), por lo que la ecuación de continuidad, lo que establece es que:

En toda conducción, sin fuentes ni sumideros, el volumen de fluido que atraviesa cualquier sección por unidad de tiempo, es el mismo.

Y, como consecuencia:

Allí donde la sección sea menor (por ejemplo, donde una tubería se estreche), la rapidez con que se circula el fluido será mayor (y viceversa).

En cuanto a la segunda pregunta, en este caso, se trata de buscar una relación entre la presión "P" en el interior del fluido que circula por un conducto y la rapidez a la que lo hace:

Al igual que anteriormente, supondremos que el movimiento es en régimen estacionario, el fluido incompresible y su viscosidad es lo bastante pequeña como para que podamos ignorarla. Puesto que se trata de una situación dinámica donde intervienen magnitudes como fuerza (debida a la presión) a lo largo de una trayectoria determinada y velocidad, podemos intentar encontrar la relación que buscamos mediante consideraciones de trabajo y energía.

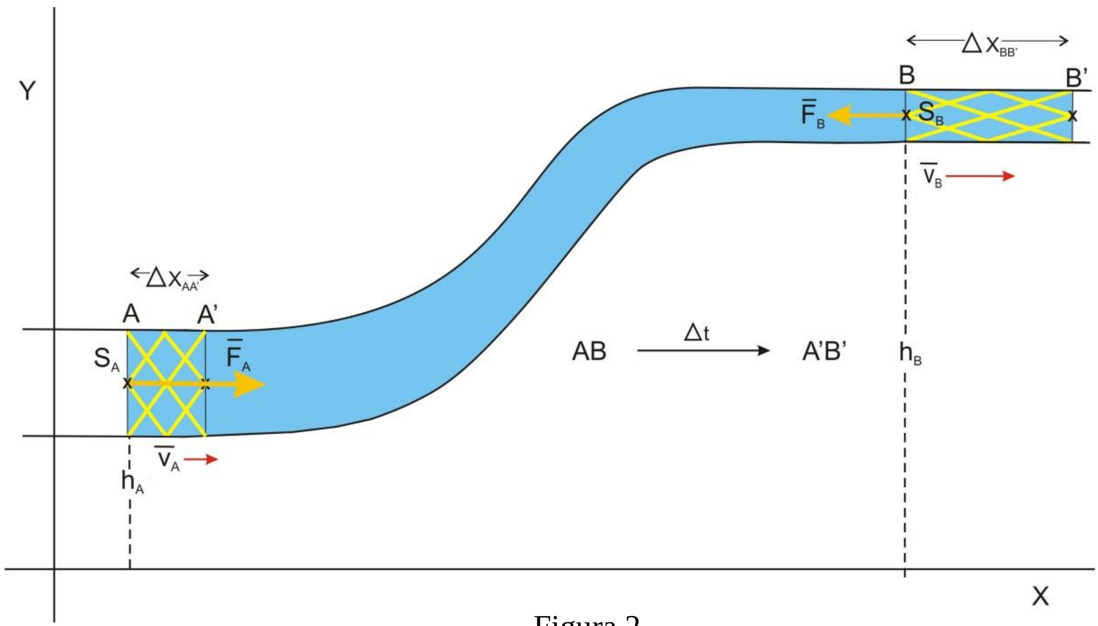


Figura 2

Considerando la misma situación inicial (mismo sistema, igual intervalo de tiempo, etc.) que anteriormente, vemos que al despreciar la viscosidad (y, por tanto, los rozamientos), las únicas fuerzas que actúan sobre el sistema son:

$\vec{F}_A$ = Fuerza que el resto del fluido, debido a la presión, ejerce sobre la sección en el punto A

$\vec{F}_B$ = Fuerza que el resto del fluido, debido a la presión, ejerce sobre la sección en el punto B

$\vec{F}_{peso}$ = Fuerza gravitatoria con que la Tierra atrae al sistema (no representada).

Aplicando el *teorema de las fuerzas vivas* al sistema, a lo largo del desplazamiento experimentado durante el intervalo de tiempo Δt, tendremos que:

$$W_{res} = \Delta Ec \longrightarrow \quad F_A \cdot \Delta x_{AA'} - F_B \cdot \Delta x_{BB'} + W_{peso} = \Delta E_c \quad (2)$$

La fuerza F_A actúa sobre el sistema en el sentido del desplazamiento, realizando un trabajo positivo, dado por: $F_A \cdot \Delta x_{AA'}$. Dicho trabajo, se puede expresar en función de la presión como: $P_A \cdot S_A \cdot \Delta x_{AA'}$

La fuerza F_B, al actuar en sentido contrario al desplazamiento, realiza un trabajo negativo, dado por: $-F_B \cdot S_B \cdot \Delta x_{BB'}$, y expresado en función de la presión: $-P_B \cdot S_B \cdot \Delta x_{BB'}$

Para la determinación del W_{peso} y del ΔE_c, descompondremos el sistema considerado en dos volúmenes: el comprendido entre A y A' y el comprendido entre A' y B. De este modo, todo sucede como si en el intervalo Δt, el volumen de fluido comprendido entre A y A' se hubiera desplazado hasta ocupar el espacio comprendido entre B y B', mientras que el fluido comprendido entre A' y B no habría sufrido modificación alguna. El efecto resultante es, pues, mover una masa determinada de fluido ($\Delta m_{AA'} = \Delta m_{BB'}$) desde A hasta B, con lo que:

$$W_{peso} = -\Delta E_p = -(\Delta m_{BB'} \cdot g \cdot h_B - \Delta m_{AA'} \cdot g \cdot h_A) = \rho \cdot S_A \cdot \Delta x_{AA} \cdot g \cdot h_A - \rho \cdot S_B \cdot \Delta x_{BB} \cdot g \cdot h_B$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}\Delta m_{BB'} \cdot v_B^2 - \frac{1}{2}\Delta m_{AA'} \cdot v_A^2 = \frac{1}{2}\rho \cdot S_B \cdot \Delta x_{BB'} \cdot v_B^2 - \frac{1}{2}\rho \cdot S_A \cdot \Delta x_{AA'} \cdot v_A^2$$

Sustituyendo todas las expresiones en (2) y agrupando, se obtiene:

$$S_A \cdot \Delta x_{AA'} \cdot \left(p_A + \frac{1}{2}\rho \cdot g \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot h_A \right) = S_B \cdot \Delta x_{BB'} \cdot \left(p_B + \frac{1}{2}\rho \cdot g \cdot v_B^2 + \rho \cdot g \cdot h_B \right) \quad (3)$$

Ya hemos visto anteriormente que: $S_A \cdot \Delta x_{AA'} = S_B \cdot \Delta x_{BB'}$

Teniendo en cuenta la igualdad anterior, podemos simplificar en (3) y nos queda:

$$p_A + \frac{1}{2}\rho \cdot g \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot h_A = p_B + \frac{1}{2}\rho \cdot g \cdot v_B^2 + \rho \cdot g \cdot h_B \quad (4)$$

Como se puede comprobar, todos los sumandos de la igualdad (4) anterior, son presiones (se les conoce como presión estática, cinética y geométrica, respectivamente). Dicha igualdad es la Ecuación de Bernoulli, en la cual se establece que:

En cualquier conducción por la que circula un fluido ideal en régimen estacionario, se cumple que la suma de las presiones estática, cinética y geométrica, tiene el mismo valor en todos los puntos de la conducción.

Fijémonos en que la conclusión anterior implica que, si la altura no cambia, todo aumento de v debe ir acompañado de una disminución en el valor de la presión, tal que la suma anterior siga valiendo lo mismo. Esto explica muchos fenómenos que ocurren en la vida cotidiana. Por ejemplo, el aire asciende por una chimenea en la que se ha encendido el fuego, no solo porque está más caliente que el aire exterior y es menos denso sino, también, porque el viento en la parte superior hace que la presión en esa zona sea menor que en el interior de la casa (más velocidad → menos presión). El Teorema de Bernoulli, también contribuye a explicar (en parte) la sustentación de los aviones. En efecto, en los aviones, la forma de las alas (ved figura 3, siguiente) hace que el trayecto recorrido en el mismo tiempo por las líneas de corriente del aire obtenidas al adoptar el ala como sistema de referencia (por tanto, en reposo), sea mayor en la parte de arriba de las mismas (curvada) que en la parte de bajo (plana). En consecuencia, la velocidad de dichas corrientes deberá ser mayor arriba que abajo. De acuerdo con el principio de Bernoulli, esto implica que la presión P_B sobre la parte inferior de las alas y, consecuentemente, la fuerza F_B debida a ella, tengan valores mayores que la presión P_A y la fuerza F_A que actúan sobre la parte superior de las mismas. Se obtiene así una fuerza resultante (*fuerza de sustentación*) hacia arriba, sobre cada ala (no representada en la figura).

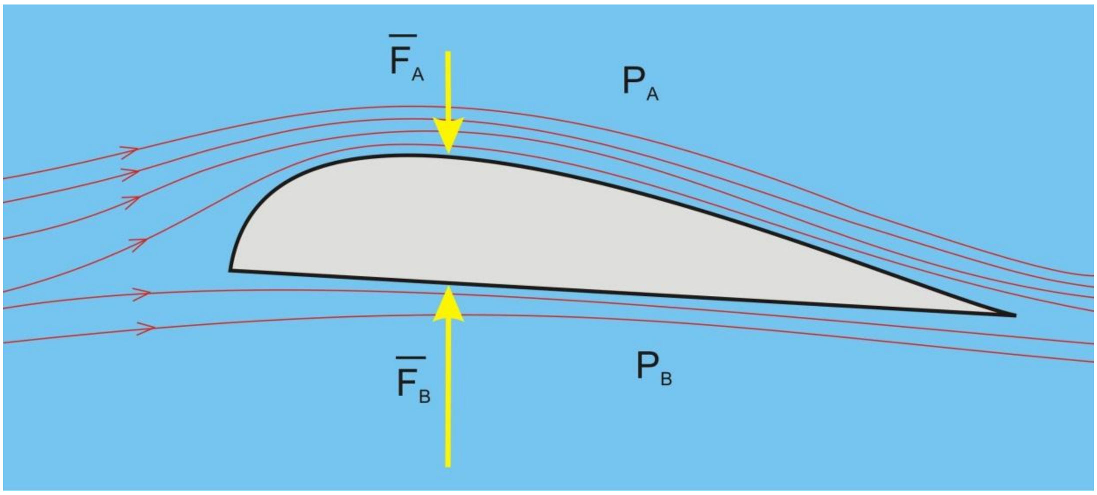
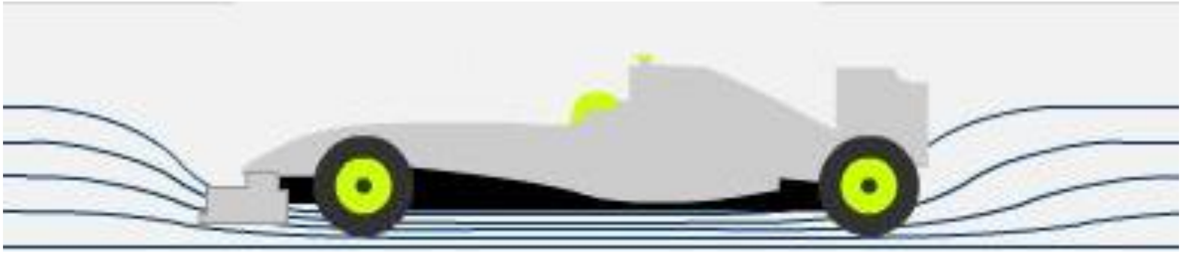


Figura 3

En el automovilismo el mismo efecto se aprovecha en sentido contrario. En efecto, los vehículos de carreras se diseñan para enviar la mayor parte del aire contra el que chocan por debajo de ellos. Así se obtiene una fuerza resultante vertical y descendente sobre el vehículo, mejorando su estabilidad sobre la pista.



Como ya hemos indicado, a los sumandos presentes en la ecuación de Bernoulli, se les conoce como *presión estática, presión cinética* y *presión geométrica* respectivamente (todos ellos son presiones). No obstante, la ecuación (4) es el resultado de dividir la ecuación (3), en la que todos los sumandos son energías, por un volumen (dado por S·Δx). Por tanto, los sumandos de la ecuación de Bernoulli también representan *energías por unidad de volumen* y así podríamos hablar de energías por unidad de volumen debidas a dichas presiones.

Otra forma habitual de expresar la ecuación de Bernoulli es la que resulta de dividir dicha ecuación por el producto ρ·g:

$$\frac{p_A}{\rho \cdot g} + \frac{1}{2}\frac{v_A^2}{g} + h_A = \frac{p_B}{\rho \cdot g} + \frac{1}{2}\frac{v_B^2}{g} + h_B \quad (5)$$

Como se puede comprobar, ahora todos los sumandos tienen dimensiones de longitud, de modo que se les conoce como *alturas o cargas*, respectivamente de *presión estática, cinética y geométrica* y, aunque en el sistema internacional la unidad es el metro, en ingeniería hidráulica se le denomina "m.c.a" (metro columna de agua).

Finalmente, señalar que los sumandos de la ecuación de Bernoulli expresada mediante la ecuación 5, representan, también, *energía por unidad de peso* (al haber dividido energía por unidad de volumen, por ρ·g).

Podemos, ahora, ir un poco más allá y plantearnos:

¿Cómo se modifica la ecuación de Bernoulli para poder aplicarla a un fluido real?

Para responder la pregunta anterior, es preciso tener en cuenta que los fluidos reales presentan viscosidad. Ello implica que tienen un determinado rozamiento interno, existiendo fuerza de rozamiento entre las diferentes capas de fluido que se mueven unas respecto de otras[2]. En los líquidos esto se produce principalmente debido a fuerzas de cohesión entre moléculas y en los gases a fuerzas de colisión. Además, también existe rozamiento entre el fluido y las paredes del conducto por el que circula. Como es lógico, estas fuerzas de fricción realizan un trabajo (negativo) que se traduce en una pérdida de energía mecánica, lo que modifica la ecuación (4) anterior, en la forma:

[2] Ese rozamiento interno hace que las distintas capas del fluido se muevan con diferente rapidez. En este caso, v_A y v_B representan la rapidez media en cada sección recta (S_A y S_B).

$$p_A + \frac{1}{2}\rho \cdot g \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot h_A = p_B + \frac{1}{2}\rho \cdot g \cdot v_B^2 + \rho \cdot g \cdot h_B + p_f \quad \text{(4-b)}$$

En esta ecuación (4-b), el término "p_f" representa la energía por unidad de volumen perdida en el desplazamiento entre A y B. Este sumando tiene unidades de presión y recibe el nombre de *pérdida de carga* o *pérdida de presión* debida a la fricción.

La expresión (5), se ve afectada por la existencia de fricción, en la forma:

$$\frac{p_A}{\rho \cdot g} + \frac{1}{2}\frac{v_A^2}{g} + h_A = \frac{p_B}{\rho \cdot g} + \frac{1}{2}\frac{v_B^2}{g} + h_B + h_f \quad \text{(5-b)}$$

En esta ecuación (5-b), el sumando h_f representa la energía por unidad de peso perdida en el desplazamiento entre A y B. Tiene dimensiones de longitud y recibe el nombre de *pérdida de carga* o *pérdida de altura,* debida a la fricción.

Para el cálculo de la pérdida de carga debida a la fricción dentro de una tubería llena, existen distintas expresiones obtenidas empíricamente. La más utilizada es la de Darcy-Weisbach, según la cual:

$$h_f = f \cdot \frac{L \cdot v^2}{2Dg}$$

En la ecuación anterior, f es un factor de fricción (que depende de las características de la conducción y naturaleza del fluido), L es la longitud de la conducción, v es la rapidez con que se desplaza el fluido, D el diámetro de la conducción y g la intensidad del campo gravitatorio.

La fórmula de Darcy-Weisbach tiene la ventaja, con respecto a otras ecuaciones empíricas, de ser aplicable a los diversos tipos de flujo hidráulico que pueden darse (laminar, transicional, turbulento), debiendo el factor de fricción, f, tomar los valores adecuados, según corresponda.

En los problemas que siguen, tendremos ocasión de manejar reiteradamente los conceptos y expresiones introducidas en este, en distintas situaciones prácticas.