PROBLEMAS DE FÍSICA

HIDRODINÁMICA

didacticafisicaquimica.es

JAIME CARRASCOSA – SALVADOR MARTÍNEZ – MANUEL ALONSO

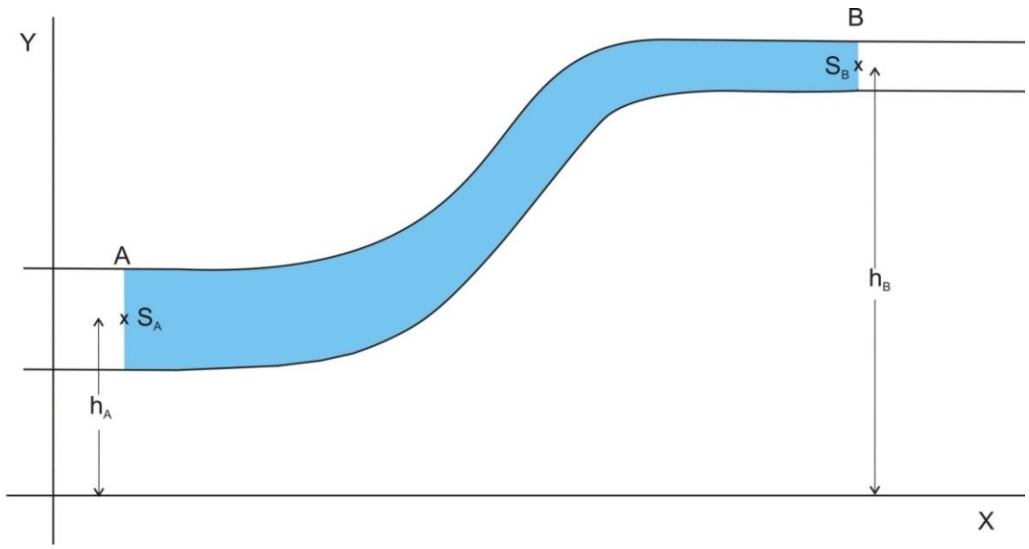
16. HIDRODINÁMICA: LÍQUIDOS EN MOVIMIENTO

Capítulo 16 del libro "Problemas de Física", el cual, junto con otros materiales de Física y Química y de Didáctica de las Ciencias Experimentales, se puede descargar libremente desde la página web: didacticafisicaquimica.es (siempre citando a los autores).

Salvador Martínez Sala. Jaime Carrascosa Alís. (Durante Pandemia 2020)

Hace ya muchos años que, de forma experimental, se pudo establecer que cuando una tubería por la que circula un fluido (como, por ejemplo, agua) se estrecha, la rapidez con que circula dicho fluido aumenta, mientras que la presión disminuye (y al contrario cuando la tubería se ensancha). Estos hechos tienen un gran interés, dadas sus consecuencias en campos muy variados, que van desde la circulación sanguínea a la sustentación de los aviones en vuelo. La búsqueda de explicaciones teóricas a los mismos, condujo a dos expresiones de gran importancia en hidrodinámica: La llamada *Ecuación de Continuidad*, en la que se establece una relación general entre la sección de la conducción por la que circula un fluido y la rapidez con que este se desplaza, y el *Teorema de Bernoulli* en el que se establece una relación entre presión, velocidad y altura en los distintos puntos de una conducción. En la siguiente cuestión, nos plantearemos la obtención de dichas expresiones, las cuales utilizaremos reiteradamente en los restantes ejercicios del capítulo.

1. La figura adjunta representa parte de una tubería por la que circula un fluido ideal (incompresible y sin viscosidad), en la que se produce un estrechamiento. Suponiendo que el régimen sea estacionario[1], obtened la relación existente entre:



a) La sección "S" de la tubería y la rapidez "v" del fluido
b) La presión "P" ejercida por el fluido y la rapidez con que este circula

[1] Se considera régimen estacionario cuando la velocidad del fluido en un punto cualquiera de su recorrido sea constante (aunque pueda no ser la misma en distintos puntos).

Lo que se pretende en el primer apartado de esta cuestión, es averiguar qué tipo de relación existe entre la rapidez con la que se desplaza un fluido por una tubería y la sección de la misma, en distintos puntos del recorrido.

Una posible estrategia será buscar algo que permanezca constante durante el movimiento del fluido a lo largo de una tubería en la que la sección de la misma varíe de alguna forma. A este respecto, no cabe duda de que si no hay aportaciones extra ni se produce ninguna pérdida en el tramo considerado, al tratarse de un fluido incompresible (la mayoría de los líquidos se pueden considerar aproximadamente como tales), si consideramos como sistema el fluido comprendido entre las secciones de los puntos A y B en un instante determinado, al cabo de un cierto tiempo (Δt) dicho sistema se habrá desplazado ocupando el volumen delimitado por las secciones que contienen a los puntos A’ y B’ (ved figura 1 siguiente) y, en esas condiciones, deberá cumplirse que la masa de fluido entre A y A’ ha de ser exactamente igual a la masa de fluido existente entre B y B’.

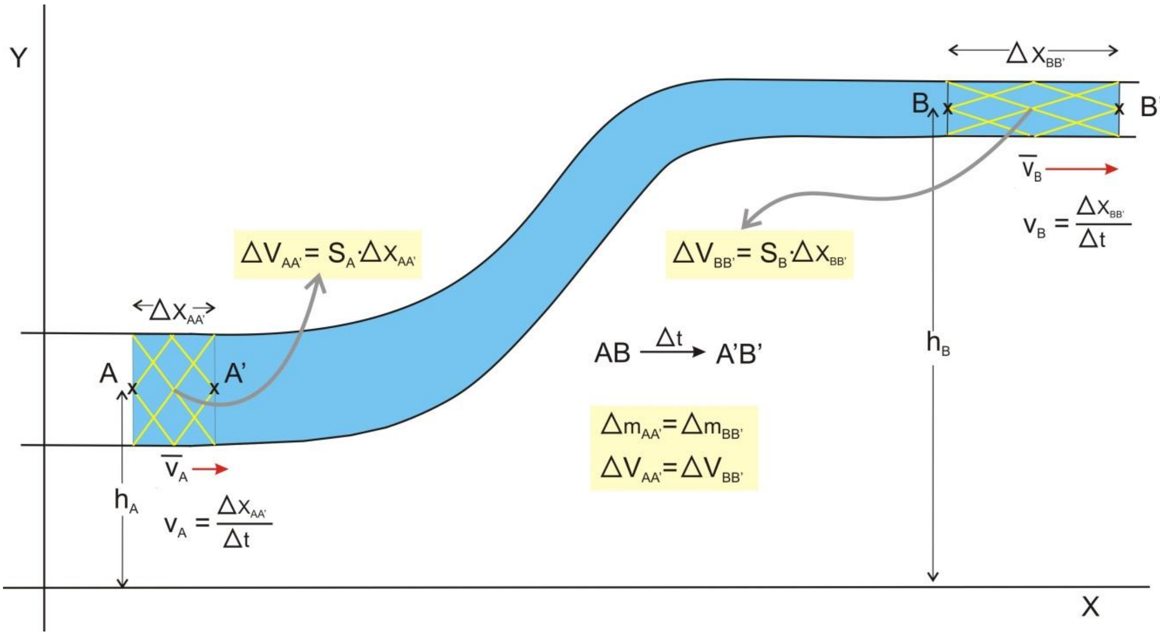


Figura 1

La conclusión anterior, se puede expresar como:

$$\Delta m_{AA'} = \Delta m_{BB'} \rightarrow \rho \cdot \Delta V_{AA'} = \rho \cdot \Delta V_{BB'} \rightarrow \Delta V_{AA'} = \Delta V_{BB'} \rightarrow S_A \cdot \Delta x_{AA'} = S_B \cdot \Delta x_{BB'}$$

En las expresiones anteriores, ΔV es el volumen ocupado por cada masa, ρ la densidad del fluido (constante al ser incompresible), S la sección del tubo y Δx la longitud correspondiente a cada caso.

Por otra parte, debe cumplirse:

$$\Delta x_{AA'} = v_A \cdot \Delta t$$

$$\Delta x_{BB'} = v_B \cdot \Delta t$$

Y sustituyendo en la ecuación anterior:

$$S_A \cdot \Delta x_{AA'} = S_B \cdot \Delta x_{BB'} \;\rightarrow\; S_A \cdot v_A \cdot \Delta t = S_B \cdot v_B \cdot \Delta t \;\rightarrow\; S_A \cdot v_A = S_B \cdot v_B \quad (1)$$

La expresión (1) obtenida se conoce como: Ecuación de Continuidad (establecida por Leonardo Da Vinci).

El producto de la sección del tubo por la rapidez con la que se mueve el fluido (S·v), representa el volumen de fluido que circula por unidad de tiempo (lo que se conoce como *caudal* o *gasto*), por lo que la ecuación de continuidad, lo que establece es que:

En toda conducción, sin fuentes ni sumideros, el volumen de fluido que atraviesa cualquier sección por unidad de tiempo, es el mismo.

Y, como consecuencia:

Allí donde la sección sea menor (por ejemplo, donde una tubería se estreche), la rapidez con que se circula el fluido será mayor (y viceversa).

En cuanto a la segunda pregunta, en este caso, se trata de buscar una relación entre la presión "P" en el interior del fluido que circula por un conducto y la rapidez a la que lo hace:

Al igual que anteriormente, supondremos que el movimiento es en régimen estacionario, el fluido incompresible y su viscosidad es lo bastante pequeña como para que podamos ignorarla. Puesto que se trata de una situación dinámica donde intervienen magnitudes como fuerza (debida a la presión) a lo largo de una trayectoria determinada y velocidad, podemos intentar encontrar la relación que buscamos mediante consideraciones de trabajo y energía.

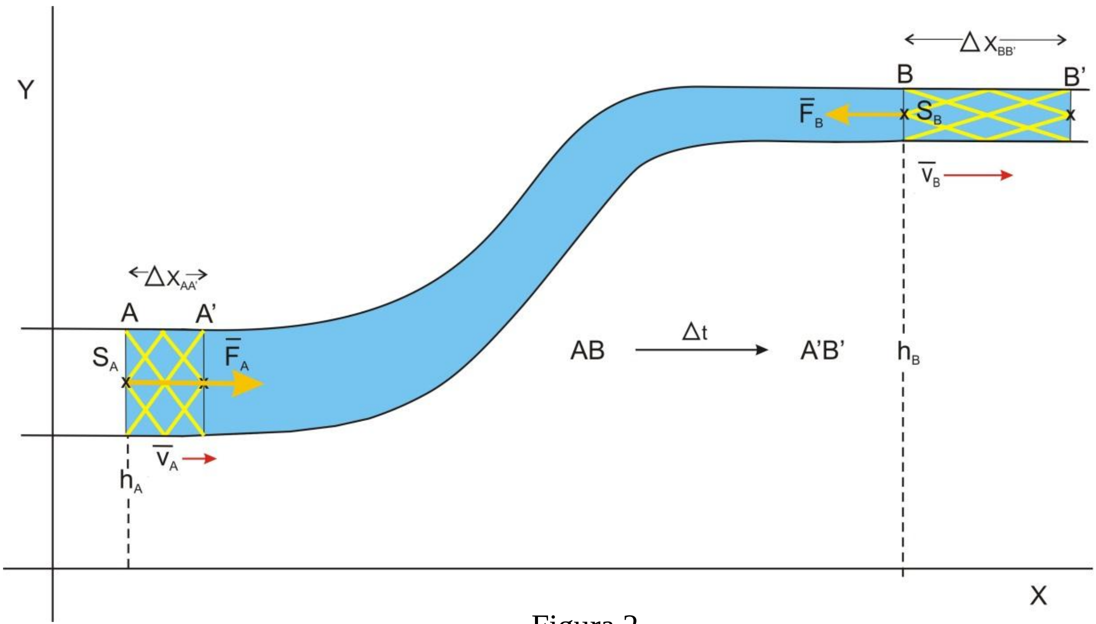


Figura 2

Considerando la misma situación inicial (mismo sistema, igual intervalo de tiempo, etc.) que anteriormente, vemos que al despreciar la viscosidad (y, por tanto, los rozamientos), las únicas fuerzas que actúan sobre el sistema son:

$\vec{F}_A$ = Fuerza que el resto del fluido, debido a la presión, ejerce sobre la sección en el punto A
$\vec{F}_B$ = Fuerza que el resto del fluido, debido a la presión, ejerce sobre la sección en el punto B
$\vec{F}_{peso}$ = Fuerza gravitatoria con que la Tierra atrae al sistema (no representada).

Aplicando el *teorema de las fuerzas vivas* al sistema, a lo largo del desplazamiento experimentado durante el intervalo de tiempo Δt, tendremos que:

$$W_{res} = \Delta Ec \;\longrightarrow\; F_A \cdot \Delta x_{AA'} - F_B \cdot \Delta x_{BB'} + W_{peso} = \Delta E_c \quad (2)$$

La fuerza F_A actúa sobre el sistema en el sentido del desplazamiento, realizando un trabajo positivo, dado por: $F_A \cdot \Delta x_{AA'}$. Dicho trabajo, se puede expresar en función de la presión como: $P_A \cdot S_A \cdot \Delta x_{AA'}$

La fuerza F_B, al actuar en sentido contrario al desplazamiento, realiza un trabajo negativo, dado por: $-F_B \cdot \Delta x_{BB'}$ y expresado en función de la presión: $-P_B \cdot S_B \cdot \Delta x_{BB'}$

Para la determinación del W_{peso} y del ΔE_c, descompondremos el sistema considerado en dos volúmenes: el comprendido entre A y A' y el comprendido entre A' y B. De este modo, todo sucede como si en el intervalo Δt, el volumen de fluido comprendido entre A y A' se hubiera desplazado hasta ocupar el espacio comprendido entre B y B', mientras que el fluido comprendido entre A' y B no habría sufrido modificación alguna. El efecto resultante es, pues, mover una masa determinada de fluido ($\Delta m_{AA'} = \Delta m_{BB'}$) desde A hasta B, con lo que:

$$W_{peso} = -\Delta E_p = -(\Delta m_{BB'} \cdot g \cdot h_B - \Delta m_{AA'} \cdot g \cdot h_A) \;=\; \rho \cdot S_A \cdot \Delta x_{AA'} \cdot g \cdot h_A - \rho \cdot S_B \cdot \Delta x_{BB'} \cdot g \cdot h_B$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}\Delta m_{BB'} \cdot v_B^2 - \frac{1}{2}\Delta m_{AA'} \cdot v_A^2 \;=\; \frac{1}{2}\rho \cdot S_B \cdot \Delta x_{BB'} \cdot v_B^2 - \frac{1}{2}\rho \cdot S_A \cdot \Delta x_{AA'} \cdot v_A^2$$

Sustituyendo todas las expresiones en (2) y agrupando, se obtiene:

$$S_A \cdot \Delta x_{AA'} \cdot \left(P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot h_A \right) = S_B \cdot \Delta x_{BB'} \cdot \left(P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v_B^2 + \rho \cdot g \cdot h_B \right) \quad (3)$$

Ya hemos visto anteriormente que: $S_A \cdot \Delta x_{AA'} = S_B \cdot \Delta x_{BB'}$

Teniendo en cuenta la igualdad anterior, podemos simplificar en (3) y nos queda:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v_B^2 + \rho \cdot g \cdot h_B \quad (4)$$

Como se puede comprobar, todos los sumandos de la igualdad (4) anterior, son presiones (se les conoce como presión estática, cinética y geométrica, respectivamente). Dicha igualdad es la Ecuación de Bernoulli, en la cual se establece que:

En cualquier conducción por la que circula un fluido ideal en régimen estacionario, se cumple que la suma de las presiones estática, cinética y geométrica, tiene el mismo valor en todos los puntos de la conducción.

Fijémonos en que la conclusión anterior implica que, si la altura no cambia, todo aumento de v debe ir acompañado de una disminución en el valor de la presión, tal que la suma anterior siga valiendo lo mismo. Esto explica muchos fenómenos que ocurren en la vida cotidiana. Por ejemplo, el aire asciende por una chimenea en la que se ha encendido el fuego, no solo porque está más caliente que el aire exterior y es menos denso sino, también, porque el viento en la parte superior hace que la presión en esa zona sea menor que en el interior de la casa (más velocidad → menos presión). El Teorema de Bernoulli, también contribuye a explicar (en parte) la sustentación de los aviones. En efecto, en los aviones, la forma de las alas (ved figura 3, siguiente) hace que el trayecto recorrido en el mismo tiempo por las líneas de corriente del aire obtenidas al adoptar el ala como sistema de referencia (por tanto, en reposo), sea mayor en la parte de arriba de las mismas (curvada) que en la parte de bajo (plana). En consecuencia, la velocidad de dichas corrientes deberá ser mayor arriba que abajo. De acuerdo con el teorema de Bernoulli, esto implica que la presión P_B sobre la parte inferior de las alas y, consecuentemente, la fuerza F_B debida a ella, tengan valores mayores que la presión P_A y la fuerza F_A que actúan sobre la parte superior de las mismas. Se obtiene así una fuerza resultante (*fuerza de sustentación*) hacia arriba, sobre cada ala (no representada en la figura).

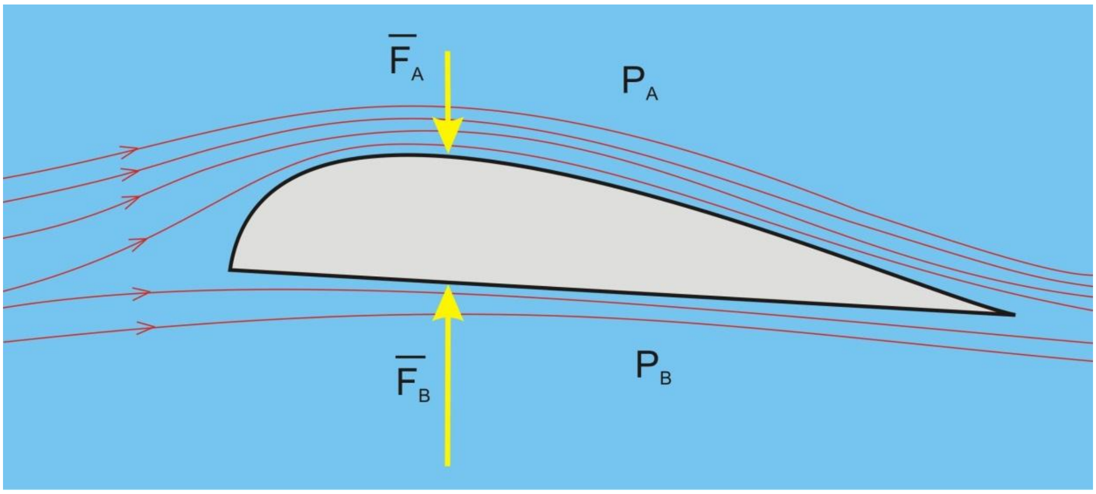
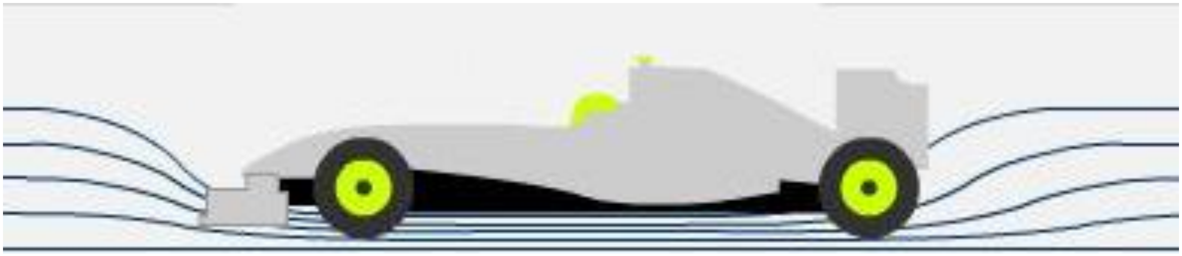


Figura 3

En el automovilismo el mismo efecto se aprovecha en sentido contrario. En efecto, los vehículos de carreras se diseñan para enviar la mayor parte del aire contra el que chocan por debajo de ellos. Así se obtiene una fuerza resultante vertical y descendente sobre el vehículo, mejorando su estabilidad sobre la pista.



Como ya hemos indicado, a los sumandos presentes en la ecuación de Bernoulli, se les conoce como *presión estática, presión cinética* y *presión geométrica* respectivamente (todos ellos son presiones). No obstante, la ecuación (4) es el resultado de dividir la ecuación (3), en la que todos los sumandos son energías, por un volumen (dado por S·Δx). Por tanto, los sumandos de la ecuación de Bernoulli también representan *energías por unidad de volumen* y así podríamos hablar de energías por unidad de volumen debidas a dichas presiones.

Otra forma habitual de expresar la ecuación de Bernoulli es la que resulta de dividir dicha ecuación por el producto ρ·g:

$$\frac{P_A}{\rho \cdot g} + \frac{1}{2}\frac{v_A^2}{g} + h_A = \frac{P_B}{\rho \cdot g} + \frac{1}{2}\frac{v_B^2}{g} + h_B \quad (5)$$

Como se puede comprobar, ahora todos los sumandos tienen dimensiones de longitud, de modo que se les conoce como *alturas o cargas*, respectivamente de *presión estática, cinética y geométrica* y, aunque en el sistema internacional la unidad es el metro, en ingeniería hidráulica se le denomina “m.c.a” (metro columna de agua).

Finalmente, señalar que los sumandos de la ecuación de Bernoulli expresada mediante la ecuación 5, representan, también, *energía por unidad de peso* (al haber dividido energía por unidad de volumen, por ρ·g).

Podemos, ahora, ir un poco más allá y plantearnos:

¿Cómo se modifica la ecuación de Bernoulli para poder aplicarla a un fluido real?

Para responder la pregunta anterior, es preciso tener en cuenta que los fluidos reales presentan viscosidad. Ello implica que tienen un determinado rozamiento interno, existiendo fuerza de rozamiento entre las diferentes capas de fluido que se mueven unas respecto de otras[2]. En los líquidos esto se produce principalmente debido a fuerzas de cohesión entre moléculas y en los gases a fuerzas de colisión. Además, también existe rozamiento entre el fluido y las paredes del conducto por el que circula. Como es lógico, estas fuerzas de fricción realizan un trabajo (negativo) que se traduce en una pérdida de energía mecánica, lo que modifica la ecuación (4) anterior, en la forma:

---

[2] Ese rozamiento interno hace que las distintas capas del fluido se muevan con diferente rapidez. En este caso, v_A y v_B representan la rapidez media en cada sección recta (S_A y S_B).

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v_B^2 + \rho \cdot g \cdot h_B + P_f \quad \text{(4-b)}$$

En esta ecuación (4-b), el término “P_f” representa la energía por unidad de volumen perdida en el desplazamiento entre A y B. Este sumando tiene unidades de presión y recibe el nombre de *pérdida de carga* o *pérdida de presión* debida a la fricción.

La expresión (5), se ve afectada por la existencia de fricción, en la forma:

$$\frac{p_A}{\rho \cdot g} + \frac{1}{2}\frac{v_A^2}{g} + h_A = \frac{p_B}{\rho \cdot g} + \frac{1}{2}\frac{v_B^2}{g} + h_B + h_f \quad \text{(5-b)}$$

En esta ecuación (5-b), el sumando h_f representa la energía por unidad de peso perdida en el desplazamiento entre A y B. Tiene dimensiones de longitud y recibe el nombre de *pérdida de carga* o *pérdida de altura,* debida a la fricción.

Para el cálculo de la pérdida de carga debida a la fricción dentro de una tubería llena, existen distintas expresiones obtenidas empíricamente. La más utilizada es la de Darcy-Weisbach, según la cual:

$$h_f = f \cdot \frac{L \cdot v^2}{2Dg}$$

En la igualdad anterior, f es un factor de fricción (que depende de las características de la conducción y naturaleza del fluido), L es la longitud de la conducción, v es la rapidez con que se desplaza el fluido, D el diámetro de la conducción y g la intensidad del campo gravitatorio.

La fórmula de Darcy-Weisbach tiene la ventaja, con respecto a otras expresiones empíricas, de ser aplicable a los diversos tipos de flujo hidráulico que pueden darse (laminar, transicional, turbulento), debiendo el factor de fricción, f, tomar los valores adecuados, según corresponda.

En las conducciones hidráulicas es habitual intercalar bombas (dispositivos que suministran energía al fluido) y también turbinas (dispositivos que extraen energía del fluido). Tiene, pues, interés, plantearse una última cuestión:

¿Cómo se modifica la ecuación de Bernoulli en caso de que en la conducción existan bombas hidráulicas y/o turbinas?

Cuando apliquemos Bernoulli entre dos puntos de una conducción entre los que exista una bomba, deberemos considerar la aportación energética de la misma. En tal caso, si expresamos Bernoulli (4-b) en términos de altura (energía por unidad de peso) quedará en la forma:

$$\frac{P_A}{\rho g} + \frac{1}{2} \cdot \frac{v_A^2}{g} + h_A + h_b = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{1}{2} \cdot \frac{v_B^2}{g} + h_B + h_f \quad \text{(6-a)}$$

En la ecuación anterior, h_b (altura de la bomba) representa la energía por unidad de peso, suministrada por la bomba.

Análogamente, si entre los puntos a los que aplicamos Bernoulli existe una turbina, deberemos considerar la energía que se extrae. En este caso, la ecuación de Bernoulli (4-b), expresada también en términos de altura, quedará en la forma:

$$\frac{P_A}{\rho g}+\frac{1}{2}\cdot\frac{v_A^2}{g}+h_A=\frac{P_B}{\rho g}+\frac{1}{2}\cdot\frac{v_B^2}{g}+h_B+h_f+h_t \quad \text{(6-b)}$$

En la ecuación anterior, h_t (altura de la turbina) representa la energía por unidad de peso extraída por la turbina.

Naturalmente, en el caso de que en la conducción exista una bomba y una turbina entre los puntos A y B considerados, la ecuación de Bernoulli, deberá contener tanto h_b como h_t:

$$\frac{P_A}{\rho g}+\frac{1}{2}\cdot\frac{v_A^2}{g}+h_A+h_b=\frac{P_B}{\rho g}+\frac{1}{2}\cdot\frac{v_B^2}{g}+h_B+h_f+h_t \quad \text{(6-c)}$$

A continuación, vamos a plantear y resolver distintas situaciones prácticas, aplicando los conceptos y expresiones introducidas en este ejercicio.

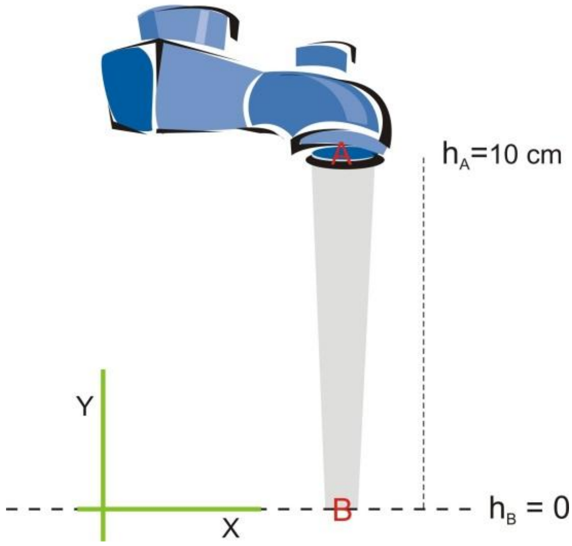
2. El chorro de salida de agua de un grifo tiene una sección circular de 2’6 cm^2 y una velocidad de 2 m/s. Determinad su sección cuando haya descendido 10 cm.

La disminución de la sección transversal que experimenta un chorro de agua o cualquier otro líquido mientras cae, es un hecho experimental que se puede constatar fácilmente, tal y como se muestra en la foto adjunta, tomada en una pila de lavar casera.

(Foto original de los autores)

En el ejercicio se nos pide qué valor tendrá la sección del chorro a una distancia dada por debajo de la boca de salida del grifo. *¿Cómo podríamos hacerlo?*

En el esquema siguiente, se ha representado la situación descrita en el enunciado, junto con el sistema de referencia a utilizar. El punto A corresponde a la boca del grifo y el B al punto en el cual queremos determinar el valor de la sección del chorro. Para simplificar, situaremos el origen de alturas (que serán todas sobre el eje Y) en ese punto B.



Podemos comenzar emitiendo alguna hipótesis acerca de las variables de las que dependerá la sección pedida S_B. Parece evidente que dicha sección (a igualdad de los restantes factores), será tanto mayor cuanto mayor sea la sección, S_A, de la columna de agua en la salida del grifo, y tanto menor, en cambio, cuanto mayor sea la altura de dicha columna, h_A. En cuanto a la influencia de la gravedad, cabe esperar que si el valor de g aumentase, S_B disminuiría, ya que (siempre a igualdad de los restantes factores), una gravedad mayor haría que v_B aumentase y, de acuerdo con la ecuación de continuidad ($S_A \cdot v_A = S_B \cdot v_B$), si v_B aumenta, S_B deberá disminuir.

En resumen:

$$S_B = f\ (S_A, h_A, g)$$

Debiendo ser S_B mayor cuanto mayor sea S_A , menor sea h_A y menor sea g

A partir de aquí, una posible estrategia para resolver este ejercicio (y muchos otros de hidrodinámica), es considerar qué es lo que permanece constante cuando se pasa de un punto A de la conducción a otro punto posterior B.

Sabemos por la Ecuación de Continuidad, que el caudal de agua (volumen que atraviesa una sección dada por unidad de tiempo), es el mismo en A que en B y que dicho caudal se puede expresar como el producto de la sección considerada por la rapidez del líquido que la atraviesa. En este caso, será:

$S_A \cdot v_A = S_B \cdot v_B$ (1)

Si conociésemos la rapidez v_B, bastaría despejar S_B de la ecuación anterior y operar, para obtener el resultado que buscamos. No obstante, la rapidez del agua v_B no es un dato del enunciado, por lo que hemos de pensar en alguna forma de determinarla:

Si aplicamos la Ecuación de Bernoulli a los puntos A y B:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v_B^2 + \rho \cdot g \cdot h_B$$

Y como: $P_A = P_B = P_{atm}$, y $h_B = 0$, sustituyendo:

$$\frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot h_A = \frac{1}{2}\rho \cdot v_B^2$$

Despejando ahora v_B, obtenemos que:

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gh_A} \quad (2)$$

Conviene darse cuenta de que la rapidez obtenida para el punto B, coincide con la que correspondería a la caída de cualquier objeto lanzado desde el punto A (dirección vertical y hacia abajo) con cierta rapidez, lo cual es lógico, puesto que la Ecuación de Bernoulli se deduce aplicando el principio de conservación de la energía mecánica a una determinada masa de fluido y, en este caso, al ser $P_A = P_B = P_{atm}$, los trabajos del resto de fluido (ved

problema anterior) son iguales y de signo opuesto. Por tanto, el único efecto sobre la velocidad, será el de la fuerza gravitatoria.
Sustituyendo la expresión (2) en (1):

$$S_A \cdot v_A = S_B \cdot \sqrt{v_A^2 + 2gh_A}$$

De donde, tras despejar S_B y simplificar, obtenemos finalmente:

$$S_B = \frac{S_A}{\sqrt{1 + \frac{2gh_A}{v_A^2}}}$$

Y sustituyendo los valores numéricos: $S_B = 2'6 \cdot 10^{-4}/1'22 = 2'13 \cdot 10^{-4}\ m^2 = 2'13\ cm^2$

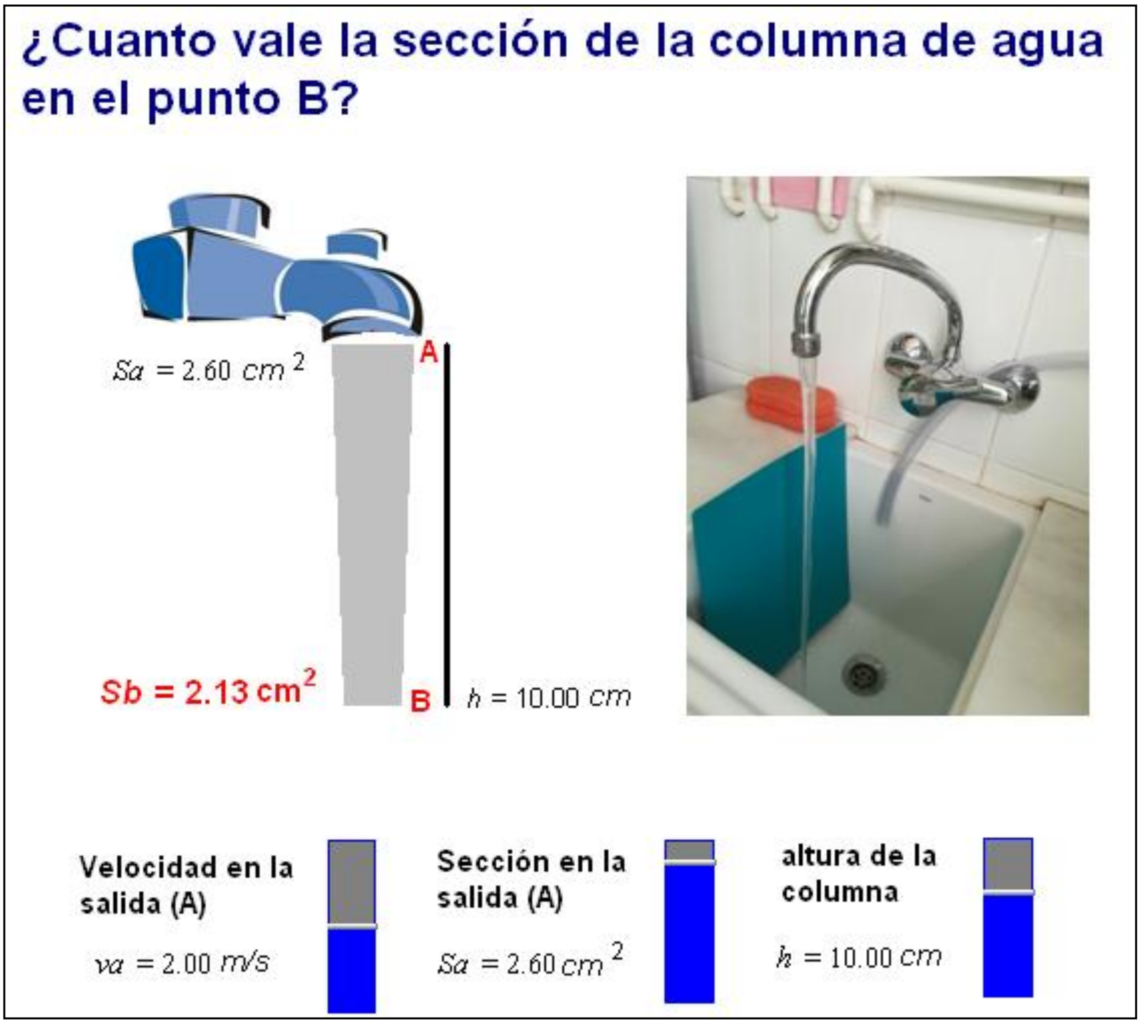
Si analizamos el resultado literal obtenido, vemos que, además de ser dimensionalmente homogéneo (L^2 en ambos lados de la ecuación), contempla las hipótesis que habíamos planteado al comienzo. Concretamente, a igualdad de los restantes factores:

S_B será tanto menor, cuanto mayor sea la altura h_A de la columna de agua considerada, cuanto menor sea la sección S_A del chorro justo a la salida del grifo (tal y como se puede comprobar experimentalmente) y cuanto mayor fuese el valor de la gravedad "g". Además, se cumplen las condiciones límite de que si $h_A = 0$ o si $g = 0$, entonces se obtiene $S_B = S_A$.

Finalmente, si nos fijamos en el valor numérico del resultado (algo que conviene hacer siempre), vemos que este es razonable y que ha disminuido respecto del que tenía a la salida del grifo (si hubiese dado mayor, sería indicativo de que se ha cometido algún error).

Además de resolver el problema usando lápiz y papel, los alumnos pueden reforzar los conocimientos tratados, mediante una animación interactiva *Modellus*, que hemos elaborado, en la que se visualiza la situación y se calcula la magnitud buscada, S_B. En la pantalla de dicha animación hemos colocado tres cursores manuales con los que los estudiantes pueden modificar otros tantos parámetros (concretamente, v_A, S_A, h) y ver cómo afectan esas modificaciones al resultado cuantitativo y al aspecto visual de la columna de agua.

La figura adjunta muestra el resultado en la animación cuando los valores de las magnitudes coinciden con los que hemos utilizado aquí



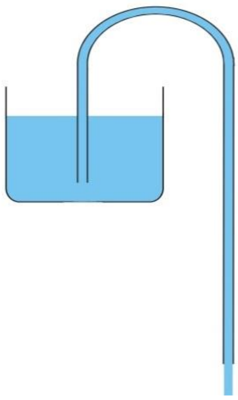
La animación y el programa necesario disponibles en: http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm

3. Un sifón de agua carbónica tiene, en su parte superior, una mezcla de aire y de dióxido de carbono que produce una presión de 1'4 atm. Si la diferencia de altura entre el nivel del líquido y la boca de salida es de 16 cm, determinad la velocidad con la que saldrá el agua carbónica al abrir la válvula de salida. (Considerad que la sección del recipiente es mucho mayor que la sección del tubo por el que asciende el líquido).

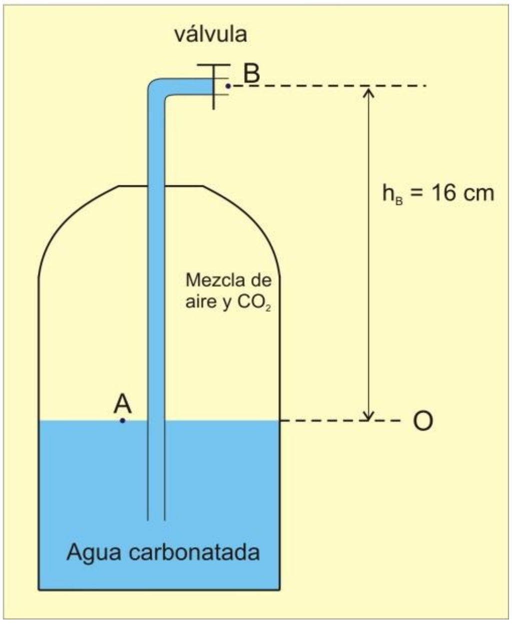
Datos: densidad del líquido $\rho = 10^3$ kg/m^3, intensidad del campo gravitatorio g = 9'81 N/kg, 1 atm = 1'013·10^5 N/m^2.

El sifón es el nombre que se da a una botella que contiene agua carbonatada. En el interior del envase, la presión es mayor que la presión atmosférica del exterior, a causa de la presión ejercida por el dióxido de carbono. Esta presión se mantiene por el equilibrio existente entre el CO_2 disuelto en el agua y el que existe en la parte superior del envase mezclado con aire. La diferencia de presión hace que el agua carbonatada ascienda por el tubo, en cuanto se abre la válvula que conecta el interior del recipiente con el exterior, y salga al exterior. Este utensilio, que antes era bastante común y se utilizaba para beber agua con gas o para mezclarla con vino y otras bebidas, está cada vez más en desuso y se ha sustituido por botellitas de soda. Sin embargo, en algunos países, como Argentina y Uruguay, los sifones de agua carbonatada siguen siendo muy utilizados, se fabrican de sustancias plásticas (más seguras frente a una posible explosión), y habitualmente son repartidos a domicilio por "soderos" o "sifoneros".

Conviene saber que el término *sifón* procede del griego antiguo y se utilizó para nombrar a los dispositivos que permitían al agua de un canal o de un acueducto, pasar por debajo de un camino o por una vaguada para retomar su nivel al otro lado y continuar su curso. Así este tipo de sifón ya era conocido por los romanos, que lo utilizaban en sus acueductos. Más adelante, se inventó la variante invertida que permite a un líquido pasar por un obstáculo situado a mayor altura que la superficie del mismo, aprovechando la diferencia de presión generada entre los extremos de dicho tubo, como ocurre también al usar el recipiente hermético que contiene agua carbonatada.



En la figura siguiente se ha representado, esquemáticamente, el corte longitudinal de una botella-sifón conteniendo agua carbonatada, incorporando los datos que figuran en el enunciado.



Como puede verse, en el esquema se ha tomado como origen el nivel inicial del líquido, de modo que $h_A = 0$ y $h_B = 16$ cm.

Podemos empezar planteando, a modo de hipótesis, que la rapidez con que sale el agua carbonatada al hacer funcionar la válvula de apertura, v_B, será mayor cuanto mayor sea la diferencia de presiones entre los puntos A y B y que en el caso límite en que no existiera esa diferencia de presión ($P_A - P_B = 0$), el agua carbonatada no podría salir del sifón ($v_B = 0$). También deberán influir en el resultado del problema, la densidad del líquido, ρ (cuanto mayor sea ρ, más le costará al líquido ascender y, por tanto, menor será, v_B), así como la intensidad del campo gravitatorio, g, y la diferencia de altura entre la válvula a la salida y el nivel del agua carbonatada dentro del recipiente, h_B (recordemos que hemos tomado $h_A = 0$). Lógicamente, cuanto mayor sea cada uno de estos dos últimos factores, menor debería ser la velocidad a la que el sifón expulsará líquido.

Finalmente, la velocidad buscada, v_B, también dependerá del valor que tenga esa velocidad en el punto A (descendiendo por dentro de la botella), pero esta velocidad v_A, a su vez depende de las secciones respectivas en A y en B, ya que de acuerdo con la ecuación de continuidad entre A y B: $S_A \cdot v_A = S_B \cdot v_B$

Y despejando v_A, se obtiene: $v_A = \dfrac{S_B}{S_A} \cdot v_B$

Ahora bien, de esta forma no podremos hallar v_A, ya que en la expresión anterior, todos los valores son desconocidos, así que, en principio, tampoco podremos utilizarla para determinar la velocidad v_B que se pide en el enunciado. Sin embargo, en ese mismo enunciado se nos informa de que la sección S_A de la botella es mucho mayor que la sección del tubo por el que asciende el líquido, la cual coincide con S_B. Ello supone, de acuerdo con la ecuación anterior, que v_A ha de tener un valor muy pequeño y mucho más pequeño si está, como aparece en la raíz, elevada al cuadrado. Es decir:

$$v_A^2 = \left(\frac{S_B}{S_A}\right)^2 \cdot v_B^2 \quad \text{y como} \quad \left(\frac{S_B}{S_A}\right)^2 << 1 \rightarrow v_A^2 \approx 0$$

Por tanto, bajo estas condiciones, podemos finalmente resumir todas las hipótesis expresando que:

$$v_B = f\,(P_A - P_B,\ \rho,\ g,\ h_B)$$

Llegados aquí para determinar la rapidez con que sale el chorro de agua carbonatada por B al hacer funcionar la válvula de apertura, sólo necesitaremos aplicar la ecuación de Bernoulli entre A y B (en el razonamiento anterior hemos usado ya la ecuación de continuidad, llegando a $v_A \approx 0$):

$$P_A + \frac{1}{2}\rho\cdot v_A^2 + \rho\cdot g\cdot h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho\cdot v_B^2 + \rho\cdot g\cdot h_B$$

Si en la ecuación anterior, tenemos en cuenta que $h_A = 0$, y que en las condiciones descritas en el enunciado $v_A \approx 0$, sólo necesitamos despejar v_B, para obtener el siguiente resultado:

$$\boxed{v_B = \sqrt{\frac{2}{\rho}\cdot(P_A - P_B) - 2gh_B}}$$

Si analizamos el resultado literal obtenido, vemos que, en primer lugar, es dimensionalmente homogéneo (L/T) en ambos lados de la ecuación. También podemos ver que se cumplen todas las hipótesis, ya que a igualdad de los restantes factores:

a) Cuanto mayor sea la diferencia de presiones, mayor será la rapidez de salida
b) Los líquidos más densos (y, por tanto, más pesados), salen (siempre a igualdad de los restantes factores), con menor rapidez que los menos densos.
c) Cuanto menor sea la altura a ascender por el líquido, mayor será la rapidez con que sale.

Sustituyendo ahora los valores numéricos, en unidades internacionales:

$$v_B = \sqrt{\frac{2}{10^3}\cdot(1'4-1)\cdot 1'013\cdot 10^5 - 2\cdot 9'81\cdot 0'16} \quad\rightarrow\quad v_B = 8'8 \text{ m/s}$$

El resultado literal obtenido, también permite plantear nuevos interrogantes de interés, como, por ejemplo:

¿Cuál será el valor límite o máximo (para un líquido dado y una diferencia de presiones dada), que puede tener h_B para el cual $v_B = 0$?

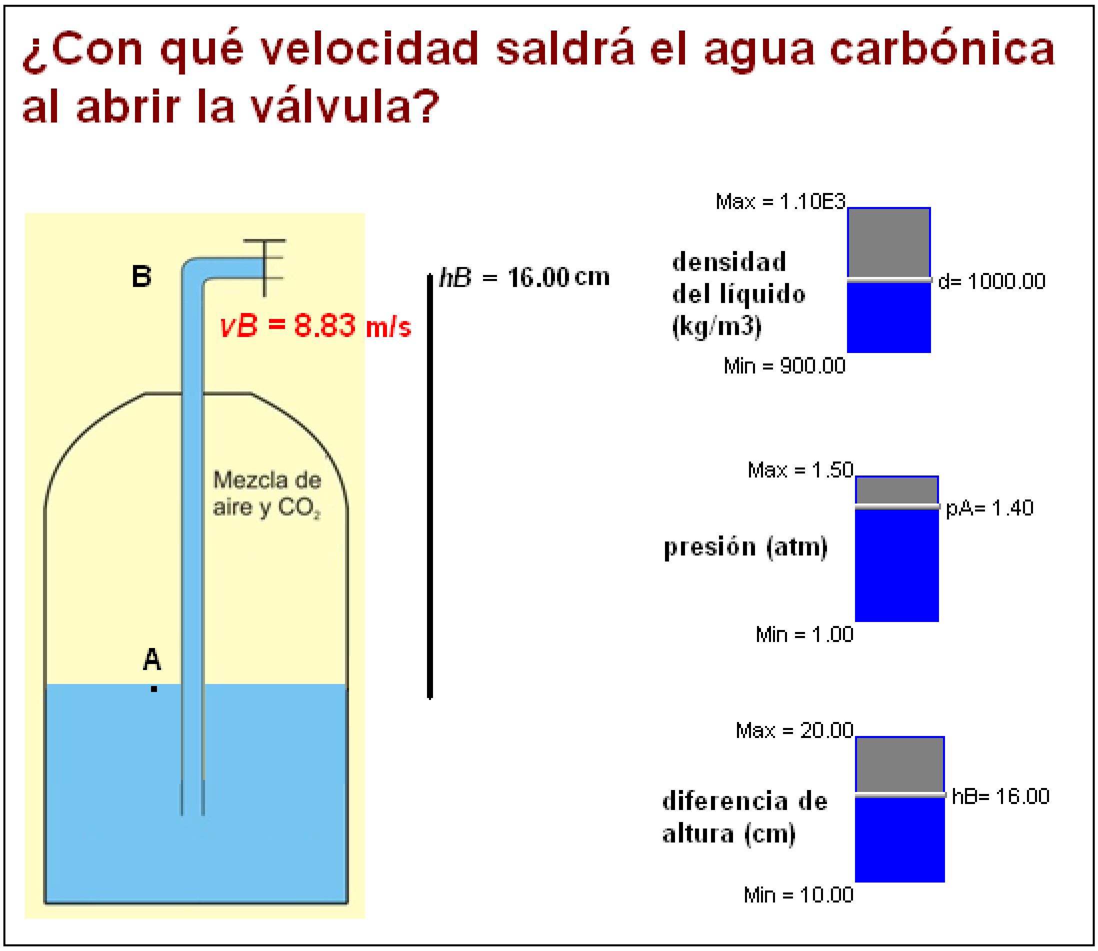
Para responder, basta con igualar los términos que aparecen restando en el resultado literal obtenido, con lo que:

$$\frac{2}{\rho}\cdot(P_A - P_B) = 2gh_{B\max} \rightarrow h_{B\max} = \frac{P_A - P_B}{\rho\cdot g}$$

Sustituyendo: $h_{B\max} = \dfrac{(1'4-1)\cdot 1'013\cdot 10^5}{10^3\cdot 9'81} = 4\ m$

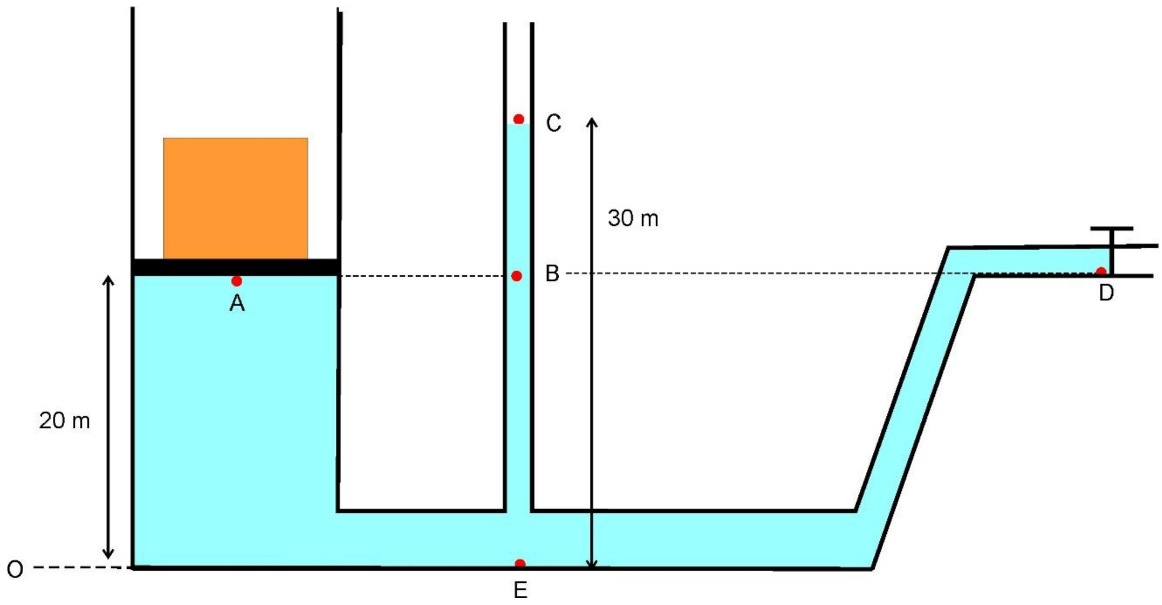
Finalmente, los alumnos pueden reforzar este problema manipulando una animación interactiva *Modellus* en la que disponen de tres cursores manuales para poder modificar la diferencia de presión entre A y B, la altura que asciende la bebida, y la densidad del líquido, comprobando cómo afectan dichas modificaciones al resultado.

La figura adjunta muestra el aspecto de la animación cuando los valores de las magnitudes coinciden con los que hemos utilizado en esta resolución.



La animación y el programa necesario para hacerla correr están disponibles en la Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física de la Sección Local de Alicante de la RSEF http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm.

4. En el dispositivo esquematizado en la figura adjunta, el depósito de agua tiene una sección de 3 m^2 y la conducción presenta, en los tramos horizontales, secciones de 10 cm^2 en el tramo inferior y de 5 cm^2 en el superior (la figura no está a escala).



Sabiendo que, con la salida cerrada, la columna de agua en el tubo vertical alcanza una altura de 30 m, determinad:

a) Peso del conjunto cuerpo-plataforma.
b) Presión en un punto de la conducción horizontal superior (de 5 cm^2 de sección).
c) Caudal que se producirá al dejar libre la salida (considerando despreciables las pérdidas por fricción).
d) Altura del agua en el tubo vertical en la situación del apartado anterior.

Datos: Densidad del agua, $\rho = 10^3$ kg/m^3. Presión atmosférica, $P_{atm} = 1'013 \cdot 10^5$ N/m^2

Empezaremos resolviendo los dos primeros apartados, que consideran una situación inicial estática, la cual se mantiene mientras la válvula permanece cerrada:

a) Como, mientras la salida se encuentre cerrada, nos encontramos en una situación de equilibrio estático, todos los puntos que se encuentren al mismo nivel, han de tener la misma presión. Aplicando esta condición a los puntos A y B, escribimos:

$P_A = P_B$

Partiendo de la igualdad anterior, ¿cómo podríamos determinar el peso que se nos pide?

La presión en A dependerá de la presión debida a la fuerza peso F_p del conjunto cuerpo-plataforma y del valor de la presión atmosférica. Introduciendo estos datos, junto con los de P_B, en la igualdad anterior, podemos obtener el peso que buscamos:

$P_A = P_{atm} + F_p/S$

En el punto B, la presión es la atmosférica más la debida a una columna de agua de 10 m de altura:

$P_B = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_{CB}$

Por tanto, igualando $P_A = P_B \rightarrow P_{atm} + F_p/S = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_{CB} \rightarrow F_p/S = \rho \cdot g \cdot h_{CB}$

Y despejando: $F_p = S \cdot \rho \cdot g \cdot h_{BC}$ $\rightarrow$ $F_p = 3 \cdot 10^3 \cdot 9'8 \cdot 10 = 2'94 \cdot 10^5$ N

b) Dado que la situación de equilibrio no ha variado, podemos calcular la presión que se nos pide mediante la misma estrategia que acabamos de seguir en el apartado anterior, es decir, igualando la presión en D a la presión en A o en B:

$$P_D = P_B \rightarrow P_D = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_{BC}$$

Y sustituyendo[3]: $P_D = 1'013 \cdot 10^5 + 10^3 \cdot 9'8 \cdot 10 = 1'993 \cdot 10^5$ N/m^2

c) Para calcular el caudal de agua "Q" que saldrá por D cuando se abra la salida, aplicaremos el principio de Bernoulli a los puntos A y D para, después, obtener v_D y con ella Q mediante $Q = S_D \cdot v_D$.

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot h_A = P_D + \frac{1}{2}\rho \cdot v_D^2 + \rho \cdot g \cdot h_D$$

Como en la situación descrita se cumple que $h_A = h_D$ podemos simplificar y obtenemos:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 = P_D + \frac{1}{2}\rho \cdot v_D^2 \quad (1)$$

En la ecuación anterior:

- P_A, sigue valiendo lo mismo que antes ($1'993 \cdot 10^5$ N/m^2)
- P_D, ahora vale 1 atm = $1'1013 \cdot 10^5$ N/m^2
- ρ, es la densidad del agua (10^3 kg/m^3)
- v_A, es, en principio, desconocida.

No es posible, pues, utilizar (1) para calcular v_D si previamente no calculamos v_A o la expresamos en función de magnitudes cuyos valores conozcamos. ¿Cómo podríamos hacerlo?

Recordemos que, de acuerdo con la ecuación de continuidad, se cumple que:

$v_A \cdot S_A = V_D \cdot S_D$

Despejando v_A, obtenemos que: $v_A = \frac{S_D}{S_A} \cdot v_D \rightarrow v_A^2 = \frac{S_D^2}{S_A^2} \cdot v_D^2$

Sustituyendo ahora v_A^2 en la ecuación (1) y despejando v_D, obtenemos:

[3] La presión en unidades internacionales se mide en N/m^2. Sabemos que N/m^2 se denomina Pascal (Pa), de modo que 1 N/m^2 = 1 Pa. No obstante, para evitar confusiones al utilizar símbolos de presiones con subíndices, en este capítulo utilizaremos la notación N/m^2 en lugar de Pa (que sería más apropiado).

$v_D = \sqrt{\dfrac{2(P_A - P_D)}{\rho\left(1 - \dfrac{S_D^2}{S_A^2}\right)}}$ (2)

Antes de operar, conviene percatarse de que dado que S_A (3 m^2) es mucho mayor que S_D (5 cm^2) y que ambos términos están elevados al cuadrado, se cumplirá que el cociente entre los cuadrados de ambas secciones será mucho menor que 1. En efecto:

$$\frac{S_D^2}{S_A^2} = \left(\frac{5 \cdot 10^{-4}}{3}\right)^2 = 2'78 \cdot 10^{-8} \ll 1$$

De modo que, si despreciamos este cociente, la ecuación anterior se transforma en:

$$\boxed{v_D = \sqrt{\frac{2(P_A - P_D)}{\rho}}}$$

Y sustituyendo, obtenemos finalmente: $v_D = \sqrt{\dfrac{2\cdot(1'993\cdot10^5 - 1'013\cdot10^5)}{10^3}}$ = 14 m/s

Ahora para calcular el caudal Q, basta aplicar: Q = S·v, con lo que:

$Q = S_D \cdot v_D = 5\cdot10^{-4}\cdot14 = 7\cdot10^{-3}\ m^3/s$

Podemos analizar este resultado literal para ver que, además de ser dimensionalmente homogéneo ($L\cdot T^{-1}$ en ambos lados) es físicamente aceptable, ya que es lógico que la velocidad del agua que salga por D cuando se abra la válvula, dependa por un lado, de la diferencia de presión entre los puntos A y D (cuanto mayor sea dicha diferencia, el agua será "empujada" con mayor intensidad y saldrá con mayor velocidad) y, por otro, de la densidad del líquido (cuanto más "pesado" sea, para una misma diferencia de presiones, más lento se moverá).

d) Para terminar, hemos de calcular qué altura alcanzará el agua en el tubo vertical, en la situación anterior (agua circulando).

Antes de abrir la salida en D (situación de equilibrio estático), la altura del agua en el tubo vertical era h_{EC} = 30 m. Cabe esperar que, cuando se abra la salida y el agua se halle circulando, el nivel en el tubo vertical descienda de su nivel inicial C a otro C' y la altura $h_{EC'}$ será menor de 30 m.

Sugerid un procedimiento para determinar $h_{EC'}$

La presión P_E es la suma de la ejercida por la atmósfera (1 atm) y la ejercida por la columna de agua (dada por $\rho\cdot g\cdot h_{EC'}$). Es decir:

$P_E = P_{atm} + \rho\cdot g\cdot h_{EC'}$ (3)

Por tanto, la determinación de la altura buscada $h_{EC'}$ pasa por calcular previamente el valor de P_E, para lo cual disponemos de la ecuación de Bernoulli y de la ecuación de continuidad.

Aplicando Bernoulli entre los puntos E y D:

$$P_E + \frac{1}{2}\rho \cdot v_E^2 + \rho \cdot g \cdot h_E = P_D + \frac{1}{2}\rho \cdot v_D^2 + \rho \cdot g \cdot h_D$$

Despejando P_E y considerando que $h_E = 0$:

$$P_E = P_D + \frac{1}{2}\rho \cdot v_D^2 - \frac{1}{2}\rho \cdot v_E^2 + \rho \cdot g \cdot h_D \quad (4)$$

Aplicando ahora la ecuación de continuidad entre los mismos puntos E y D:

$S_E \cdot v_E = S_D \cdot v_E \quad \rightarrow \quad v_E = \frac{S_D}{S_E} \cdot v_D$

Sustituyendo v_E en (4) y simplificando, obtenemos que:

$$P_E = P_D + \frac{1}{2}\rho \cdot \left(1 - \frac{S_D^2}{S_E^2}\right) v_D^2 + \rho \cdot g \cdot h_D$$

Sustituyendo ahora la expresión de P_E obtenida, en la ecuación (3) y teniendo en cuenta que $P_D = P_{atm}$, obtenemos que:

$$h_{EC'} = \left(1 - \frac{S_D^2}{S_E^2}\right) \cdot \frac{v_D^2}{2g} + h_D \quad (5)$$

Finalmente, sustituyendo valores numéricos:

$$h_{EC'} = \left(1 - \frac{5^2}{10^2}\right) \cdot \frac{14^2}{2 \cdot 9'8} + 20 = 27'5m$$

Analizando el resultado literal (5) anterior, podemos ver que, además de ser una ecuación dimensionalmente homogénea (L en ambos lados), se contemplan en ella algunos casos particulares interesantes. Concretamente, si:

$S_D < S_E \rightarrow h_{EC'}$ □ h_D
$S_D > S_E \rightarrow h_{EC'}$ □ h_D
$S_D = S_E \rightarrow h_{EC'} = h_D$

5. Determinación experimental de la velocidad del agua por una tubería

En muchas instalaciones hidráulicas (especialmente en las de gran tamaño), es preciso mantener la velocidad del agua dentro de ciertos valores límite, que dependen, entre otras cosas, del material de que estén hechas las tuberías y de la sección o el diámetro de las mismas. En términos generales, para tuberías de gran diámetro, las velocidades máximas no deben superar la franja entre los 4 m/s y 5 m/s, mientras que para tuberías menores, no es conveniente que se superen los 2 m/s, si los tubos son metálicos, o los 3'5 m/s, si son de un material termoplástico y/o multicapa. Si se superan estas velocidades del agua, la fricción erosiona y desgasta las paredes de las tuberías y, muchas veces, también se generan ruidos. Así mismo, se deben superar unos valores mínimos de la velocidad (por lo general, se establece que no deben darse valores inferiores a los 0'5 m/s), para evitar procesos de sedimentación y la formación de depósitos. Por tanto, resulta del mayor interés disponer de dispositivos para poder medir y controlar la velocidad del agua que circula por una conducción, en distintos tramos de la misma.

Para determinar la velocidad del agua que circula por una tubería, bastaría con intercalar en el tramo de tubería deseado, el dispositivo esquematizado en la figura siguiente. Como se puede observar, este dispositivo (coloreado en rojo) está formado por un tramo horizontal (de la misma sección que la tubería en la que se va a intercalar) y por dos tubos verticales más estrechos, por los que, una vez colocado el dispositivo, el agua ascenderá alcanzando una cierta altura (distinta) en cada uno de ellos.

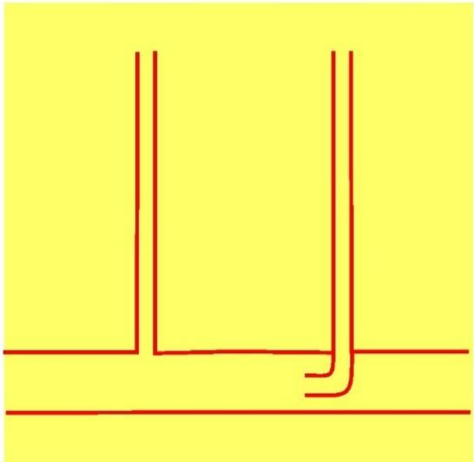


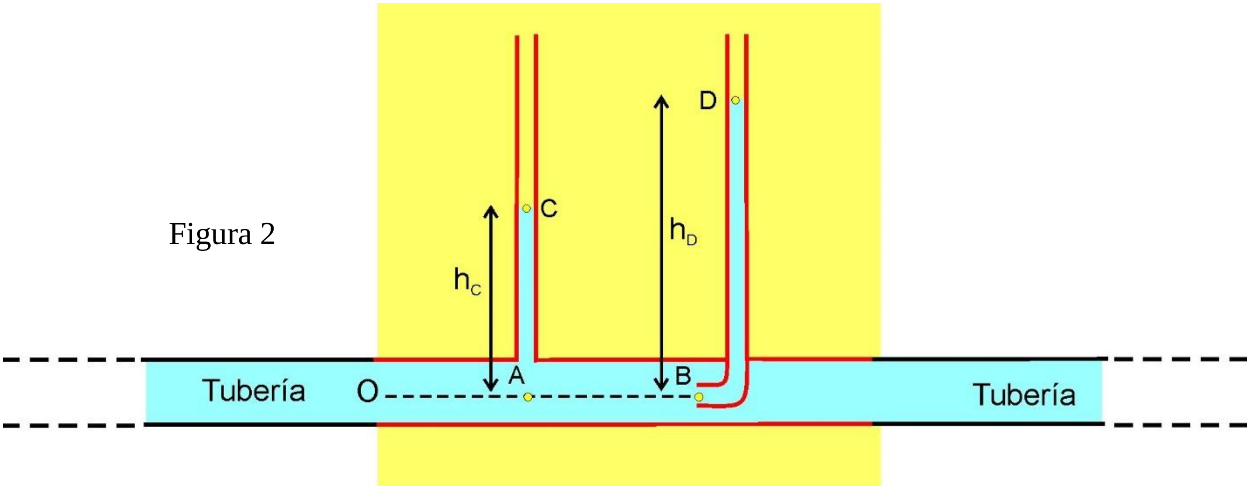
Figura 1

La altura alcanzada por el agua en los tubos verticales, está relacionada, de alguna manera, con la velocidad que deseamos medir. *¿Cómo podríamos averiguar dicha relación?*

Sabemos que, la ecuación de Bernoulli relaciona algunas magnitudes como la presión, la densidad o la altura con la velocidad a la que circula un fluido por una conducción, de forma que, si somos capaces de llegar a conocer dichas magnitudes, podríamos determinar el valor correspondiente de la velocidad.

En la figura 2 siguiente se ha representado el dispositivo anterior intercalado en una tubería por la que circula agua en régimen estacionario.

Figura 2



El agua, al circular, asciende por los tubos verticales hasta alcanzar en ellos una altura tal que la presión de la columna de agua en su base impide que entre más agua, alcanzándose así una situación de equilibrio en la que la velocidad del agua en el punto B será nula y la velocidad del agua en el punto A, será la velocidad que queremos calcular.

Considerando A, B, C y D de la figura 2 anterior y aplicando Bernoulli entre A y B:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v_B^2 + \rho \cdot g \cdot h_B$$

Si tenemos en cuenta que, en la situación representada en la figura 2 anterior, $h_A = h_B = 0$ y que $v_B = 0$, la ecuación queda como:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 = P_B \quad \rightarrow \quad \boxed{v_A = \sqrt{\frac{2 \cdot (P_B - P_A)}{\rho}}} \qquad (1)$$

La determinación de v_A requiere conocer P_A y P_B, presiones que podemos conocer por consideraciones hidrostáticas en los tubos verticales.

$P_A = P_C + \rho \cdot g \cdot h_C = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_C$

$P_B = P_D + \rho \cdot g \cdot h_D = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_D$

Sustituyendo ahora P_A y P_B en la ecuación (1):

$$P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_C + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_D \quad (2)$$

Finalmente, simplificando en (2) y despejando, obtenemos la velocidad buscada:

$$\boxed{v_A = \sqrt{2g \cdot (h_D - h_C)}}$$

Si analizamos el resultado obtenido, vemos que además de ser dimensionalmente homogéneo (condición imprescindible), nos muestra que conocida la diferencia de alturas conoceremos la velocidad de modo que, cuanto menor sea la diferencia de alturas, menor será la velocidad.

Otro dispositivo útil para medir la velocidad del agua en una tubería, es el esquematizado en la figura 3 siguiente:

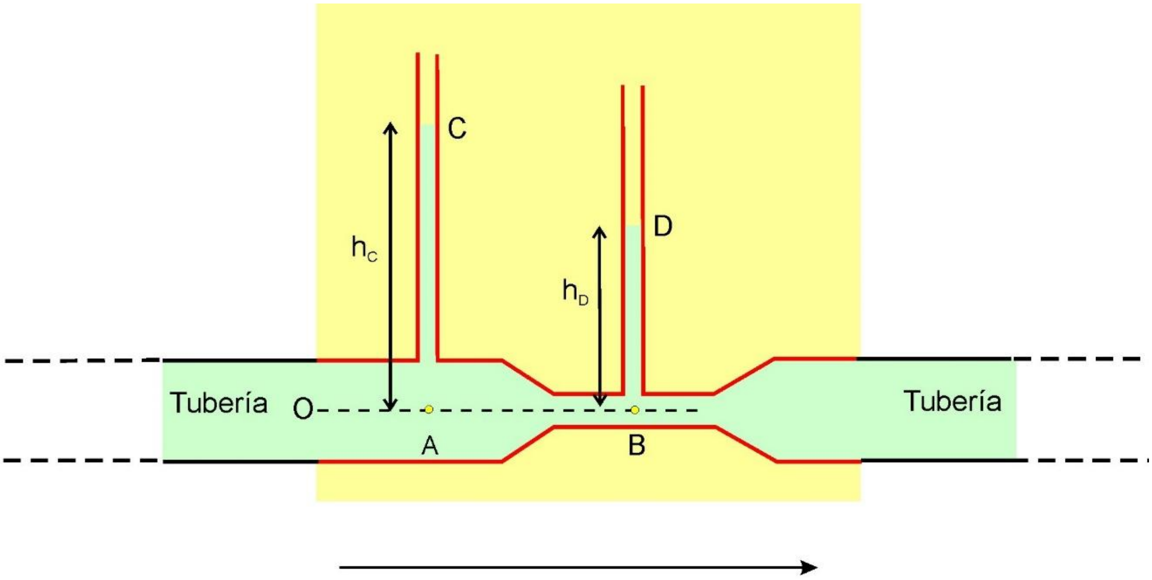


Figura 3

A diferencia del dispositivo anterior, aquí el segundo tubo, no se inserta ni se dobla dentro de la conducción, pero está conectado a un estrechamiento de la misma. De acuerdo con la ecuación de continuidad (ved problema 1), sabemos que ello supone que la velocidad con la que circula el agua en B será mayor que la velocidad en A y que, por tanto, la presión en B será menor que la presión en A, lo que explica que la altura alcanzada por el agua en el segundo tubo vertical sea, ahora, menor que en el primero.

Para determinar la velocidad del agua en A, aplicaremos Bernoulli entre A y B, con lo que:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v_B^2 + \rho \cdot g \cdot h_B$$

Teniendo en cuenta que $h_A = h_B = 0$, la ecuación anterior queda como:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v_B^2 \quad (3)$$

Vemos que la determinación de v_A requiere, en este caso, conocer P_A, P_B y v_B.

Por consideraciones hidrostáticas:

$P_A = P_C + \rho \cdot g \cdot h_C = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_C$

$P_B = P_D + \rho \cdot g \cdot h_D = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_D$

Y, de acuerdo con la ecuación de continuidad: $v_A \cdot S_A = v_B \cdot S_B \rightarrow v_B = \frac{S_A}{S_B} \cdot v_A$

Sustituyendo en la ecuación (3) anterior:

$$P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_C + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_D + \frac{1}{2}\rho \cdot \frac{S_A^2}{S_B^2} \cdot v_A^2 \quad (4)$$

Finalmente, simplificando en (4) y despejando, obtenemos:

$$v_A = \sqrt{\frac{2g(h_c - h_D)}{\left(\frac{S_A^2}{S_B^2} - 1\right)}}$$

El interés de los dos dispositivos que acabamos de ver, para medir la velocidad a la que circula el agua por una tubería es, fundamentalmente, teórico, ya que, en la práctica, ninguno sería muy útil, puesto que para valores habituales de la presión (como 2 atm o 3 atm), las columnas de agua en los tubos verticales serían de decenas de metros de altura. El que sí se utiliza habitualmente es el dispositivo representado de forma esquemática en la figura 4 siguiente, conocido como "venturímetro", en el cual se usa mercurio (de color gris en la figura), cuya densidad, ρ_{Hg}, supera en unas 13'5 veces la densidad del agua líquida.

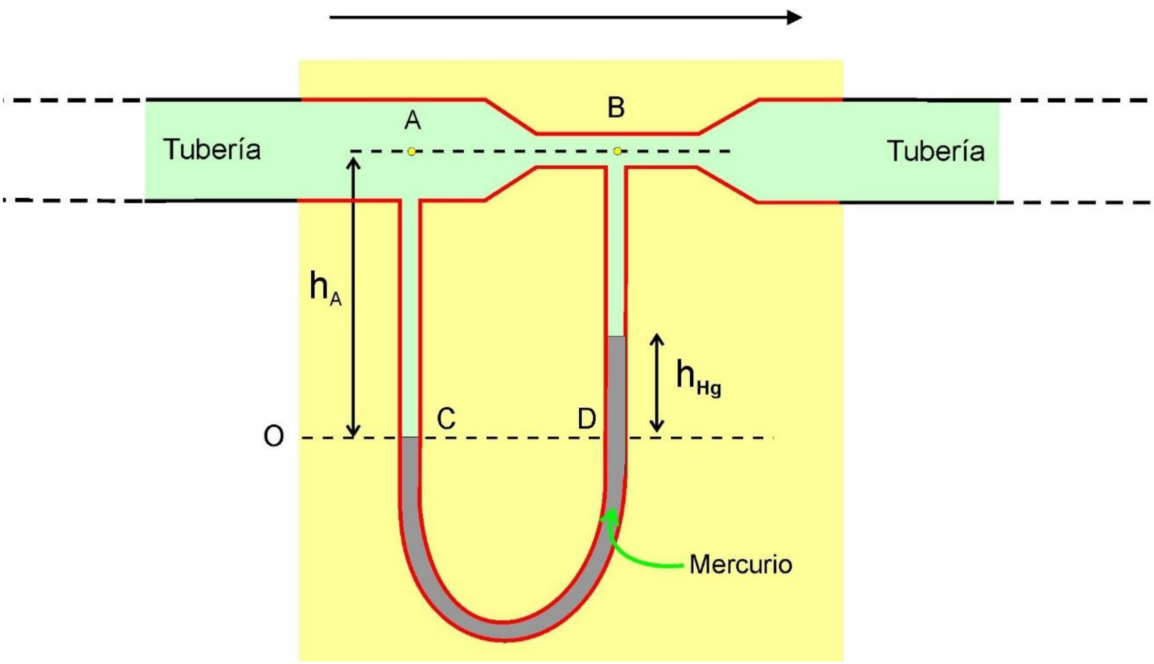


Figura 4

Con objeto de determinar la velocidad a la que circula el agua por una tubería se le coloca un venturímetro de Hg, cuya sección es 30 cm^2 en la zona ancha y 10 cm^2 en la zona estrecha. Si el caudal del agua que circula por la tubería es de 4ml/s, obtened la velocidad a la que circula dicha agua por la tubería, la constante k del aparato y el desnivel entre las columnas de Hg.

En este caso, procederemos también como en los anteriores y aplicaremos Bernoulli entre los puntos A y B de la figura:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v_B^2 + \rho \cdot g \cdot h_B$$

Si tenemos en cuenta que $h_A = h_B$: $P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v_B^2$ (5)

De acuerdo con la ecuación de continuidad, se cumplirá, además, que: $v_B = \frac{S_A}{S_B} \cdot v_A$

Sustituyendo v_B en la ecuación y despejando: $$v_A = \sqrt{\frac{2(P_A - P_B)}{\rho\left(\frac{S_A^2}{S_B^2} - 1\right)}} \quad (6)$$

Por consideraciones hidrostáticas:

$P_C = P_D \rightarrow P_A + \rho \cdot g \cdot h_A = P_B + \rho \cdot g \cdot (h_A - h_{Hg}) + \rho_{Hg} \cdot g \cdot h_{Hg}$.

Y simplificando: $P_A - P_B = g \cdot h_{Hg} \cdot (\rho_{Hg} - \rho)$

Sustituyendo la expresión de P_A-P_B obtenida, en la ecuación (6):

$$v_A = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h_{Hg} \cdot (\rho_{Hg} - \rho)}{\rho\left(\frac{S_A^2}{S_B^2} - 1\right)}} \quad (7)$$

Teniendo en cuenta que: $S_A = \pi \cdot \frac{D_A^2}{4}$ y que: $S_B = \pi \cdot \frac{D_B^2}{4}$

(D_A y D_B son los diámetros de las secciones transversales de tubería centradas en A y B respectivamente).

La ecuación (7) puede expresarse finalmente como:

$$v_A = \sqrt{\frac{2g(\rho_{Hg} - \rho)}{\rho\left(\frac{D_A^4}{D_B^4} - 1\right)}} \cdot \sqrt{h_{Hg}}$$

La primera raíz cuadrada es una constante (k) característica del aparato por lo que, en la práctica, el uso de este dispositivo es muy simple, ya que, conocido el valor de k, la velocidad con que circula el agua en el punto A, se puede determinar como:

$$v_A = k \cdot \sqrt{h_{Hg}}$$

Con este dispositivo no tenemos el inconveniente de los anteriores ya que aquí medimos, con la columna de mercurio (de mucha más densidad que el agua), la diferencia de presión entre A y B, directamente.

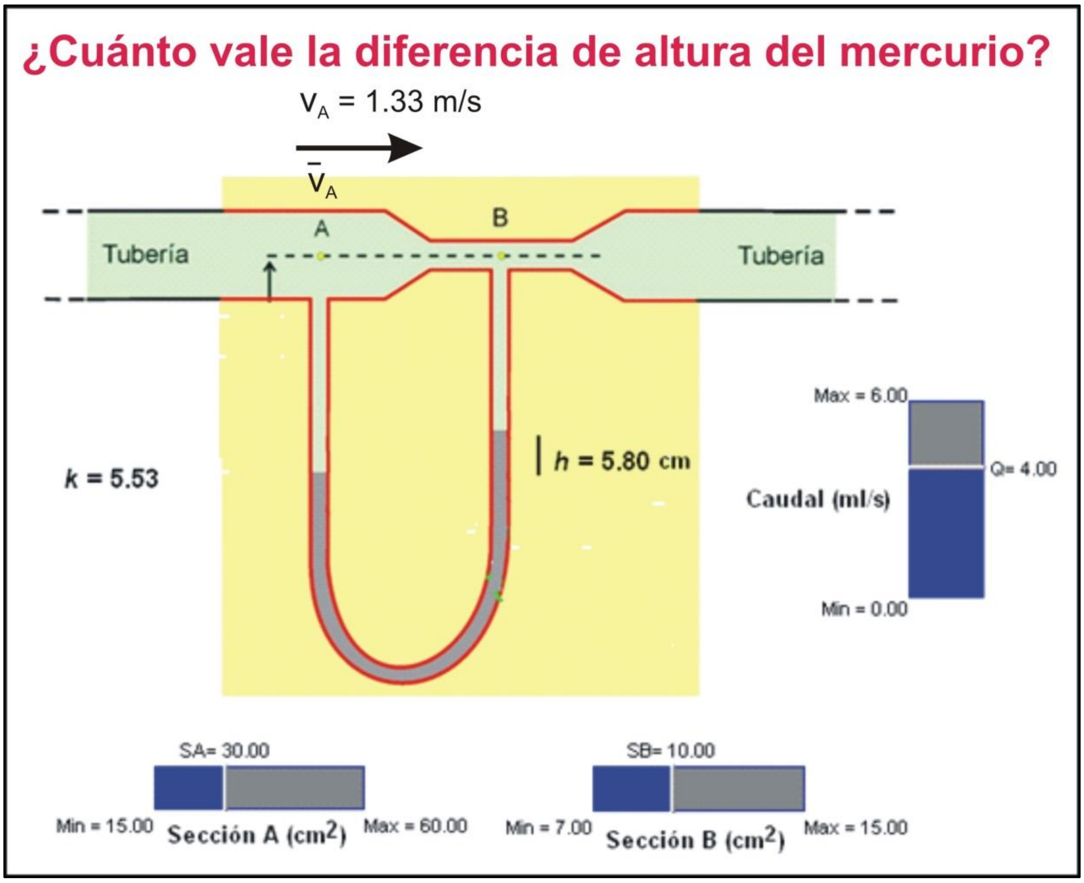
Para los valores considerados anteriormente, la constante k resulta:

$$k = \sqrt{\frac{2g\cdot(\rho_{Hg}-\rho)}{\rho\cdot\left(\frac{D_A^4}{D_B^4}-1\right)}} = \sqrt{\frac{2\cdot 9'8\cdot(13534-1000)}{1000\cdot(9-1)}} = 5'54\ m^{1/2}\cdot s^{-1}$$

La velocidad del agua por la tubería será: $v_A = \frac{Q}{S_A} = \frac{0'004}{0'003} = \frac{4}{3} = 1'33\ m/s$

Y la diferencia de altura entre las columnas de Hg será: $\mathrm{h_{Hg}} = \frac{\mathrm{v_A^2}}{\mathrm{k^2}} = 0'0579\ \mathrm{m} = 5'79\ \mathrm{cm}$

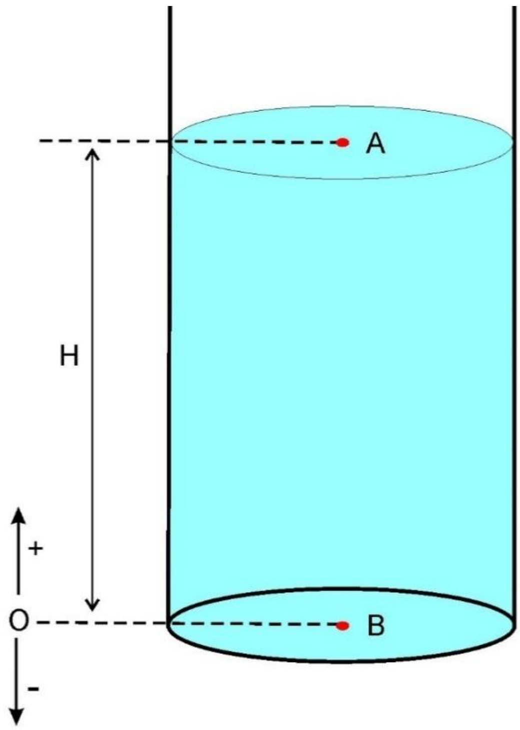
Para reforzar este problema hemos construido una animación *Modellus*, que obtiene estos resultados y en la pantalla proporciona tres controladores manuales, con los que los alumnos pueden modificar el caudal que circula por la tubería y las áreas transversales en A y C, viendo cómo afectan estas modificaciones al aspecto y el valor de la diferencia de alturas entre las dos columnas de mercurio. La figura siguiente muestra el aspecto de la animación para los datos anteriormente expuestos.



Disponible en: http://rsefalicance.umh.es/fisica.htm.

6. Un depósito de 2 m de diámetro se llena con agua hasta una altura de 3 m. Si en su base se practica un orificio de 2 cm de diámetro, determinad el nivel de agua en el depósito en cualquier instante, el tiempo total de vaciado y la velocidad con que sale el agua en cualquier instante.

En la figura siguiente se ha representado de forma esquemática la situación planteada en el enunciado. En ella, H corresponde a la altura inicial a la que se encuentra el nivel del agua (3 m). El punto A, situado en el centro de la superficie superior de la columna de agua, desciende conforme se va vaciando el depósito pasando desde una posición inicial (dada por h_A = H), hasta una posición final (h_A = 0) en el instante que se ha vaciado el depósito.



En principio, podemos pensar que conforme vaya bajando el nivel del agua (dado por h_A) en el depósito, tanto la velocidad (v_A) con la que desciende el nivel del agua como la velocidad (v_B) con la que sale el agua por el pequeño orificio practicado en la parte inferior, irán disminuyendo con el tiempo. Por otra parte, es lógico plantear, a modo de hipótesis, que (a igualdad de los restantes factores) el tiempo total de vaciado del depósito será mayor cuanto mayor sea la altura inicial del agua, H, cuanto mayor sea el cociente S_A/S_B, y cuanto menor sea la gravedad, g.

Empezamos expresando la velocidad a la que desciende el nivel del agua. Dicha velocidad vendrá dada por la variación de h_A con el tiempo, cambiada de signo (ya que, al ir disminuyendo, es negativa):

$$v_A = -\frac{dh_A}{dt} \rightarrow -dh_A = v_A \cdot dt \quad (1)$$

Podemos tratar de expresar el nivel del agua, h_A, en función del tiempo, integrando en la ecuación anterior, para lo cual, necesitamos expresar primero la velocidad v_A en función de las magnitudes que nos interesen.

Aplicando Bernoulli a los puntos A y B de la figura, nos queda que:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v_B^2 + \rho \cdot g \cdot h_B$$

donde podemos simplificar teniendo en cuenta que $P_A = P_B = P_{atm}$

Aplicando la ecuación de continuidad:

$S_A \cdot v_A = S_B \cdot v_B \rightarrow v_B = \frac{S_A}{S_B} \cdot v_A$

Sustituyendo v_B en la expresión anterior y despejando:

$$v_A = \left(\sqrt{\frac{S_B^2 \cdot 2g}{S_A^2 - S_B^2}}\right) \cdot \sqrt{h_A} \quad (2)$$

En la ecuación (2), el término entre paréntesis es constante, mientras que h_A no lo es. La ecuación nos dice que la velocidad a la que desciende el nivel del agua va disminuyendo al mismo ritmo que lo hace $\sqrt{h_A}$. Obviamente, dicha velocidad, en el instante inicial ($h_A = H$), valdrá:

$$v_{A_0} = \left(\sqrt{\frac{S_B^2 \cdot 2g}{S_A^2 - S_B^2}}\right) \cdot \sqrt{H}$$

Mientras que, en el instante final ($h_A = 0$), valdrá 0

Sustituyendo (2) en (1):

$$-dh_A = \left(\sqrt{\frac{S_B^2 \cdot 2g}{S_A^2 - S_B^2}}\right) \cdot \sqrt{h_A} \cdot dt$$

Separando variables e integrando entre H y h (y entre 0 y t):

$$-\int_H^h \frac{dh_A}{\sqrt{h_A}} = \int_0^t \sqrt{\left(\frac{S_B^2 \cdot 2g}{S_A^2 - S_B^2}\right)} \cdot dt \rightarrow \left[-\frac{h_A^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_H^h = \sqrt{\left(\frac{S_B^2 \cdot 2g}{S_A^2 - S_B^2}\right)} \cdot t \rightarrow$$

$$2 \cdot \left(H^{\frac{1}{2}} - h^{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\left(\frac{S_B^2 \cdot 2g}{S_A^2 - S_B^2}\right)} \cdot t$$

y despejando:

$$h^{\frac{1}{2}} = H^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{S_B^2 \cdot g}{2(S_A^2 - S_B^2)}} \cdot t$$

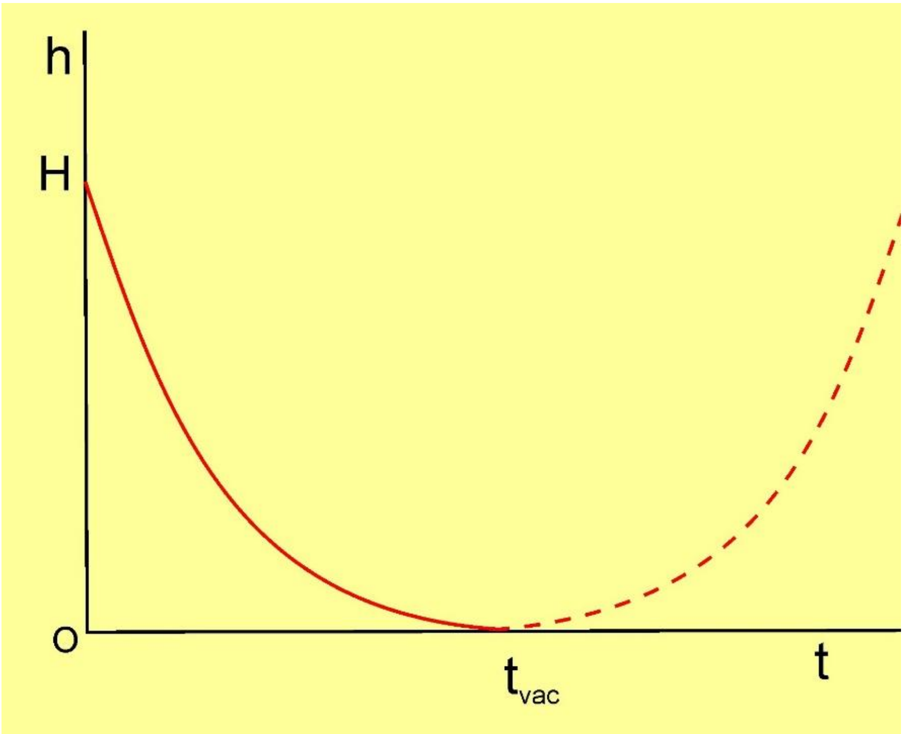
La última ecuación obtenida se puede expresar como:

$$h = \left(H^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{S_B^2 \cdot g}{2(S_A^2 - S_B^2)}} \cdot t\right)^2$$

Desarrollando el cuadrado del binomio:

$$h = \frac{S_B^2 \cdot g}{2(S_A^2 - S_B^2)} \cdot t^2 - \sqrt{\frac{S_B^2 \cdot 2g}{S_A^2 - S_B^2}} \cdot H^{\frac{1}{2}} \cdot t + H \qquad (3)$$

La ecuación (3) anterior, nos da el valor de la altura h que va teniendo el agua en cada instante "t". Podemos ver que se trata de una función parabólica de ramas hacia arriba y que, como es lógico, en el instante t = 0 se cumple que h = H y que para t = tiempo de vaciado (t_{vac}), se cumple que h = 0. (Esta función matemática "en nuestro problema" solo existe en el intervalo entre 0 y t_{vac}).



Derivando h = f(t) e igualando a 0 (condición de máximo o mínimo), determinaremos el instante en que se produce el mínimo (es decir, el tiempo de vaciado t_{vac}):

$$\frac{S_B^2 \cdot g}{S_A^2 - S_B^2} \cdot t_{vac} - \sqrt{\frac{S_B^2 \cdot 2g}{S_A^2 - S_B^2}} \cdot H^{\frac{1}{2}} = 0 \rightarrow t_{vac} = \frac{\sqrt{\frac{S_B^2 \cdot g}{S_A^2 - S_B^2}} \cdot \sqrt{2H}}{\frac{S_B^2 \cdot g}{S_A^2 - S_B^2}}$$

Y simplificando: $t_{vac} = \left(\sqrt{\frac{S_A^2 - S_B^2}{S_B^2} \cdot \frac{2}{g}}\right) \cdot \sqrt{H}$ (4)

El resultado literal anterior es dimensionalmente homogéneo (T en ambos lados) y corrobora las hipótesis que hemos formulado. Nos informa de que, para un depósito de unos valores determinados de S_A y S_B, el tiempo total de vaciado es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la altura inicial de líquido, de manera que, conocido el valor de la constante de proporcionalidad (lo que hay entre paréntesis), se puede conocer fácilmente el tiempo que tardará en vaciarse el depósito.

Nos plantearemos ahora la determinación de la velocidad de salida del agua en cualquier instante "t" del vaciado:

De la ecuación de continuidad, sabemos que, en cualquier instante del vaciado, se cumplirá que:

$$v_B = \frac{S_A}{S_B} \cdot v_A$$

Sustituyendo v_A por su expresión (2):

$$v_B = \frac{S_A}{S_B} \cdot \left(\sqrt{\frac{S_B^2 \cdot 2g}{S_A^2 - S_B^2}}\right) \cdot \sqrt{h}$$

Y sustituyendo ahora h: $v_B = -\left(\frac{S_A \cdot S_B \cdot g}{S_A^2 - S_B^2}\right) \cdot t + \frac{S_A}{S_B} \cdot \sqrt{\frac{S_B^2 \cdot 2g}{S_A^2 - S_B^2}} \cdot H^{\frac{1}{2}}$ (5)

Vemos que se trata de una función lineal que nos proporcionará el valor de la velocidad de salida (v_B) del agua por el agujero inferior del depósito en cualquier instante y tiene una validez general (siempre que el régimen sea estacionario y la energía se conserve).

Ahora bien, en nuestro caso se cumple que la superficie S_A es mucho mayor (10000 veces mayor) que la superficie S_B (concretamente: S_A = 3'14 m^2 y S_B = 3'14·10^{-4} m^2). Por tanto, se puede considerar que: $S_A^2 - S_B^2 \approx S_A^2$

Si introducimos esta simplificación en la ecuación (5) anterior, la velocidad de salida queda finalmente como:

$v_B = -(S_B \cdot g) \cdot t + \sqrt{2gH}$ (6a)

Si analizamos este resultado, nos podemos dar cuenta de que:

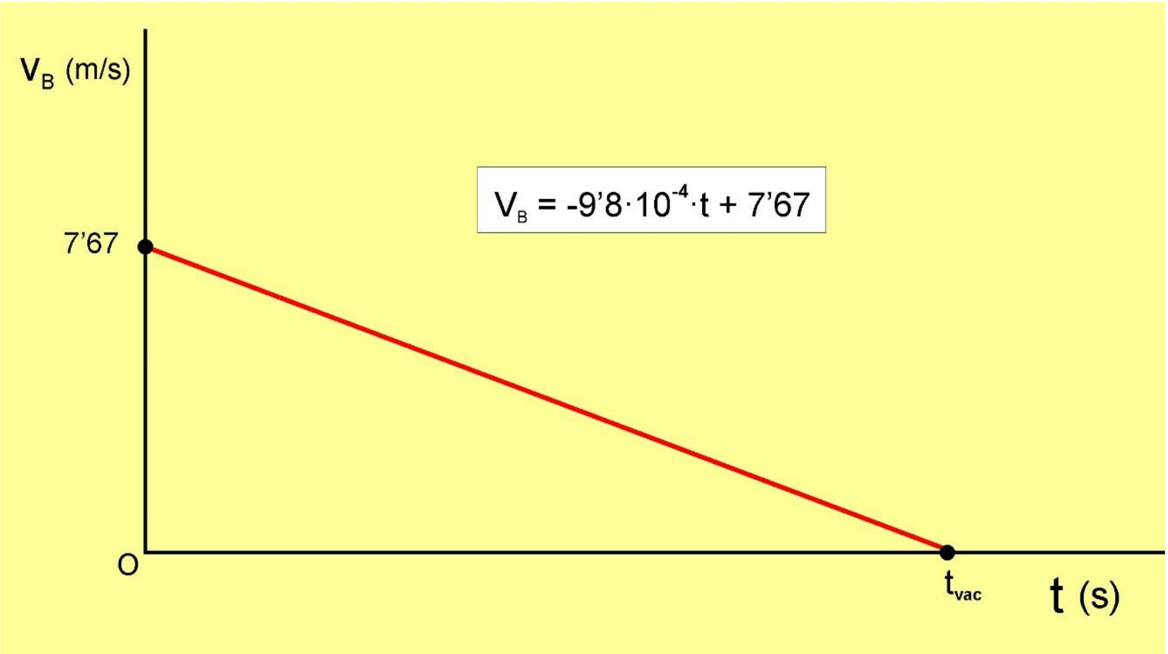
a) Es dimensionalmente homogéneo (L/T) en ambos lados
b) La velocidad de salida disminuye linealmente con el tiempo
c) Su valor inicial (para t = 0), que es su valor máximo, viene dado por: $\sqrt{2gH}$ = 7'67 m/s, y coincide con la velocidad correspondiente a un objeto dejado caer libremente desde una altura H. (Situación parecida a la que se planteó en el ejercicio 2 para el chorro de agua de un grifo).
d) Se cumplen varios casos límite evidentes, como, por ejemplo que si no hubiera gravedad (g=0), sería v_B=0 en todo instante, ya que en ese caso, obviamente, el depósito no se vaciaría.

Sustituyendo los valores numéricos en (6a) y operando:

$v_B = -9'8 \cdot 10^{-4} \cdot t + 7'67$ (6b)

Al ser muy pequeño el coeficiente de "t" (pendiente de la recta), sucederá que la variación de v con el tiempo, también lo será. Se puede comprobar que para que v disminuya tan solo el 1%, deben transcurrir más de 60 segundos.

Si representásemos gráficamente, se obtendría una línea recta de pendiente negativa, como la de la figura siguiente:



En cuanto al tiempo total de vaciado, si en la expresión general (4) realizamos la misma simplificación ($S_A^2 - S_B^2 \approx S_A^2$), obtenemos que:

$$t_{vac} = \frac{S_A}{S_B} \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}} \qquad (7)$$

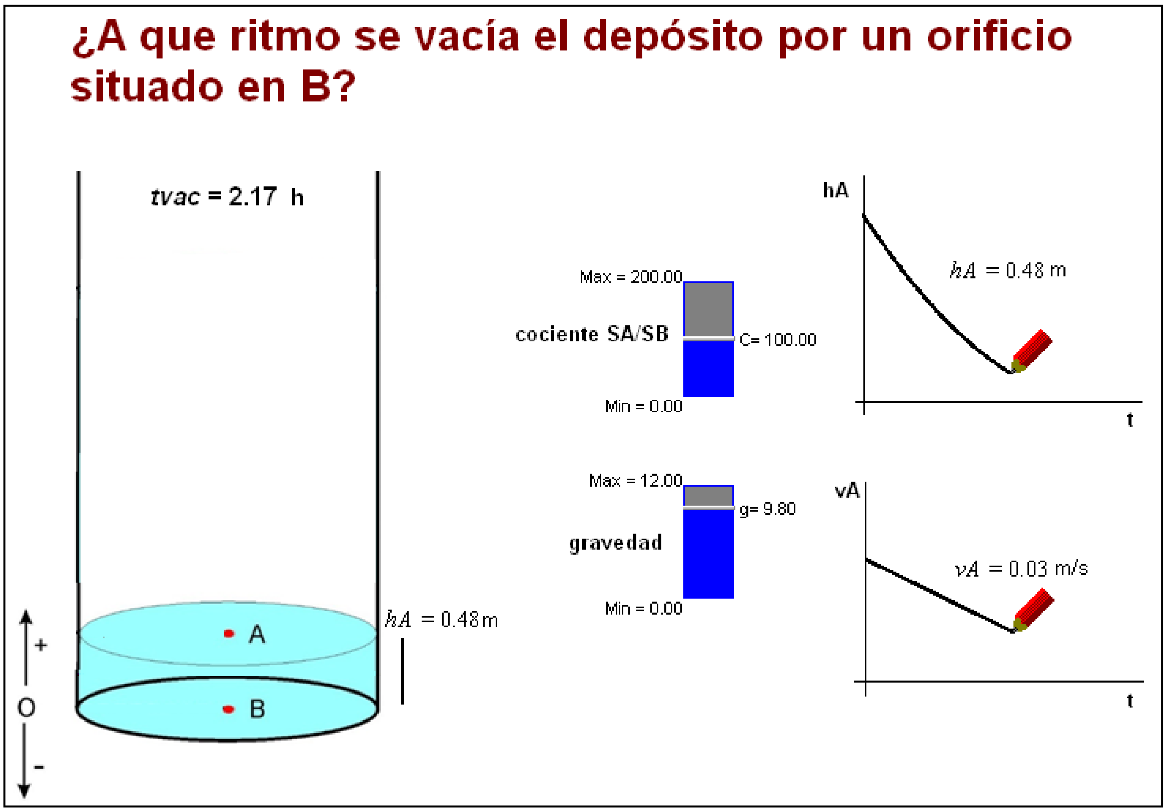
Si analizamos este resultado, vemos que, además de ser dimensionalmente homogéneo (T en ambos miembros de la igualdad), en él se contempla, como ocurría en el resultado más general obtenido antes (ecuación 4) que el valor del tiempo total de vaciado aumentará si (a igualdad de los restantes factores): aumenta el cociente S_A/S_B, aumenta H, o si disminuye "g". También contempla casos límites obvios como, por ejemplo, que si H = 0, entonces $t_{vac} = 0$ (ya está vacío) o que si g = 0, $t_{vac} = \infty$ (no se vaciaría nunca).

Sustituyendo valores numéricos en (7) y operando:

$$t_{vac} = \frac{S_A}{S_B} \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}} = \frac{3'14}{3'14 \cdot 10^{-4}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{9'8}} = 7'82 \cdot 10^3\ s = 2'17\ h$$

Para reforzar este problema hemos construido una animación *Modellus* que simula el proceso de vaciado del depósito, obtiene los resultados buscados y va representando paulatinamente las gráficas de la altura que tiene el agua, h_A, y de la velocidad de vaciado, v_A. También hemos colocado sendos cursores manuales con los que se puede modificar sobre la marcha el valor de la gravedad, g, y el del cociente entre S_A/S_B. Manipulando estos cursores, los alumnos pueden poner a prueba sus hipótesis y algunos casos límite.

La imagen siguiente muestra el aspecto de la pantalla en un instante intermedio del proceso de vaciado, para el caso en que los valores de los parámetros del problema coinciden con los que hemos adoptado aquí.



La animación está disponible en la Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física de la Sección Local de Alicante de la RSEF: http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm

7. Buscad información sobre el dispositivo denominado "Frasco de Mariotte" con objeto de explicar para qué sirve y en qué se basa su funcionamiento.

Consideremos el recipiente mostrado de forma esquemática en la figura 1 siguiente:

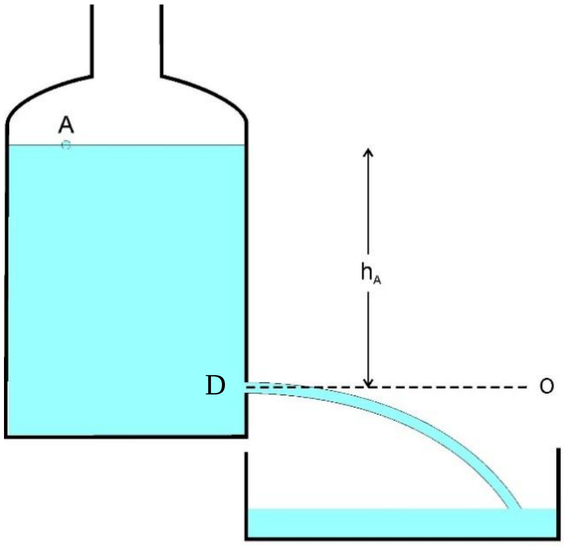


Figura 1

Podemos ver que se ha practicado un orificio (D) en su superficie lateral por el cual sale el líquido que contiene.

Sabemos que es posible determinar el valor v_D de la velocidad con que sale dicho líquido, sin más que aplicar Bernoulli a los puntos A y D. En efecto:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot h_A = P_D + \frac{1}{2}\rho \cdot v_D^2 + \rho \cdot g \cdot h_D \quad (1)$$

Considerando que $S_A \cdot v_A = S_D \cdot v_D$, y que, en este caso, $S_A >> S_D$, se cumplirá también que: $v_A << v_D$, por lo que podremos despreciar el sumando $\frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2$.

Además, sabemos que: $P_A = P_D = P_{atm}$ y que $h_D = 0$.

Aplicando las consideraciones anteriores en (1), nos queda: $\rho \cdot g \cdot h_A = \frac{1}{2}\rho \cdot v_D^2$

Y despejando: $v_D = \sqrt{2gh_A}$ (2)

El resultado anterior se conoce como "Teorema de Torricelli" y nos muestra que: La velocidad de salida de un líquido por un orificio practicado en la pared del recipiente que lo contiene, es numéricamente igual a la velocidad final que tendría un cuerpo que se dejase caer libremente desde una altura igual a la existente entre la superficie del líquido y el orificio. Podemos plantearnos ahora, *qué es lo que le ocurre al valor de esa velocidad conforme va descendiendo el nivel del líquido.*

Experimentalmente se puede comprobar que, al ir bajando el nivel del líquido, la velocidad de salida va haciéndose cada vez menor. Esta relación está implícita en el resultado anterior (2), en el que se ve que v_D disminuye conforme disminuye h_A y también se comentó en los ejercicios 2 y 6. Ahora bien, en determinadas situaciones (por ejemplo, en el vaciado de un depósito para llenar otros recipientes), nos puede interesar que dicha velocidad de salida se mantenga constante. *¿Cómo podemos conseguir esto?*

El científico francés Edme Mariotte, en el siglo XVII, elaboró una respuesta sencilla a esta pregunta. Basta tapar el recipiente con un tapón perforado al cual se acopla un tubo de vidrio en la forma que se muestra en la figura 2 adjunta.

La situación de partida que se observa en la figura, es una situación de equilibrio, en la que se cumple que la presión en los puntos A y B es la misma e igual a la presión atmosférica: $P_A = P_B = P_{atm}$.

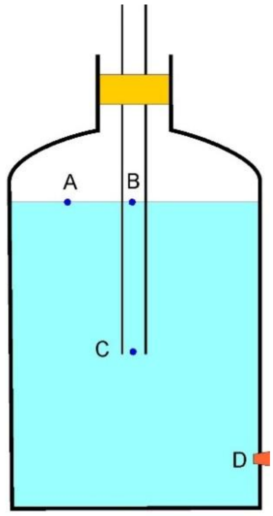


Figura 2

Al quitar el tapón que obstruye el agujero D, comienza a fluir el líquido y, consecuentemente, a descender el nivel en el frasco, con lo que el aire interior va ocupando cada vez un volumen mayor y, por tanto, la presión en el punto A va disminuyendo, mientras que la presión en B se mantiene igual a la atmosférica. Esto hace que el nivel de líquido en el interior del tubo (donde hemos situado el punto B), vaya disminuyendo cada vez más por debajo de A, de modo que, llega un momento en el que alcanza el punto C situado en el extremo inferior del tubo (ved figuras 3 y 4 siguientes).

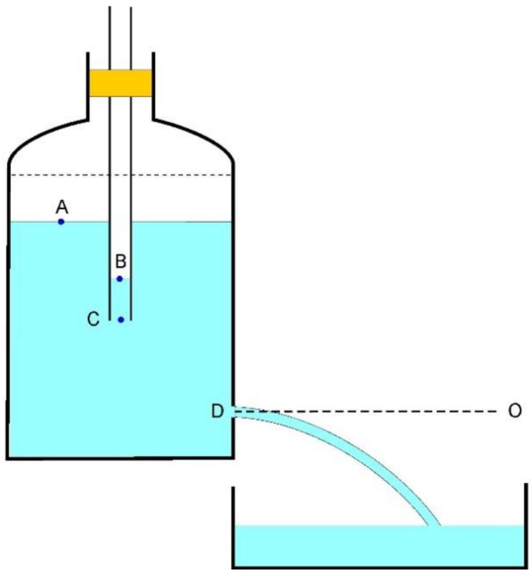


Figura 3

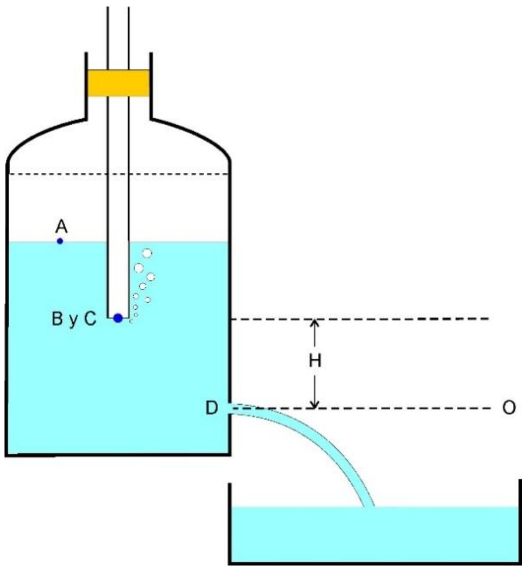


Figura 4

Dado que el agua sigue saliendo, seguirá descendiendo el nivel de A, pero en el caso de B, situado ya en el extremo inferior del tubo, esto no es posible y ello trae como consecuencia que se produzca una succión de aire exterior el cual entrará por el extremo superior del tubo y burbujeará por el inferior ascendiendo a la cámara situada por encima del punto A, de modo que, aunque A siga descendiendo, la presión en B se mantiene constante e igual a la atmosférica. A partir de ese instante, la velocidad de salida permanece constante y dada por:

$$v_D = \sqrt{2gH} \quad (3)$$

Puesto que depende de H, el valor de esta velocidad constante de vaciado se puede modificar, si se desea, subiendo o bajando el extremo inferior del tubo en el frasco.

La velocidad anterior, se mantendrá constante hasta que el nivel de A llegue al punto C. *¿Qué le ocurrirá a partir de ese momento?*

En el momento en que el nivel de A llegue al punto C, la situación será la misma que la descrita al comienzo de este ejercicio y la velocidad de salida del líquido restante situado por encima del orificio D pero por debajo del extremo inferior del tubo, irá disminuyendo conforme disminuya el nivel de A.

Históricamente, el principio del frasco de Mariotte fue utilizado en el siglo XIX en los quinqués y lámparas del alumbrado doméstico. Hoy se aprovecha en el desarrollo de varios dispositivos hidrodinámicos, que tienen importantes aplicaciones industriales y medioambientales. Algunos ejemplos de estos dispositivos son los lisímetros (se introducen en el suelo en lugares con vegetación y sirven para medir la evapotranspiración de los cultivos; ved figura 5 siguiente), los permeámetros de nivel constante (como su propio nombre indica, sirven para medir la permeabilidad de los materiales ante el paso de fluidos a través de ellos), los infiltrómetros (miden la capacidad de infiltración de los suelos) y los goteros, que se utilizan en los sistemas hidrodinámicos de riego por goteo.

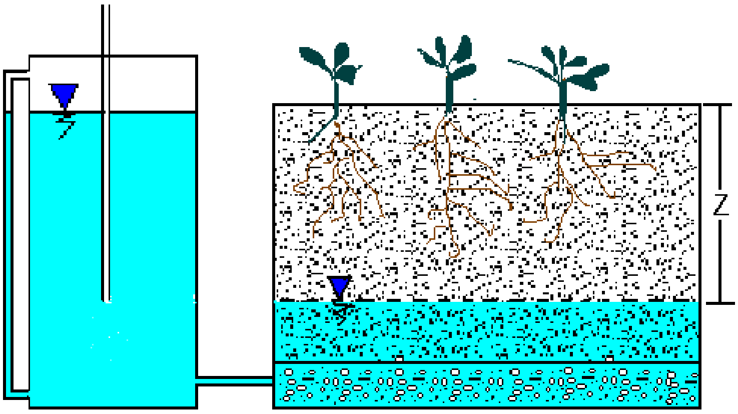
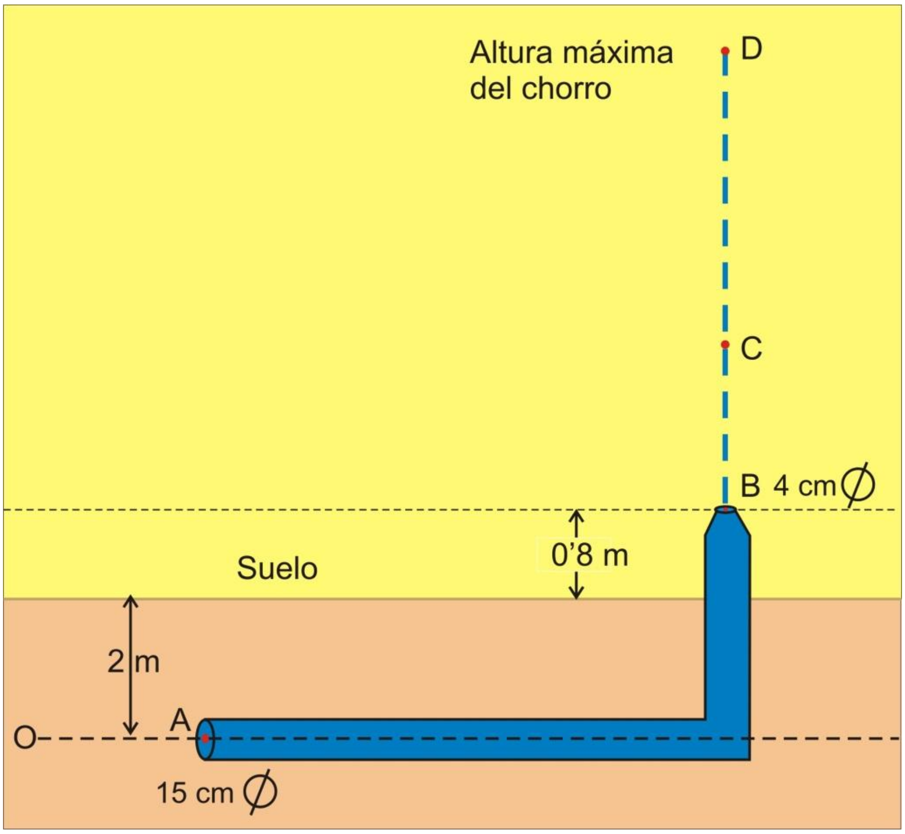


Figura 5: Representación esquemática de un lisímetro[4] en el que se simula la presencia de un nivel freático abastecido con una botella de Mariotte. Referencia: Tafur. H., Ríos, L. *Aplicaciones prácticas del principio del frasco o botella de Mariotte*. Disponible en:

https://www.academia.edu/35701141/Conferencia_Aplicaciones_botella_Mariotte

[4] El nivel freático viene marcado por la profundidad que alcanza la capa superior del agua acumulada (por filtraciones) en el subsuelo.

8. Se pretende que el chorro de agua del surtidor de una fuente alcance una altura máxima de 5 m (D) sobre la boca de salida (B). Teniendo en cuenta la información reflejada en la figura adjunta, determinad los valores de la velocidad y presión en el punto A (presión de suministro) así como la sección que tendrá el chorro en el exterior cuando haya ascendido 2 m (C) por encima de la boca de salida. (Resuélvase considerando que no hay pérdidas en la conducción ni rozamiento con el aire).



Podemos intentar resolver el problema aplicando Bernoulli entre el punto A y otro punto del trayecto recorrido por el agua del que dispongamos de más datos, como el punto D. En ese caso:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot h_A = P_D + \frac{1}{2}\rho \cdot v_D^2 + \rho \cdot g \cdot h_D$$

Dado que $P_D = P_{atm}$ y que $v_D = 0$, obtenemos que:

$$P_A = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_D - \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 \quad (1)$$

La expresión anterior, es consistente con el hecho de que, a igualdad de los restantes factores, P_A será mayor, cuanto mayor sea la altura máxima a alcanzar (h_D) y menor sea el valor de la velocidad en la boca de entrada (v_A). Sin embargo, no podemos hallar P_A, puesto que desconocemos v_A, por lo que será necesario determinar antes el valor de dicha velocidad.

¿Cómo podríamos hacerlo?

De acuerdo con la ecuación de continuidad, se cumple que: $S_A \cdot v_A = S_B \cdot v_B$

Y despejando: $v_A = \frac{S_B}{S_A} \cdot v_B$ (2)

Ciertamente, desconocemos v_B, pero podemos obtenerla si aplicamos Bernoulli a los puntos B y D, con lo que:

$$P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v_B^2 + \rho \cdot g \cdot h_B = P_D + \frac{1}{2}\rho \cdot v_D^2 + \rho \cdot g \cdot h_D$$

En la ecuación anterior, $P_B = P_D = P_{atm}$ y $v_D = 0$

Teniendo esto en cuenta y despejando, obtenemos que: $v_B = \sqrt{2g \cdot (h_D - h_B)}$ (3)

Sustituyendo v_B en la ecuación (2), obtendremos v_A:

$$v_A = \frac{S_B}{S_A} \cdot \sqrt{2g \cdot (h_D - h_B)}$$

$$v_A = \frac{\pi \cdot \frac{(4 \cdot 10^{-2})}{4}}{\pi \cdot \frac{(15 \cdot 10^{-2})}{4}} \cdot \sqrt{2 \cdot 9'8 \cdot (7'8 - 2'8)} = 2'64 \frac{m}{s}$$

Sustituyendo ahora v_A en la ecuación (1), podremos obtener el valor de P_A buscado:

$$P_A = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_D - \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 = 1'013 \cdot 10^5 + 10^3 \cdot 9'8 \cdot 7'8 - \frac{1}{2}10^3 \cdot 6'97$$

Y operando: P_A = 174 255'2 N/m^2 = 1'72 atm [5]

Para obtener la sección que tendrá el chorro de agua cuando haya subido 2 m por encima de la boca de salida, bastará aplicar de nuevo la ecuación de continuidad, pero, esta vez, entre los puntos B y C, con lo que:

$$S_B \cdot v_B = S_C \cdot v_C \rightarrow S_C = S_B \cdot \frac{v_B}{v_C} \quad (5)$$

Si analizamos el resultado literal, dado por la ecuación (5), nos daremos cuenta de que, dado que la velocidad del chorro va disminuyendo conforme este asciende ($v_C < v_B$), la sección del mismo deberá ir aumentando, por lo que $S_C > S_B$ (lógicamente, al descender ocurrirá lo contrario).

[5] Como ya comentamos anteriormente, N/m^2 = Pa (Pascal). El que no utilicemos aquí esta unidad internacional (Pa), obedece a la intención de evitar posibles confusiones que pueden generarse debido a los subíndices que habitualmente acompañan a la presión P.

También veremos que, para poder calcular S_C, necesitamos conocer antes v_C. Esto, podemos conseguirlo, aplicando de nuevo Bernoulli, pero esta vez, entre C y D. En efecto:

$$P_C + \frac{1}{2}\rho \cdot v_C^2 + \rho \cdot g \cdot h_C = P_D + \frac{1}{2}\rho \cdot v_D^2 + \rho \cdot g \cdot h_D$$

Teniendo en cuenta que $P_C = P_D = Patm$ y que $v_D = 0$:

$$P_{atm} + \frac{1}{2}\rho \cdot v_C^2 + \rho \cdot g \cdot h_C = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_D$$

Y despejando: $v_C = \sqrt{2g \cdot (h_D - h_C)}$ (6)

Sustituyendo ahora (3) y (6) en la ecuación (5) anterior, obtenemos finalmente que:

$$S_C = S_B \cdot \sqrt{\frac{(h_D - h_B}{(h_D - h_C}} \quad (7)$$

En el resultado literal anterior, se contempla, como así debe ser, el hecho de que cuanto más se aproxime el punto C al punto B, tanto más se aproximará la sección del chorro en C a la sección del chorro en B.

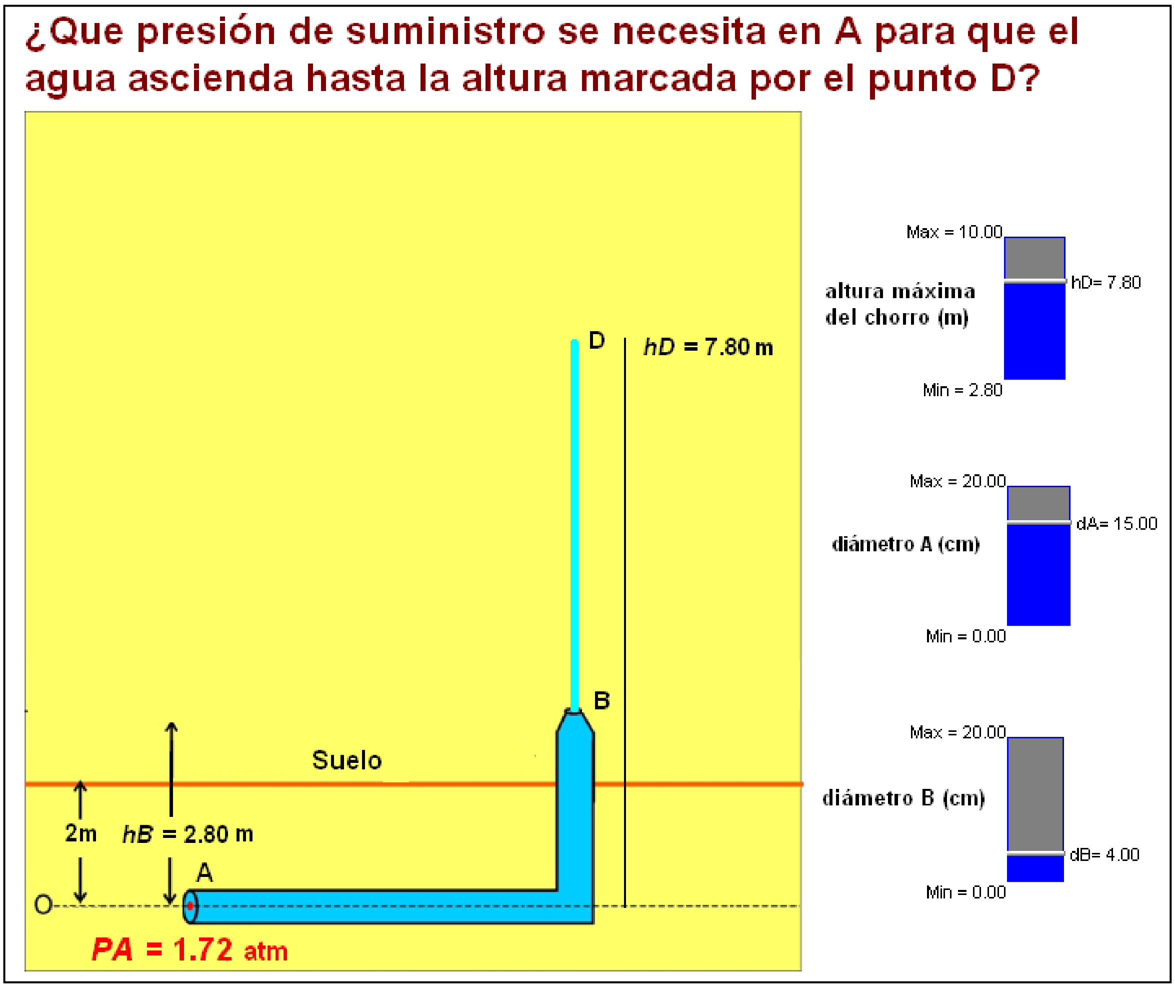
Para terminar, sustituyendo los valores numéricos correspondientes, obtenemos que:

$$S_C = \pi \cdot \frac{(4 \cdot 10^{-2})^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{(7'8 - 2'8)}{(7'8 - 4'8)}}$$

Y operando: $S_C = 12'57 \cdot 10^{-4} \cdot 1'29 = 16'2 \cdot 10^{-4}\ m^2 = 16'2\ cm^2$

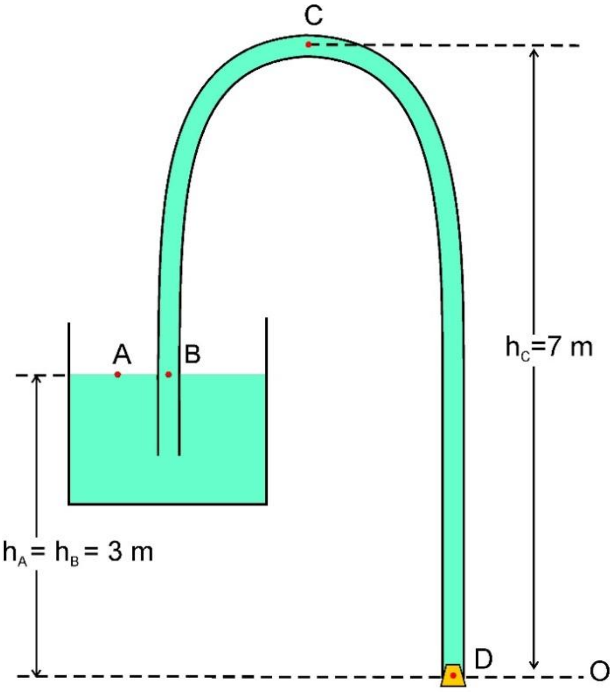
Para reforzar este problema hemos elaborado una animación *Modellus* que simula la situación y obtiene la presión de suministro buscada, P_A. Como hemos visto (ecuación 4), dicha presión, que hay que suministrar en el origen, depende, junto con otros factores, de la altura máxima del chorro de agua, h_D, y también de los diámetros de la tubería del surtidor en el punto de suministro y en la salida (d_A y d_B). Por ello, en la pantalla de la animación, hemos colocado tres controladores manuales con los que los alumnos pueden modificar estas magnitudes y poner a prueba sus hipótesis acerca de ellas. Si lo desean, también pueden entrar en la ventana de condiciones iniciales para modificar los valores del resto de parámetros de los que depende P_A (presión atmosférica, gravedad y densidad del líquido)

En la imagen siguiente, vemos su aspecto cuando los valores de los datos del problema coinciden con los que hemos adoptado aquí.



La animación y el programa necesario para hacerla correr están disponibles en la Web de Materiales para la enseñanza y la Divulgación de la Física de la Sección Local de Alicante de la RSEF: http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm

9. En el sifón de la figura, se mantiene tapada la boca en la que se encuentra el punto D. Se pide:



a) Presión en A, B, C y D
b) Velocidad (módulo) con que circulará el agua por el tubo y presión en cada uno de los puntos anteriores, una vez destapado dicho tubo.

Datos: Considerad que la presión atmosférica es P_{atm} = 1'013·10^5 N/m^2, que el líquido contenido es agua (ρ = 10^3 kg/m^3) y que la sección del depósito que contiene el agua es mucho mayor que la sección del tubo.

a) Como el agua se halla en equilibrio, podríamos determinar las presiones en los puntos que nos piden, utilizando la ecuación fundamental de la hidrostática. No obstante, también podemos aplicar el principio de Bernoulli, sin más que considerar que la velocidad es nula en todos los puntos del depósito y de la tubería, con lo que:

$$P_A + \rho g h_A = P_B + \rho g h_B = P_C + \rho g h_C = P_D + \rho g h_D$$

Y, teniendo en cuenta que $P_A = P_{atm}$ = 1'013·10^5 N/m^2 = 1 atm, tendremos:

Con A y B: $P_A + \rho g h_A = P_B + \rho g h_B$. Simplificando ($h_A = h_B$): $P_B = P_A$ = 1 atm

Con A y C: $P_A + \rho g h_A = P_C + \rho g h_C \rightarrow P_C = P_A - \rho g\cdot(h_C - h_A) = 1 - \frac{10^3\cdot 9'8\cdot 4}{1'013\cdot 10^5}$ = 0'613 atm

Con A y D: $P_A + \rho g h_A = P_D + \rho g h_D \rightarrow P_D = P_A + \rho g h_A = 1 + \frac{10^3\cdot 9'8\cdot 3}{1'013\cdot 10^5}$ = 1'29 atm

b) Al destapar el tubo, súbitamente, la presión en D pasa a valer 1 atm (hemos visto que antes valía 1’29 atm).

En ese mismo instante, en C, tendremos, por la izquierda, una presión de P_{atm}-ρg·4, mientras que, por la derecha, será de P_{atm}-ρg·7. Por tanto, sobre la sección circular que contiene a C, se ejercerá una fuerza neta hacia la derecha, rompiéndose el equilibrio inicial y desplazándose agua para alcanzar una situación estacionaria, en la que la nueva ecuación de Bernoulli será:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 + \rho g h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v_B^2 + \rho g h_B = P_C + \frac{1}{2}\rho \cdot v_C^2 + \rho g h_C = P_D + \frac{1}{2}\rho \cdot v_D^2 + \rho g h_D$$

-Si tenemos en cuenta que, tal y como se especifica en el enunciado, en este caso, la sección S_A es mucho mayor que la sección S del tubo ($S_B = S_C = S_D = S$), aplicando la ecuación de continuidad[6], está claro que la velocidad a la que desciende el nivel del agua en el depósito, v_A, será mucho más pequeña que la velocidad v a la que circula el agua por el interior del tubo ($v_B = v_C = v_D = v$), y, por tanto, podemos despreciar v_A.

-Por otra parte, sabemos que, $h_D = 0$ y que, en la nueva situación: $P_A = P_D = P_{atm} = 1$ atm

Si introducimos todo esto en la ecuación anterior, esta queda como:

$$P_{atm} + \rho g h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + \rho g h_B = P_C + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + \rho g h_C = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2$$

Considerando ahora A y D:

$$P_{atm} + \rho g h_A = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 \;\rightarrow\; v = \sqrt{2 g h_A}$$

Y sustituyendo valores: $v = \sqrt{2 \cdot 9'8 \cdot 3}$ = 7’67 m/s

Analicemos brevemente el resultado literal anterior: En él volvemos a encontrarnos con algo ya conocido (ved Teorema de Torricelli en problema 7), pero, además, nos muestra que para que el agua fluya en la situación descrita, es necesario que h_A sea mayor que 0, o, lo que es equivalente: que el nivel de la boca de salida (D) esté por debajo del nivel del recipiente (A). Esta es la explicación de por qué para poder transvasar un líquido (agua, vino, gasolina, etc.) de un depósito a otro mediante un tubo, no solo hay que llenar previa y totalmente el tubo con dicho líquido, sino que, además, hay que colocar el depósito receptor de modo que el nivel del líquido en el mismo quede por debajo del nivel existente en el depósito suministrador.

Vamos ahora a calcular los valores de la presión en los puntos A, B, C y D en la nueva situación (extremo inferior del tubo abierto y agua circulando en régimen estacionario):

Ya henos visto que, en esta nueva situación, se cumple que: $P_A = P_D = P_{atm}$

Si aplicamos de nuevo Bernoulli para A y B:

[6] En ejercicios anteriores ya hemos usado la ecuación de continuidad, según la cual, para un fluido que circula en régimen estacionario por una conducción, el caudal (dado por S·v) ha de ser constante y, por tanto, si disminuye S, aumenta v (y viceversa). Para este caso en concreto: $S_A \cdot v_A = S \cdot v$ donde $S_A >> S \rightarrow v_A << v$

$P_A + \rho g h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + \rho g h_B \rightarrow P_A = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 \rightarrow P_B = P_A - \frac{1}{2}\rho v^2 \rightarrow$

$$P_B = P_A - \frac{1}{2}\rho \cdot (2gh_A)$$

Y sustituyendo: $P_B = 1 - \frac{10^3 \cdot 9'8 \cdot 3}{1'013 \cdot 10^5}$ = 1-0'29 = 0'710 atm

El resultado literal anterior, nos muestra también que cuanto mayor sea la altura h_A, es decir, cuanto más alto se encuentre el nivel del líquido en el depósito del que se está extrayendo, respecto a la boca de salida del tubo por el que fluye, menor será el valor de P_B.

Finalmente, considerando A y C:

$$P_A + \rho g h_A = P_C + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + \rho g h_C$$

Si en la ecuación anterior, tenemos en cuenta que $v = \sqrt{2gh_A}$, nos queda:

$$P_A + \rho g h_A = P_C + \rho g h_A + \rho g h_C \rightarrow P_C = P_A - \rho g h_C$$

Y sustituyendo: $P_C = 1 - \frac{10^3 \cdot 9'8 \cdot 7}{1'013 \cdot 10^5}$ = 1-0'677 = 0'323 atm

Ya hemos visto que el funcionamiento de este dispositivo exige que $h_A > 0$ (es decir, que el nivel de líquido en el depósito de la izquierda esté por encima de la salida de la derecha). *Cabe plantearse, ahora, si existe alguna otra limitación para que el líquido fluya*.

1ª) Considerando A y C, hemos visto que se debe cumplir que:

$$P_A + \rho g h_A = P_C + \frac{1}{2} \cdot \rho v^2 + \rho g h_C$$

Teniendo en cuenta que $P_A = P_{atm}$ y despejando:

$$P_C + \frac{1}{2} \cdot \rho v^2 = P_{atm} + \rho g\ (h_A - h_C)$$

La presión atmosférica Patm = 1 atm, equivale a la presión existente en la base de una columna de agua de 10'34 m de altura. Introduciendo este dato en la ecuación anterior, nos queda:

$$P_C + \frac{1}{2} \cdot \rho v^2 = \rho g \cdot 10'34 + \rho g\ (h_A - h_C)$$

Y reagrupando: $P_C + \frac{1}{2} \cdot \rho v^2 = \rho g \cdot [10'34 - (h_C - h_A)]$

¿Qué nueva limitación a que fluya el agua queda contemplada en la ecuación anterior?

Como P_C no puede ser negativa, para que circule el agua de forma regular será necesario que: $h_C - h_A < 10'34$ m

2ª) Considerando ahora C y D:

Teniendo en cuenta que $P_D = P_{atm}$

$$P_C + \frac{1}{2}\cdot\rho v^2 + \rho g h_C = P_{atm} + \frac{1}{2}\cdot\rho v^2 \;\rightarrow\; P_C + \rho g h_C = \rho g \cdot 10'34 \;\rightarrow\; P_C = \rho g\cdot(10'34 - h_C)$$

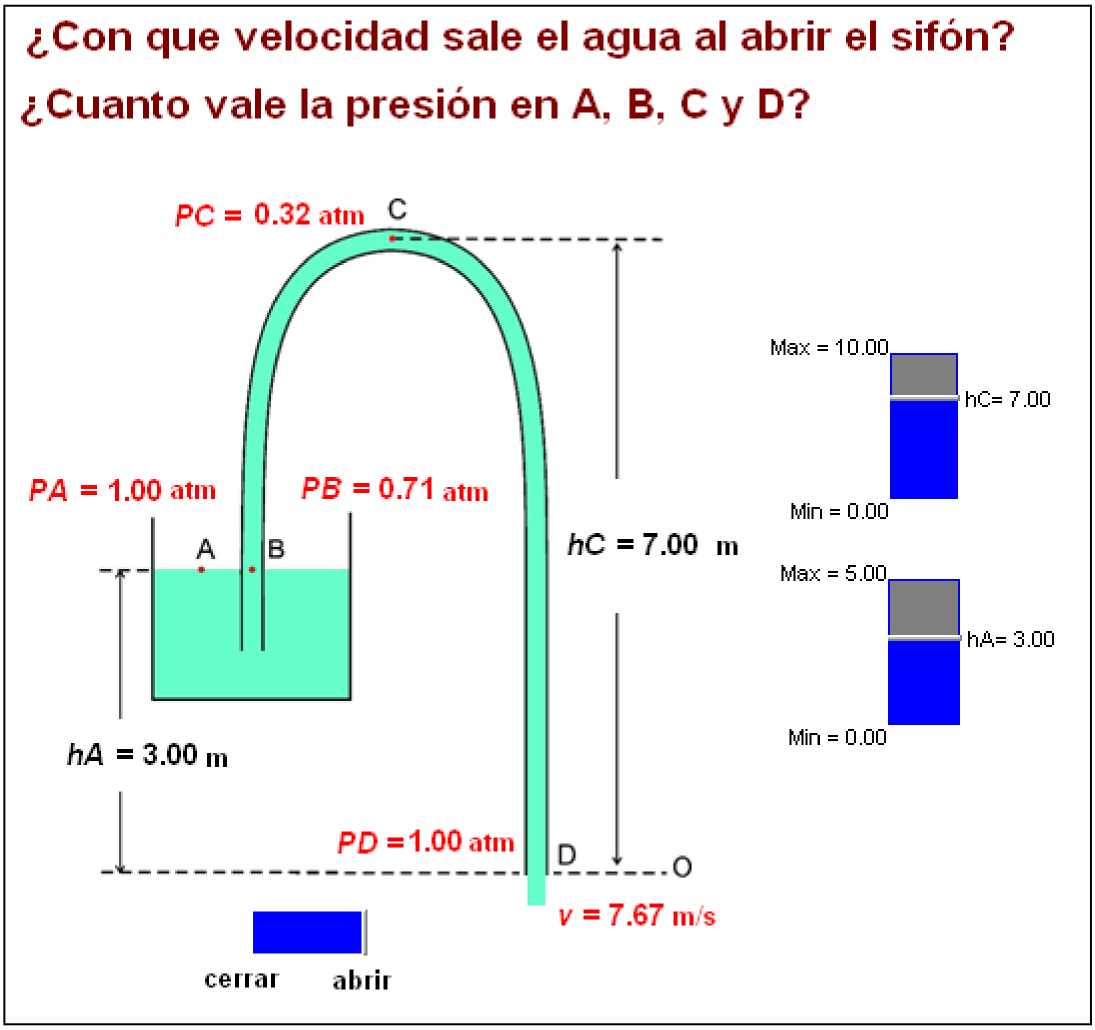
¿Qué otra limitación podemos observar analizando la última expresión obtenida?

Razonando igual que antes, como P_C no puede ser negativa, para que fluya el agua regularmente en el dispositivo manejado, deberá cumplirse también que: $h_C < 10'34$ m

Para reforzar este problema hemos elaborado una animación *Modellus* en la que se representa el esquema del sifón y se calculan todas las magnitudes que pide el enunciado. En la pantalla de la misma hemos colocado un cursor manual con el que los alumnos pueden dejar el sifón taponado o pueden destaponarlo, para comprobar, de este modo, cómo se modifican los valores de las presiones buscadas (en los puntos A, B, C y D) según esté el sifón abierto o cerrado. Cuando el sifón está abierto, la animación obtiene también el valor de la velocidad a la que circula el agua por el tubo y con la que, en consecuencia, sale por la boca del sifón (D).

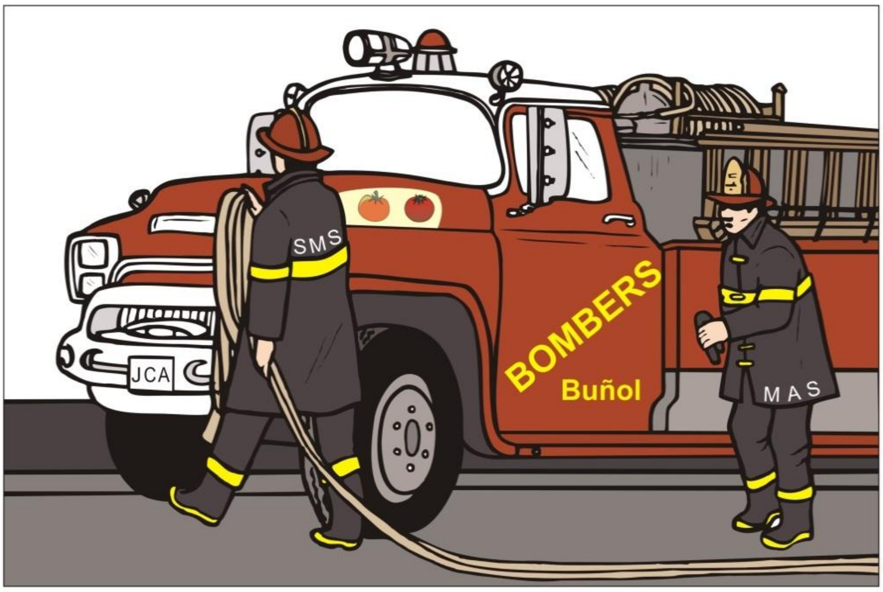
Por otra parte, también hemos añadido otros dos cursores manuales para que los estudiantes puedan modificar las alturas h_A y h_C, viendo cómo influyen tales modificaciones sobre las presiones buscadas y sobre la velocidad con la que sale el agua cuando se destapa el sifón. Manipulando estos cursores se pueden extraer algunas lecciones del problema. En efecto, al modificar el valor de la altura del punto más alto del sifón (h_C), se constata que cambia el valor de la presión ahí (en C), pero también se comprueba que no se altera la presión en el punto de salida (D), ni tampoco la velocidad con la que circula el agua y sale al abrir el sifón. Así debe ser, ya que estas dos magnitudes dependen enteramente del desnivel que exista entre el depósito y la boca de salida del sifón, pero no de la altura adicional que pueda recorrer el líquido dentro del tubo. Del mismo modo, al modificar la altura del nivel del depósito (h_A), se comprueba que, estando el sifón cerrado, esta modificación implica sendas alteraciones del valor de la presión en el punto más alto del sifón (C) y en la boca del mismo (D) (al modificar h_A se alteran los desniveles entre el depósito y cada uno de esos puntos), y, al abrir así el depósito, el agua circula y sale de él con una velocidad también diferente (mayor cuanto mayor sea el desnivel entre el depósito y la boca de salida).

En la imagen siguiente, vemos el aspecto de la animación cuando los valores de los datos del problema coinciden con los que hemos adoptado aquí y el sifón está abierto.



La animación y el programa necesario para hacerla correr están disponibles en la Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física de la Sección Local de Alicante de la RSEF: http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm

10. Un camión de bomberos está suministrando 400 l/min a presión de 7’5 atm a una manguera de 45 mm de diámetro, dotada de una punta de lanza cuyo diámetro de salida es 20 mm. Sabiendo que el bombero que utiliza la manguera se encuentra a 25 m de altura sobre el camión, se pide:

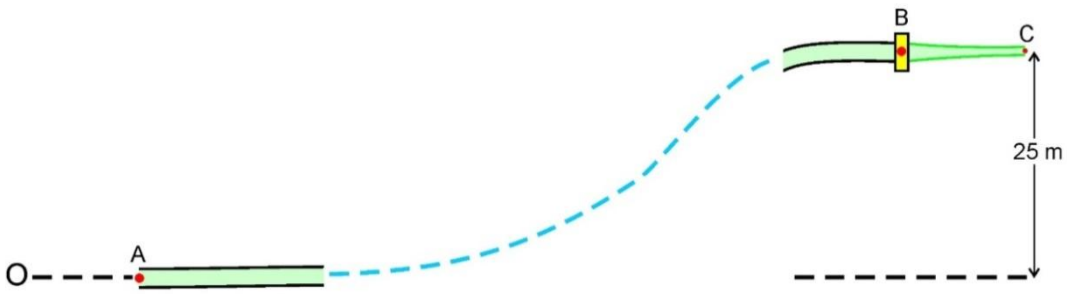


a) Velocidad del agua en el interior de la manguera y a la salida de la punta de lanza.
b) Presión con la que llega el agua a la punta de lanza.
c) Pérdida de carga que se produce en la manguera (se desprecia la correspondiente a la punta de lanza).

Datos: $P_{atm} = 1'013 \cdot 10^5$ N/m^2, $\rho = 10^3$ kg/m^3

a) En problemas anteriores ya hemos aplicado la ecuación de continuidad para resolver cuestiones de este tipo. Recordemos que dicha ecuación establece que en cualquier conducción por la que circula un fluido en régimen estacionario, el caudal o producto de la sección de la tubería por la velocidad del fluido en cualquier punto de la misma, ha de ser constante. Esto significa que en los ensanchamientos la velocidad será menor que en los estrechamientos. Por tanto, si lo aplicamos a este caso, deberemos comprobar cómo el valor de la velocidad del agua en el interior de la punta de lanza (más estrecha) será mayor que en el interior de la manguera (más ancha).

En la figura siguiente se ha representado de forma esquemática la manguera y la punta de lanza acoplada al final de la misma:



Si consideramos los puntos B (extremo de la manguera) y C (boca de salida de la punta de lanza) y aplicamos en ellos la ecuación de continuidad, resulta que el gasto "Q" o caudal de agua, podrá expresarse como:

$Q = S_B \cdot v_B = S_C \cdot v_C$

Puesto que el valor de Q es conocido, mediante la ecuación anterior, resulta inmediato el cálculo de ambas velocidades:

$$v_B = \frac{Q}{S_B} = \frac{\frac{400 \cdot 10^3}{60}}{\frac{\pi \cdot (45 \cdot 10^{-3})^2}{4}} = \frac{6'67 \cdot 10^{-3}}{1'59 \cdot 10^{-3}} = 4'19 \frac{m}{s}$$

$$v_C = \frac{Q}{S_C} = \frac{6'67 \cdot 10^{-3}}{\frac{\pi \cdot (20 \cdot 10^{-3})^2}{4}} = \frac{6'67 \cdot 10^{-3}}{3'14 \cdot 10^{-4}} = 21'24 \frac{m}{s}$$

Si nos fijamos en los resultados obtenidos, veremos que, como era de esperar, el valor de v_C es 5'1 veces mayor que el de v_B (al contrario de lo que ocurre con la sección, donde S_C es 5'1 veces menor que S_B).

b) Para calcular la presión con la que el agua llega a la punta de lanza, basta con aplicar Bernoulli entre los puntos B y C (despreciando la pérdida de carga que se pueda producir en la punta de lanza), con lo que:

$$P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v_B^2 + \rho g h_B = P_C + \frac{1}{2}\rho \cdot v_C^2 + \rho g h_C$$

Si tenemos en cuenta que $h_B = h_C$ y que $P_C = P_{atm}$:

$$P_B = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho \cdot (v_C^2 - v_B^2)$$

Y, sustituyendo: $P_B = 1'013 \cdot 10^5 + \frac{1}{2}10^3 \cdot (21'24^2 - 4'19^2) = 3'18 \cdot 10^5 \ N/m^2 = 3'14 \ atm$

c) Sabemos que en la manguera, debido a las pérdidas de energía por fricción, se produce una pérdida de carga. Para determinar su valor, aplicaremos Bernoulli con pérdidas entre A y B:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 + \rho g h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v_B^2 + \rho g h_B + P_{fAB}$$

Teniendo en cuenta que $v_A = v_B$, y que $h_A = 0$, nos queda: $P_A = P_B + \rho g h_B + P_{fAB}$

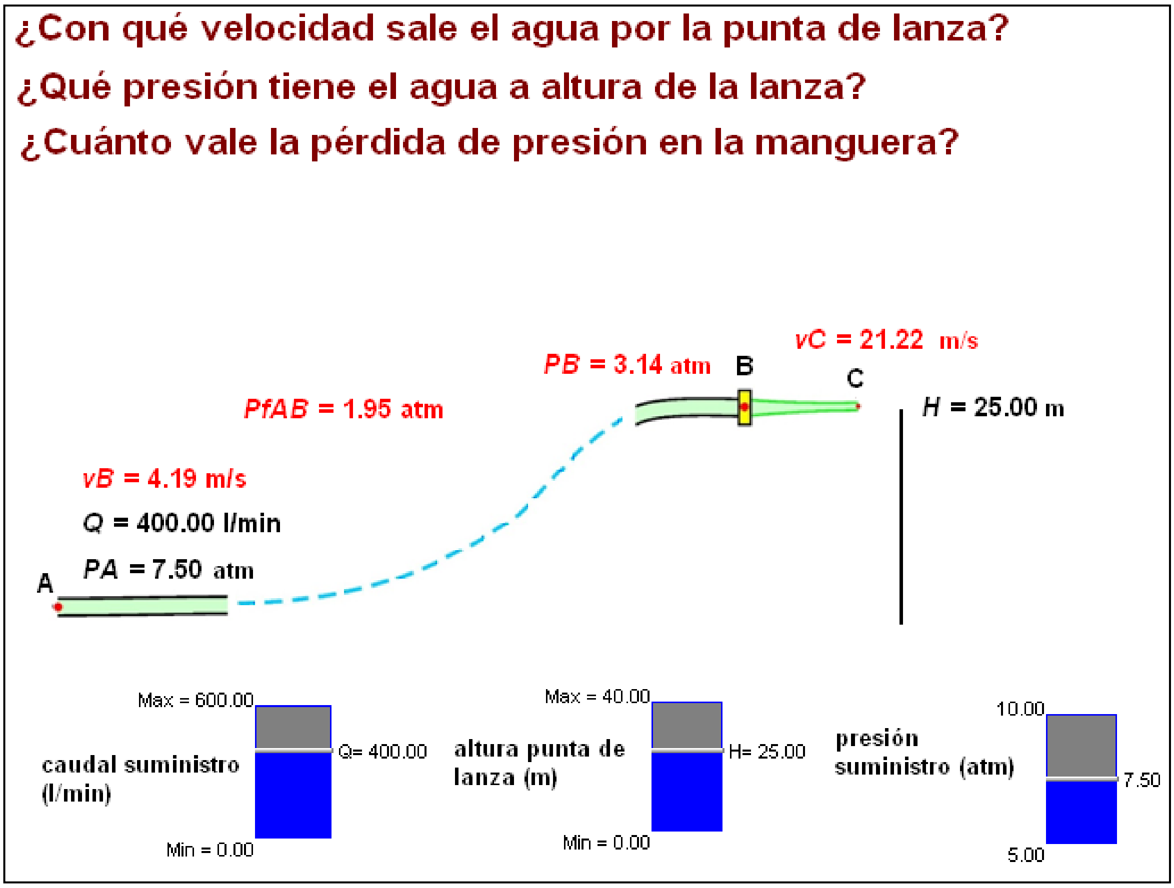
Despejando P_{fAB}: $P_{fAB} = P_A - P_B - \rho g h_B$. Y sustituyendo:

$P_{fAB} = (7'5 - 3'14) \cdot 1'013 \cdot 10^5 - 10^3 \cdot 9'8 \cdot 25 = 4'42 \cdot 10^5 - 2'45 \cdot 10^5 = 1'97 \cdot 10^5 \ N/m^2 = 1'94 \ atm$

Si analizamos el resultado literal anterior (así como su valor cuantitativo), vemos que en el tramo AB hay una pérdida de presión ($P_B < P_A$), debida tanto a la diferencia de altura como a las fricciones a lo largo de la conducción.

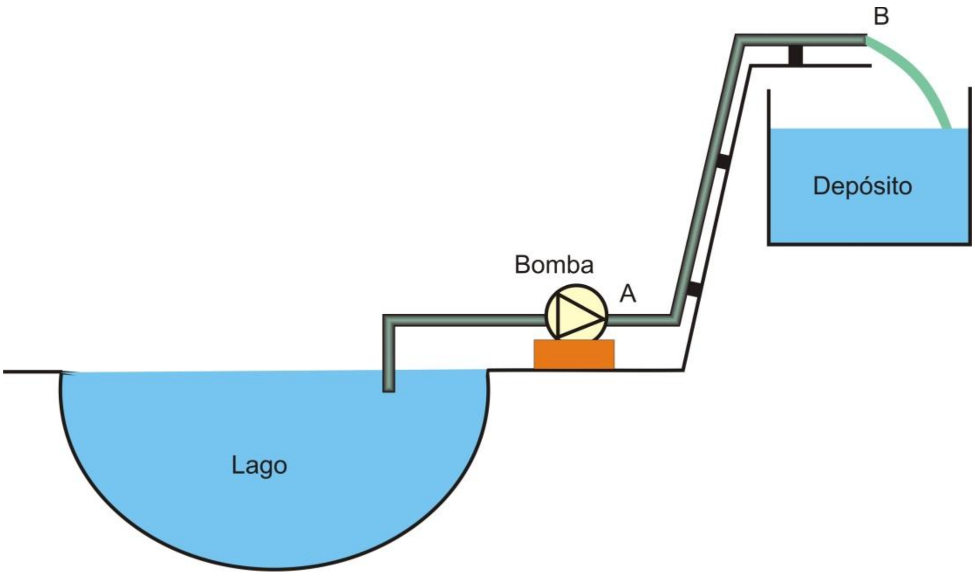
Para reforzar este problema hemos elaborado una animación *Modellus* que obtiene la velocidad del agua a la salida de la punta de lanza, la presión con la que esta llega a la punta de lanza y la pérdida de carga que se produce en la manguera. En la pantalla de la misma, se dispone de tres controladores manuales con los que los alumnos pueden modificar el caudal de suministro, la presión de suministro y la altura a la que se sitúa la punta de lanza con respecto al resto de la manguera, que se supone extendida en dirección horizontal.

En la imagen adjunta, vemos su aspecto cuando los valores de los datos del problema coinciden con los que hemos adoptado aquí.



La animación y el programa necesario para hacerla correr están disponibles en la Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física de la Sección Local de Alicante de la RSEF: http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm

11. Desde un lago se bombea agua a un depósito de 200 m^3, situado a 80 m de altura, mediante una tubería de 45 mm de diámetro (la figura no está a escala). Sabiendo que la bomba suministra un aumento de presión de 9 atm y un caudal de 300 l/min, se pide:



a) Potencia hidráulica desarrollada por la bomba.
b) Pérdida de presión (pérdida de carga) que se produce en la conducción.
c) Pérdida de energía hidráulica en el llenado del depósito.
d) Energía total perdida en el llenado, sabiendo que la bomba trabaja con un rendimiento del 60%.

a) La potencia hidráulica de la bomba es una característica de la misma y tiene un valor determinado, independiente de la conducción a la que se conecte.

Sabemos que la potencia, en general, es una magnitud que mide lo rápidamente que se realiza un trabajo y su valor en cualquier instante, se puede obtener mediante la derivada del trabajo respecto del tiempo.

En nuestro caso, si denominamos como F_{ent} y F_{sal} a la fuerza a la entrada y a la salida de la bomba respectivamente y "de" a un desplazamiento infinitesimal del agua a lo largo de su trayectoria por el interior de la bomba, tendremos:

$$P_{hidr} = \frac{dW_{hidr}}{dt} = \frac{(F_{sal}-F_{ent})\cdot de}{dt} = \frac{(P_{sal}-P_{ent})\cdot S\cdot de}{dt} = \frac{(P_{sal}-P_{ent})\cdot dV}{dt}$$

(En la ecuación anterior, hemos sustituido *F* por *P·S*, tanto a la entrada como a la salida y *S·de* por *dV*).

Y si tenemos en cuenta que *dV/dt* = Q (caudal o gasto), obtenemos:

$$P_{hidr} = (P_{sal} - P_{ent}) \cdot Q$$

Vemos que la potencia hidráulica es constante, puesto que tanto la diferencia de presiones como el caudal, también lo son.

Sustituyendo los valores numéricos correspondientes (en unidades internacionales):

$$P_{hidr} = (P_{sal} - P_{ent}) \cdot Q = 9 \cdot 1'013 \cdot 10^5 \cdot \frac{300\cdot10^{-3}}{60} = 4558'5 \text{ W}$$

b) Considerando los puntos A y B de la figura y aplicando Bernoulli (con pérdidas):

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + \rho g h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + \rho g h_B + P_f$$

Teniendo en cuenta que: $P_A = P_{bomba}$, $P_B = P_{atm}$, $v_A = v_B$ y que $h_A = 0$:

$$P_{bomba} - P_{atm} = \rho g h_B + P_f \rightarrow P_f = (P_{bomba} - P_{atm}) - \rho g h_B$$

Es decir, usando una bomba determinada (que aportará al agua un determinado incremento de presión), la pérdida de presión en la tubería resulta mayor cuanto menor sea la altura hasta la que se quiera subir el agua.

En este caso, sustituyendo valores obtenemos:

$$P_f = 9 \cdot 1'013 \cdot 10^5 - 10^3 \cdot 9'8 \cdot 80 = 1'277\cdot10^5 \text{ N/m}^2 = 1'26 \text{ atm}$$

c) Tal y como se trató en el problema 1 de este tema, P_f, también se puede considerar como energía perdida por unidad de volumen. Podemos, pues, escribir que:

$$P_f = 1'277\cdot10^5 \text{ J/m}^3$$

Por tanto, la energía perdida en la conducción cuando se llena completamente el depósito, vendrá dada por:

$$W_f = P_f \cdot V_{dep} = 1'277\cdot10^5 \cdot 200 = 2'554 \cdot 10^7 \text{ J} = 7'1 \text{ kWh}$$

Para calcular la energía hidráulica que se pierde[7] en el llenado del depósito, es necesario sumar al valor anterior, la energía cinética con la que el agua llega al depósito. Para calcular esta, hemos de hallar el valor de la velocidad con la que circula el agua por la tubería:

Sabemos que $Q = v\cdot S$ de donde: $v = Q/S$

Sustituyendo los valores numéricos: $v = \dfrac{\frac{300\cdot10^3}{60}}{\pi\cdot\frac{(45\cdot10^{-3})^2}{4}} = 3'14$ m/s

Con lo que: $E_c = mv^2/2 = 200\cdot10^3\cdot3'14^2/2 = 985\,960$ J = 0'27 kWh

[7] Naturalmente, dicha energía no desaparece (lo que violaría el principio de conservación de la energía). Se denomina energía “perdida” porque dicha energía no es útil, ya que se halla repartida como energía interna entre todas las partículas que conforman el sistema considerado.

Luego, la energía hidráulica perdida en el proceso de llenado, será:

$E_{hidr\,p} = W_f + E_c$ = 7’1 + 0’27 = 7’37 kWh

d) La energía evaluada en el apartado anterior es solo la pérdida de energía hidráulica en la conducción. Para determinar la energía que se pierde, en total, durante el proceso de llenado, debemos considerar también la energía “perdida” en la propia bomba, ya que, al tratarse de un dispositivo mecánico, existen pérdidas relevantes debidas a las fricciones que se producen en su interior.

El rendimiento de la bomba, nos relaciona la energía hidráulica obtenida (E_{hidr}) con la energía consumida por esta (E):

$$\eta = \frac{E_{hidr}}{E}$$

Por otra parte: $E_{hidr} = E_{hidr\,u} + E_{hidr\,p}$

En la ecuación anterior:

$E_{hidr\,u}$ = Energía hidráulica útil[8]= mgh = ρVgh = $10^3 \cdot 200 \cdot 9'8 \cdot 80 = 1'568 \cdot 10^8$ J = 43’56 kWh

Sustituyendo:

$$\eta = \frac{E_{hidr}}{E} = \frac{\mathrm{E_{hidru}} + \mathrm{E_{hidrp}}}{\mathrm{E}} \rightarrow 0'6 = \frac{43'56 + 7'37}{E} = \frac{50'93}{E}$$

Y despejando: E = 50’93/0’6 = 84’88 kWh

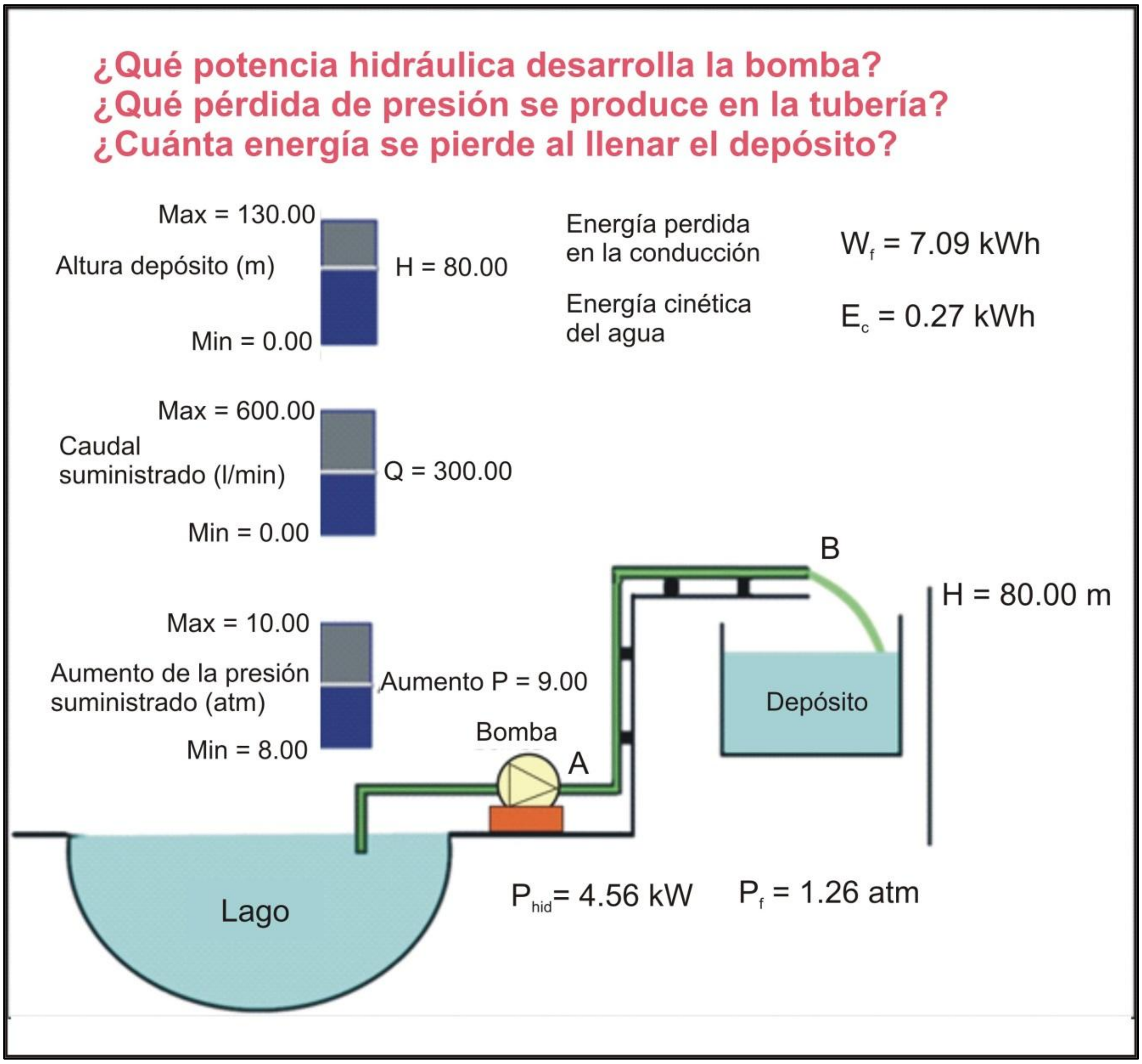
Luego, la energía total perdida (E_p) en el llenado será:

$E_p = E - E_{hidr\,u}$ = 84’88 -43’56 = 41’32 kWh

Los estudiantes pueden reforzar este problema usando una animación *Modellus* que calcula todas las magnitudes buscadas. En la pantalla disponen de tres controladores manuales con los que se puede modificar la altura a la que se quiere elevar el agua, el caudal de suministro, y el aumento de presión que aplica la bomba. Manipulando dichos controladores pueden poner a prueba sus hipótesis y verificar algunos casos límite evidentes (por ejemplo, si el caudal fuera cero, Q=0, también lo sería la energía cinética del agua, Ec=0).

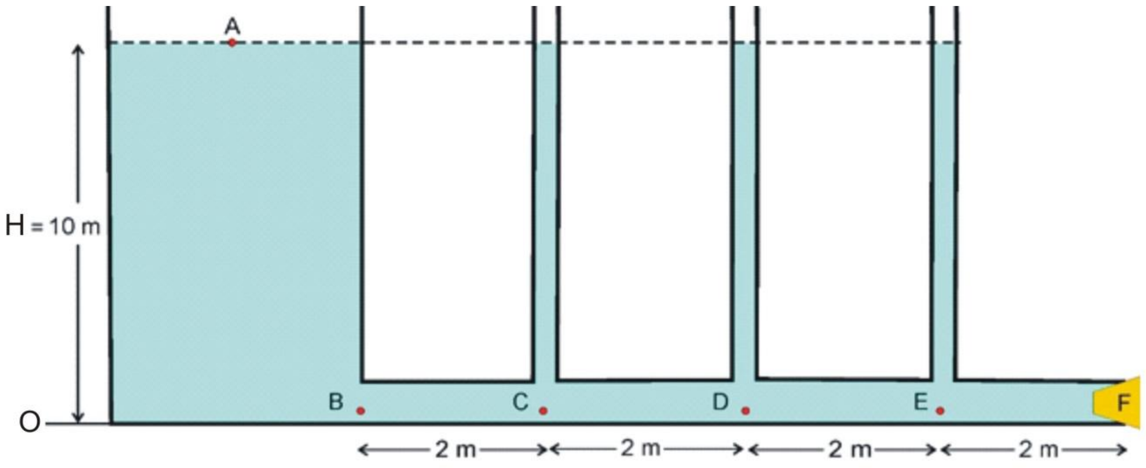
En la imagen adjunta, vemos el aspecto de la animación cuando los valores de los datos del problema coinciden con los que hemos adoptado aquí.

[8] Llamamos energía hidráulica útil a la parte de la energía hidráulica suministrada por la bomba que queda almacenada en el depósito como energía potencial gravitatoria del fluido.



La animación y el programa necesario para hacerla correr están disponibles en la Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física de la Sección Local de Alicante de la RSEF: http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm

12. Determinad la velocidad del agua en la boca de salida y los niveles que se producirán en los tubos, al quitar el tapón, en los siguientes casos:



a) Suponiendo que no haya ninguna pérdida de energía mecánica.
b) Existe una pérdida lineal de 0'08 atm/m en la conducción.

Datos: El dibujo no está a escala. Considerad que la sección del depósito es mucho mayor que la sección de la conducción. 1 atm = 1'013·10^5 N/m^2. Densidad agua ρ = 10^3 kg/m^3.

a) Vamos a analizar, en primer lugar, lo que sucederá al quitar el tapón suponiendo el caso ideal de que no haya ninguna pérdida de energía mecánica. En este supuesto, podremos aplicar la ecuación de Bernoulli a los puntos A, B, C, D, E y F, representados en la figura, en la forma:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 + \rho g h_A = \dots\dots\dots\dots = P_F + \frac{1}{2}\rho \cdot v_F^2 + \rho g h_F$$

Considerando el origen de alturas representado, sabemos que:

$h_A = H$ y que $h_B = h_C = h_D = h_E = h_F = 0$

También se cumplirá que: $P_A = P_F = P_{atm}$ y que: $v_B = v_C = v_D = v_E = v_F = v$

Por otra parte, dado que, tal y como se especifica en el enunciado, la sección del depósito (S_A) es mucho mayor que la sección de la conducción (S), según la ecuación de continuidad, la velocidad v_A a la que desciende el nivel del depósito será mucho menor que la velocidad v a la que circula el agua por la conducción, lo que nos permitirá despreciar el sumando $\frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2$.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, la ecuación de Bernoulli queda como:

$$P_{atm} + \rho g H = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 = \dots\dots\dots = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2$$

De donde se concluye que:

$\rho g H = \frac{1}{2}\rho \cdot v^2$ (1)

$P_B = P_C = P_D = P_E = P_{atm}$ (2)

De la ecuación (1) se obtiene que la velocidad del agua en cualquier punto de la tubería (en la situación ideal considerada) viene dada por:

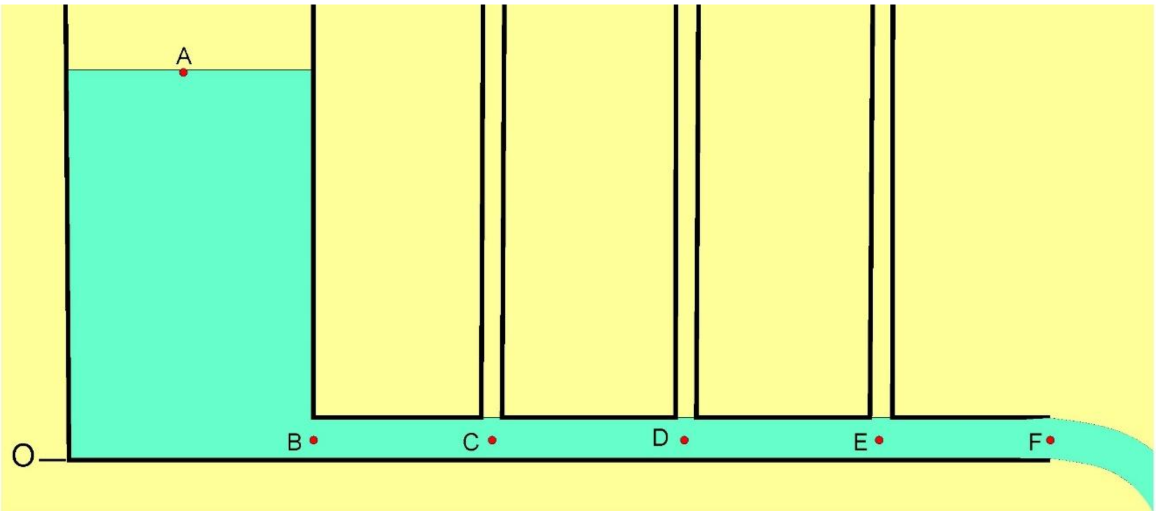
$$v = \sqrt{2gH} \quad (3)$$

Y sustituyendo los valores numéricos: $v = \sqrt{2 \cdot 9'8 \cdot 10}$ = 14 m/s

Démonos cuenta que este valor se dará en el momento de quitar el tapón, cuando en el depósito el nivel sea 10 m. A medida que H disminuya, ira disminuyendo v según refleja la expresión (3).

El resultado literal obtenido, coincide con el de otros problemas en los que se planteaba una cuestión similar y muestra, como ya se indicó en ellos, que la velocidad de salida del líquido coincide con la velocidad que tendría un objeto dejado caer desde una altura igual al nivel inicial de dicho líquido, cuando llegase a la boca de salida (condiciones ideales, sin rozamientos).

De la ecuación (2) se extrae la conclusión de que la presión en cada uno de los puntos considerados es igual a la presión atmosférica. Dado que los tubos verticales están abiertos a la atmósfera, ello nos indica que la altura de agua en cada uno de dichos tubos, será 0, tal y como se representa en la figura siguiente:



Por tanto, en la situación ideal considerada (no hay pérdidas de energía mecánica), una vez quitado el tapón y alcanzado el régimen estacionario, el nuevo nivel del agua (dado por h') en los tubos, será:

$$h'_C = h'_D = h'_E = 0 \quad (4)$$

Cabe interpretar que la altura geométrica del punto A se invierte en altura cinética en los puntos B, C, D, E y F.

Los resultados anteriores, han sido obtenidos considerando una situación ideal en la que no se produciría ninguna pérdida de energía mecánica. Sin embargo, sabemos que en la realidad esto no ocurre y que, debido a la fricción y otras causas, la energía mecánica no se conserva. Cabe, pues, plantearse, qué es lo que ocurrirá con dichos resultados (cómo cambiarán), cuando la situación se aproxime más a una situación real. Esto es lo que se plantea en el siguiente apartado:

c) Para empezar, parece claro que, si existen pérdidas de energía en la conducción, la velocidad a la que sale el agua por F (una vez abierto), deberá ser menor que la anteriormente obtenida. Un resultado igual o mayor, indicaría que algo se ha hecho mal.

Si existen pérdidas por fricción, deberemos tenerlo en cuenta en la ecuación de Bernoulli, añadiendo en cada punto la pérdida de presión (P_f) que se produce hasta llegar a él:

$$P_A + \rho g H = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 = P_C + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + P_{fC} = P_D + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + P_{fD} = \cdots = P_F + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + P_{fF}$$

Considerando los puntos A y F y teniendo en cuenta que $P_A = P_F = P_{atm}$:

$$\rho g H = \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + P_{fF} \;\rightarrow\; v = \sqrt{2\left(gH - \frac{P_{fF}}{\rho}\right)}$$

Y, teniendo en cuenta que $P_{fF} = K \cdot L$, donde K es la pérdida lineal y L la longitud de la conducción entre B y F:

$$v = \sqrt{2\left(gH - \frac{K \cdot L}{\rho}\right)} \quad (5)$$

Y sustituyendo valores numéricos:

$$v = \sqrt{2\left(9'8 \cdot 10 - \frac{0'08 \cdot 1'013 \cdot 10^5 \cdot 8}{10^3}\right)} = 8'15\ m/s$$

Si analizamos el resultado literal que acabamos de obtener (situación real), veremos que se transforma en el anterior (situación ideal) en el caso ideal de que K = 0, lo cual es lógico (no habría pérdidas). Por otra parte, el resultado numérico (8’15 m/s), como era de esperar, es menor que el anterior (14 m/s), indicando que el agua sale con menos velocidad (y, por tanto, con menos energía cinética), debido a la pérdida de energía por fricción que se produce a lo largo de la tubería por la que circula.

Podemos plantearnos ahora (agua circulando, régimen estacionario) *cómo podríamos determinar la altura h’ que alcanza el agua en cada uno de los tubos verticales.*

En principio, cabe pensar que cuanto más lejos se halle el tubo del depósito, menor será h’, debido a que la perdida lineal de carga correspondiente irá aumentando conforme nos alejamos del mismo. Por otra parte, dicha altura, nunca podrá ser mayor que la altura H correspondiente al nivel del agua en el depósito.

Para determinar h' en cada uno de los tubos, podemos comenzar por hallar la presión hidrostática en la base de cada uno de ellos.

Comenzaremos por el más próximo al depósito. La presión en el punto C, se puede conocer aplicando Bernoulli en C y F:

$$P_C + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + P_{fC} = P_F + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + P_{fF}$$

Considerando que $P_F = P_{atm}$, sustituyendo P_{fF} por KL, P_{fC} por K·L/4 y simplificando:

$$P_C + K \cdot \frac{1}{4}L = P_{atm} + K \cdot L$$

Despejando: $P_C = P_{atm} + \frac{3}{4}KL$

Esta presión tiene que coincidir con la presión hidrostática ejercida en la base de la columna de agua de altura h'_C abierta a la atmósfera, la cual, como sabemos viene dada por: $\rho g h'_C + P_{atm}$, de modo que, igualando:

$P_C = \rho g h'_C + P_{atm} \rightarrow P_{atm} + \frac{3}{4}KL = \rho g h'_C + P_{atm}$ Despejando:

$$\boxed{h'_C = \frac{3}{4} \cdot \frac{KL}{\rho g}} \qquad (6)$$

Sustituyendo valores numéricos:

$$h'_C = \frac{3}{4} \cdot \frac{0'08 \cdot 1'013 \cdot 10^5 \cdot 8}{10^3 \cdot 9'8} = 4'96\ m$$

Proceded de forma similar, para obtener los valores de la presión en D y en E

La presión en el punto D, se puede conocer aplicando Bernoulli en D y F:

$$P_D + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + P_{fD} = P_F + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + P_{fF}$$

Considerando que $P_F = P_{atm}$, sustituyendo P_{fF} por KL, P_{fD} por K·L/2 y simplificando:

$$P_D + \frac{K \cdot L}{2} = P_{atm} + K \cdot L \rightarrow P_D = P_{atm} + \frac{KL}{2}$$

Esta presión tiene que coincidir con la presión hidrostática ejercida en la base de la columna de agua de altura h'_D abierta a la atmósfera, la cual, como sabemos viene dada por: $\rho g h'_D + P_{atm}$, de modo que, igualando:

$P_D = \rho g h'_D + P_{atm} \rightarrow P_{atm} + \frac{KL}{2} = \rho g h'_D + P_{atm}$ Despejando:

$$h'_D = \frac{1}{2} \cdot \frac{KL}{\rho g} \qquad (7)$$

Y sustituyendo valores numéricos:

$$h'_D = \frac{1}{2} \cdot \frac{0'08 \cdot 1'013 \cdot 10^5 \cdot 8}{10^3 \cdot 9'8} = 3'31\ m$$

Siguiendo los mismos pasos que para C y D, obtenemos finalmente la altura alcanzada por la columna de agua en el último tubo vertical, la cual resulta ser:

$$h'_E = \frac{1}{4} \cdot \frac{KL}{\rho g} \qquad (8)$$

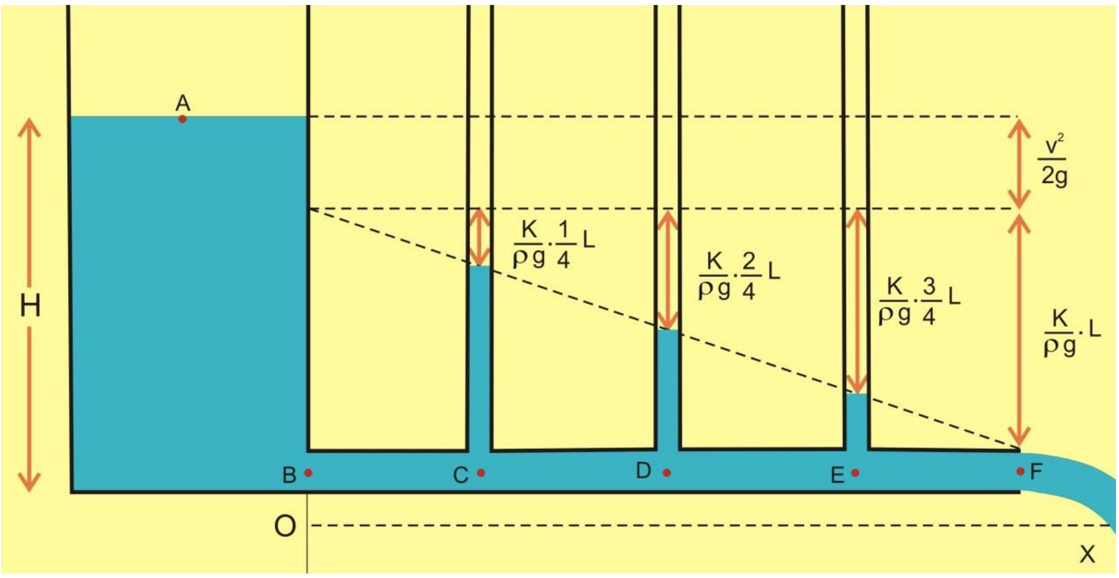
Y sustituyendo valores: $h'_E =$ 1’66 m

De particular interés resulta analizar lo que sucede en el punto F, donde está situada la boca de salida de la conducción. En efecto, si despejamos H de la ecuación (5), obtenemos que:

$$H = \frac{v^2}{2g} + \frac{KL}{\rho g}$$

Este resultado se puede interpretar diciendo que la altura geométrica (H) en A se invierte en F en altura cinética ($v^2/2g$) más altura de pérdida de carga ($KL/\rho g$).

Sin embargo (ved figura siguiente), en los puntos C, D y E, al ser la pérdida lineal de carga menor que en F (1/4, 2/4 y 3/4 de ella, respectivamente), una parte de la altura geométrica en A, se invierte en altura de presión (parte de los tubos que contienen agua, sombreada en azul en la figura), de modo que la suma correspondiente a la altura cinética, la altura de presión y la altura de pérdida de carga, en cada tubo, nos da siempre H.



Vemos, pues, que, como era de esperar, la altura alcanzada por el agua en cada tubo (altura de presión), es menor conforme nos vamos alejando del depósito y también que si k valiese 0 (caso ideal, sin pérdidas), estas alturas serían nulas.

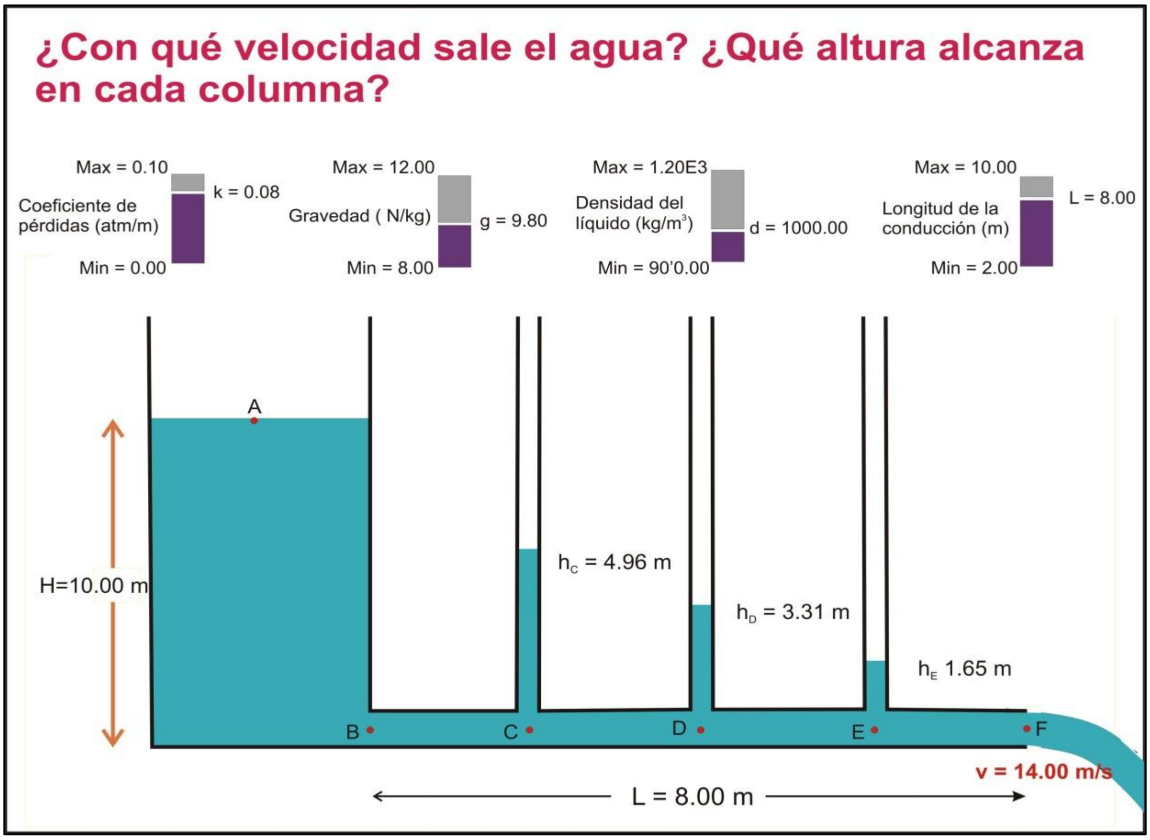
A partir de las ecuaciones 6, 7 y 8 anteriores, deducid una ecuación general, válida para calcular la altura h' en cualquier punto de la conducción considerada.

Basta analizar las ecuaciones, para concluir que la ecuación buscada se puede expresar como:

$$h' = \frac{K}{\rho g} \cdot (L - x)$$

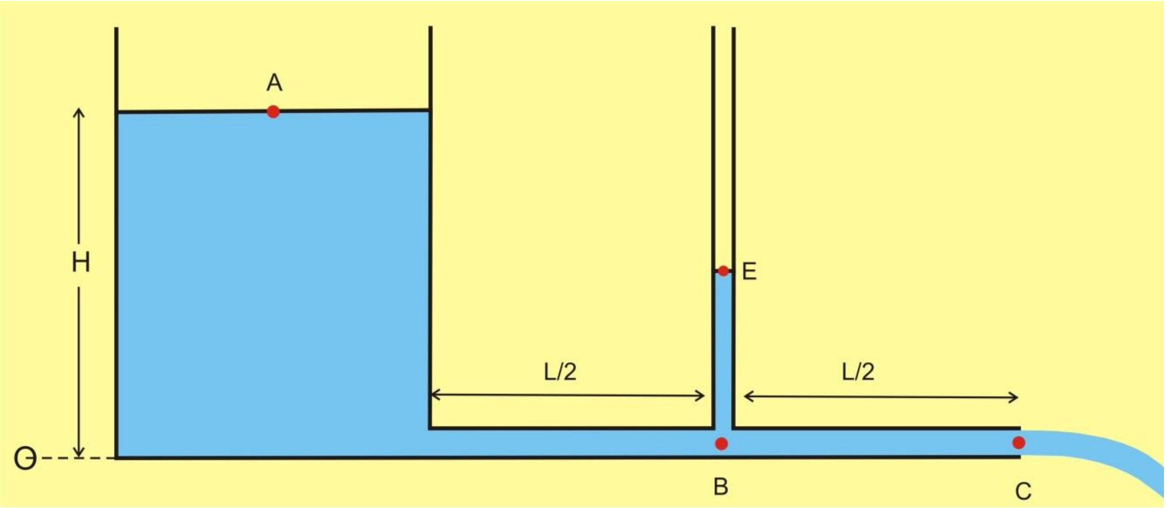
En la ecuación anterior, x es la distancia (entre 0 y L), del punto de la conducción considerado al punto B en el que henos situado el origen.

Para reforzar este problema hemos elaborado una animación *Modellus*, que representa la situación con el tapón quitado y calcula las alturas de las columnas de agua y la velocidad con la dicho agua sale por la boca del dispositivo. En la pantalla hemos colocado varios controladores manuales con los que los estudiantes pueden modificar la densidad del líquido, la gravedad, la longitud total de la conducción (es decir, entre los puntos B y F) y el coeficiente k de pérdida de carga por unidad de longitud. Manipulando estos controladores, los estudiantes pueden poner a prueba hipótesis y constatar algunos casos límite, entre ellos, el caso en que k = 0, es decir, la situación ideal que ocurriría si no hubiera ninguna pérdida de energía mecánica (apartado a del problema).



La animación está disponible en la Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física de la Sección Local de Alicante de la RSEF: http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm

13. Dada la situación de la figura, en la que la sección del depósito es mucho mayor que la de la conducción, determinad:



a) Pérdida de presión que se produce en la conducción, utilizando la expresión de Darcy-Weisbach:

$$P_f = f \cdot \frac{\rho L v^2}{2D}$$

b) Altura del agua en el tubo vertical.

Datos: P_{atm} = 1'013·10^5 N/m^2, diámetro de la conducción D = 12 mm, densidad del líquido (agua) ρ = 10^3 kg/m^3, H = 10 m, L = 12 m, f = 0'05.

a) Para determinar P_f con la expresión de Darcy-Weisbach (dada en el enunciado), necesitamos conocer previamente la velocidad con la que circula el líquido en la conducción, la cual podemos obtener aplicando Bernoulli con pérdidas, entre los puntos A y C:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 + \rho g h_A = P_C + \frac{1}{2}\rho \cdot v_C^2 + \rho g h_C + P_f$$

Teniendo en cuenta que $P_A = P_C = P_{atm}$, $h_C = 0$, $v_C = v$ (la misma en cualquier punto de la tubería horizontal) y que, al ser la sección del depósito mucho mayor que la de la conducción, podremos despreciar v_A (como ya se justificó en problemas anteriores), la expresión anterior queda como:

$$P_{atm} + \rho g H = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + f \cdot \frac{\rho L v^2}{2D}$$

Y despejando:

$$v = \sqrt{\frac{gH}{\frac{1}{2} + f \cdot \frac{L}{2D}}} \rightarrow v = \sqrt{\frac{9'8 \cdot 10}{\frac{1}{2} + 0'05 \cdot \frac{12}{2 \cdot 0'012}}} \rightarrow v = 1'96 m/s$$

Sustituyendo ahora en la expresión de Darcy-Weisbach:

$$P_f = f \cdot \frac{\rho L v^2}{2D} = 0'05 \cdot \frac{10^3 \cdot 12 \cdot 1'96^2}{2 \cdot 0'012} = 9'6 \cdot 10^4 \ \frac{N}{m^2} = 0'95 \text{ atm}$$

b) En cuanto a la altura "h" del agua en el tubo vertical, sabemos que está relacionada con la presión existente en el punto B mediante la ecuación fundamental de la hidrostática, por lo que, para determinarla, bastará con aplicar esta ecuación entre los puntos B y E

$$P_B = P_E + \rho g h \quad \rightarrow \quad h = \frac{P_B - P_{atm}}{\rho g} \quad (1)$$

En la ecuación anterior, se ha tenido en cuenta que $P_E = P_{atm}$

Necesitamos conocer P_B. Para ello aplicaremos Bernoulli entre A y B:

$$P_A + \rho g h = P_B + \frac{1}{2}\rho v^2 + P_{fB}$$

Como $P_{fB} = P_f/2$, tendremos que: $P_B = P_{atm} + \rho g H - \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 - \frac{P_f}{2}$

En la ecuación anterior todo es conocido. Sustituyendo P_B en la ecuación (1):

$$h = \frac{\rho g H - \frac{1}{2}\rho v^2 - \frac{P_f}{2}}{\rho g}$$

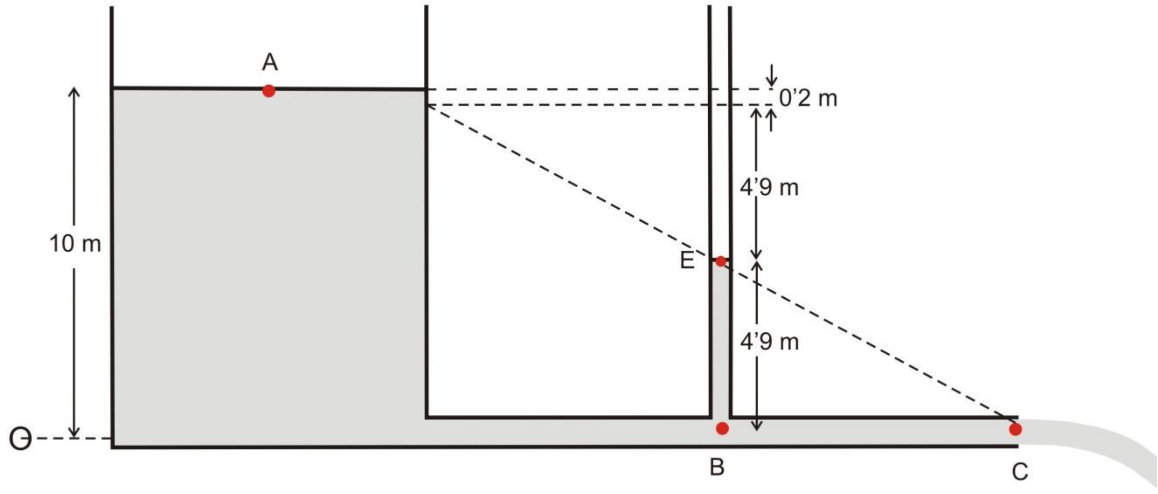
Finalmente, sustituyendo v, P_f y simplificando, obtenemos que:

$$h = H \cdot \left(1 - \frac{1 + f \cdot \frac{L}{2D}}{1 + 2f \cdot \frac{L}{2D}} \right)$$

Analizando la expresión obtenida, concluimos que h podrá tomar cualquier valor comprendido entre 0 y 0'5H. En efecto: cuanto menor sea fL/2D respecto de 1, tanto más próximo estará h del valor 0; mientras que cuanto mayor sea el valor de fL/2D respecto de 1, tanto más próximo estará h de 0'5 H.

Sustituyendo valores numéricos: $h = 10 \cdot \left(1 - \frac{1+25}{1+50} \right)$ = 4'90 m

El resultado obtenido en este ejercicio, queda reflejado en la figura siguiente (no a escala):



En la figura podemos ver que:

10 m = 0’2 m + 4’9 m + 4’9 m

Donde 0’2 m es la altura cinética ($v^2/2g$) mientras que los otros dos sumandos iguales, uno corresponde a la altura de pérdida de carga (parte del tubo vertical donde no hay agua) y el otro (donde sí hay agua) es altura de presión.

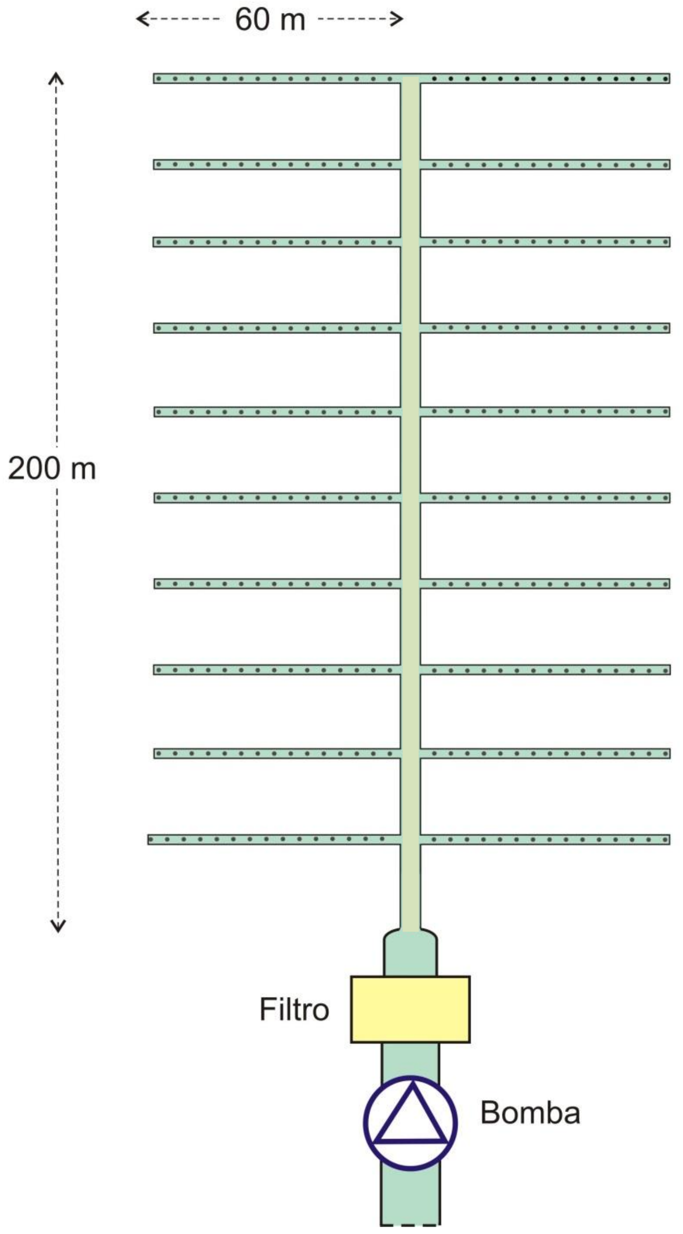
Para reforzar este problema hemos elaborado una animación *Modellus*, que representa la situación y calcula la altura del agua en el tubo vertical, la pérdida de carga en la conducción y la velocidad con la que sale el agua. En la pantalla hemos colocado varios controladores manuales para que los alumnos puedan modificar el valor de la altura del agua en la zona ancha de la conducción, H, los de la longitud, L, y el diámetro, D, del tubo, y el del coeficiente de pérdidas, f. Manipulando estos controladores, los estudiantes pueden poner a prueba hipótesis y constatar casos límite, como los que hemos comentado un poco más arriba.

La animación y el programa necesario para hacerla correr están disponibles en la Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física de la Sección Local de Alicante de la RSEF: http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm

14. En una superficie plana, que se encuentra 20 m por encima de la ubicación de la bomba, se monta una red de riego por goteo constituida por un ramal principal, de 200 m de longitud y 30 mm de diámetro, del que parten 20 ramales portagoteros. Cada uno de estos ramales, de 60 m de longitud y 10 mm de diámetro, consta de 15 goteros autocompensantes (funcionan entre 1’5 atm y 5 atm), con un caudal de 8 l/h cada gotero. Se pide:

Potencia hidráulica que debe tener la bomba, sabiendo que esta absorbe el agua de un pozo cuyo nivel de agua se encuentra 8 m por debajo de la bomba.

Datos: Desde la salida de la bomba hasta la entrada en la red de riego, en el sistema de filtrado y conducción, se produce una pérdida de carga de 8 m.c.a., siendo el factor de fricción en los ramales de la red f = 0’03. La disposición de los distintos elementos es la del esquema adjunto (no a escala).



Sabemos (ved problema 11), que la potencia hidráulica de la bomba viene dada por la expresión:

$P_{hidr} = (P_b - P_{ent}) \cdot Q$ (1)

Donde P_{hidr} = Potencia hidráulica, P_b = presión suministrada por la bomba, P_{ent} = presión a la entrada de la bomba, Q = caudal suministrado.

Como en el enunciado quedan fijados tanto Q como P_{ent}, la mínima potencia requerida será aquella capaz de suministrar la mínima presión de funcionamiento de los goteros (1'5 atm) al gotero que le llegue menos presión (que, como es lógico, será aquel que se encuentre más alejado y, por tanto, la pérdida de carga sea mayor).

Calculamos Q como:

$Q = N \cdot Q_{got} = (20 \cdot 15) \cdot 8 = 2400$ l/h $= 6'67 \cdot 10^{-4}$ m^3/s

Este tipo de bombas funcionan creando un vacío de modo que sea la presión atmosférica la que eleve el agua. Como la máxima altura a la que la presión atmosférica puede elevar el agua es de 10'34 m, en este caso elevará el agua los 8 m de desnivel y aun le quedará una presión de entrada de:

$P_{ent} = 10'34 - 8 = 2'34$ m.c.a. $= 2'34/10'34 = 0'23$ atm $= 0'23 \cdot 1'013 \cdot 10^5 = 2'33 \cdot 10^5$ N/m^2

La presión suministrada por la bomba, podemos expresarla como:

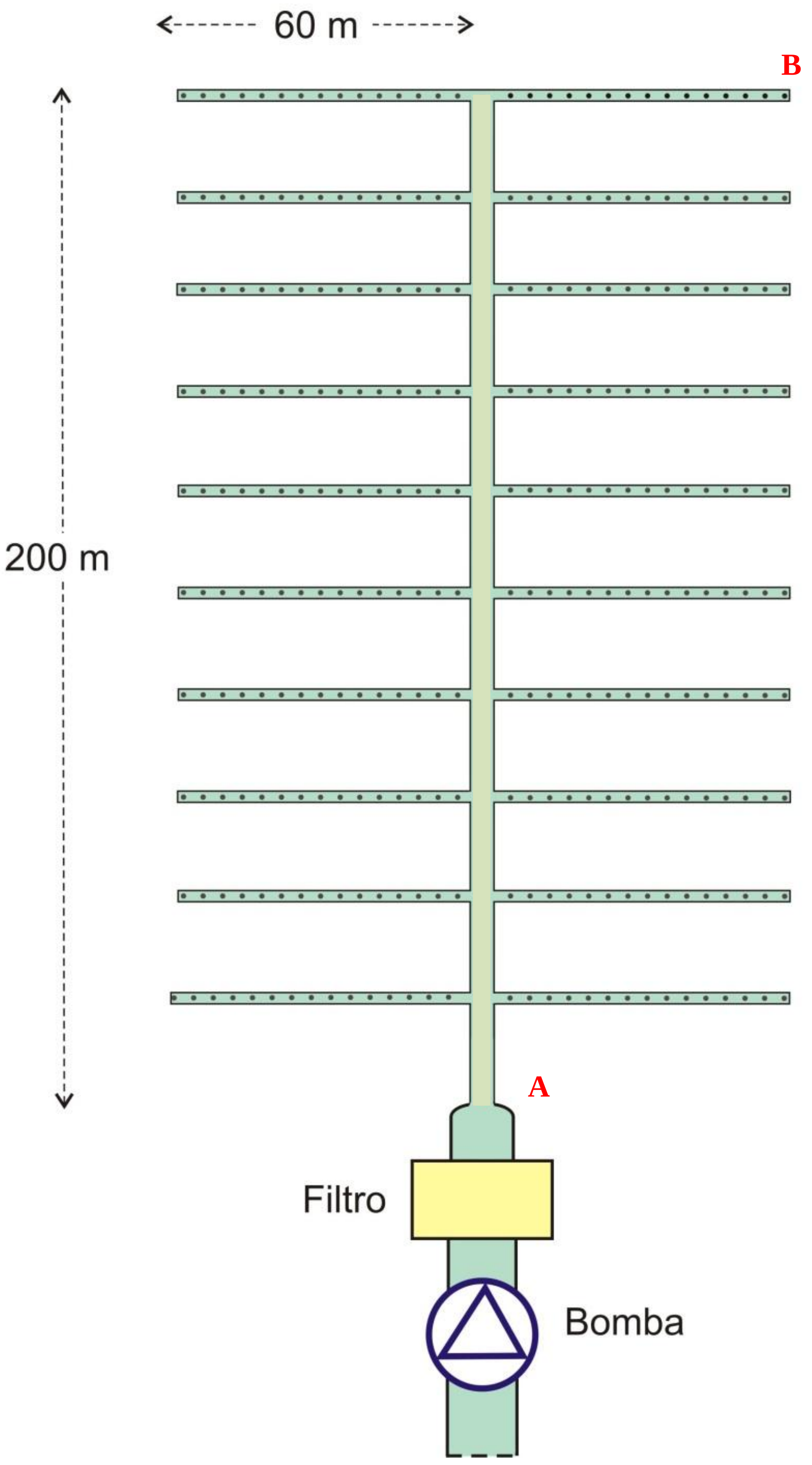
$P_b = P_A + P_{fil}$ (2)

Donde P_A = presión que se suministra a la entrada de la red (punto A), P_{fil} = perdida de carga que se produce en el sistema de filtrado y conducción desde la salida de la bomba hasta el punto A.

En la ecuación (2) anterior:

$P_{fil} =$ 8 m.c.a $= (8/10'34) \cdot 1'013 \cdot 10^5 = 7'84 \cdot 10^4$ N/m^2

Para determinar P_A, aplicaremos Bernoulli, con pérdidas, entre los puntos A y B del esquema (que corresponden, respectivamente, a la entrada de la red y al gotero más alejado).


60 m
B
200 m
A
Filtro
Bomba

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B + P_f$$

Despejando:

$$P_A = \frac{1}{2}\rho(v_B^2 - v_A^2) + \rho g h_B + P_B + P_f \qquad (3)$$

Como ya hemos comentado, la mínima potencia de la bomba que hará funcionar correctamente la red de riego, será aquella que suministre una P_B = 1'5 atm. Para conocer P_A, necesitaremos determinar, pues, v_B, v_A y p_f. *¿Cómo podríamos hacerlo?*

En el punto A se cumple que $Q_A = v_A \cdot S_A$ y como $Q_A = Q$, tenemos:

$$v_A = \frac{Q}{S_A} = \frac{6'64 \cdot 10^{-4}}{\frac{\pi(30 \cdot 10^{-3})^2}{4}} = \frac{6'64 \cdot 10^{-4}}{7'07 \cdot 10^{-4}} = 0'94 \text{ m/s}$$

Análogamente, en el punto B, se cumple que $Q_B = v_B \cdot S_B$ y como Q_B = 8 l/h = $2'22 \cdot 10^{-6}$ m^3/s, tenemos:

$$v_B = \frac{Q_B}{S_B} = \frac{2'22 \cdot 10^{-6}}{\frac{\pi(10 \cdot 10^{-3})^2}{4}} = \frac{2'22 \cdot 10^{-6}}{7'85 \cdot 10^{-5}} = 0'028 \text{ m/s}$$

Para conocer p_f, consideraremos que $p_f = \rho \cdot g \cdot h_f$ y calcularemos h_f (tanto en el ramal principal como en los restantes), utilizando la expresión de Darcy. El cálculo resulta un tanto laborioso porque a lo largo de los ramales, la velocidad no se mantiene constante, ya que, debido a las salidas, cada vez hay menos caudal por las conducciones.

Comenzaremos calculando h_f en el ramal principal (que simbolizaremos como h_{fp}), diviéndolo en tramos de 20 m (10 tramos), de modo que:

$$h_{fp} = h_{fp1} + h_{fp2} + h_{fp3} + \ldots + h_{fp10}$$

En cada uno de esos tramos "i", aplicando la expresión de Darcy, se cumplirá:

$$h_{fpi} = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v_i^2}{2g}$$

En la ecuación anterior, $v_i = Q_i/S$ siendo Q_i el caudal que entra al tramo en cuestión. Dicho caudal se podrá expresar como el producto del caudal de un gotero (que es un dato conocido), por el número N_i de goteros (salidas) cuya agua haya pasado previamente por dicho tramo. Es decir, en el primer tramo (el más cercano a la bomba), se tendrá: N_1 = 300, en el segundo: N_2 = 270 y así sucesivamente hasta el más alejado: N_{10} = 30.

De acuerdo con los razonamientos anteriores, la pérdida de carga en cualquiera de esos 10 tramos del ramal principal, se podrá expresar como:

$$h_{f_{pi}} = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{Q_i^2}{S^2 \cdot 2g} = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{N_i^2 \cdot (2'22 \cdot 10^{-6})^2}{S^2 \cdot 2g} = 0'03 \cdot \frac{20}{0'03} \cdot \frac{N_i^2 \cdot (2'22 \cdot 10^{-6})^2}{(7'07 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 2 \cdot 9'8} \rightarrow$$

$$h_{f_{pi}} = 10^{-5} \cdot N_i^2$$

Aplicando la expresión general obtenida a cada tramo en particular:

$h_{f_{p1}} = 10^{-5} \cdot 300^2 = 0'900$ mca
$h_{f_{p2}} = 10^{-5} \cdot 270^2 = 0'729$ mca
$h_{f_{p3}} = 10^{-5} \cdot 240^2 = 0'576$ mca
$h_{f_{p4}} = 10^{-5} \cdot 210^2 = 0'441$ mca
$h_{f_{p5}} = 10^{-5} \cdot 180^2 = 0'324$ mca
$h_{f_{p6}} = 10^{-5} \cdot 150^2 = 0'225$ mca
$h_{f_{p7}} = 10^{-5} \cdot 120^2 = 0'144$ mca
$h_{f_{p8}} = 10^{-5} \cdot 90^2 = 0'081$ mca
$h_{f_{p9}} = 10^{-5} \cdot 60^2 = 0'036$ mca
$h_{f_{p10}} = 10^{-5} \cdot 30^2 = 0'009$ mca

Y sumando, obtenemos finalmente el valor de h_f en el ramal principal: $h_{f_p} = 3'465$ mca

A continuación, hemos de proceder de forma análoga con el ramal secundario en el que se encuentra el punto B (al final del mismo), para lo cual, lo descompondremos en tramos de 4 m (15 tramos), de modo que:

$h_{f_s} = h_{f_{s1}} + h_{f_{s2}} + h_{f_{s3}} + \ldots + h_{f_{s15}}$

En cada uno de esos tramos "i", aplicando la expresión de Darcy, se cumplirá:

$$h_{f_{si}} = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v_i^2}{2g}$$

En la ecuación anterior, $v_i = Q_i/S$ siendo Q_i el caudal que entra al tramo en cuestión. Dicho caudal se podrá expresar como el producto del caudal de un gotero (que es un dato conocido), por el número N_i de goteros (salidas) de ramal secundario cuya agua haya pasado previamente por dicho tramo. Es decir, en el primer tramo (el más cercano al ramal principal), se tendrá: $N_1 = 15$, en el segundo: $N_2 = 14$ y así sucesivamente hasta el tramo más alejado (donde se encuentra el punto B): $N_{15} = 1$.

De acuerdo los razonamientos anteriores, la pérdida de carga en cualquiera de esos 15 tramos del ramal secundario, se podrá expresar como:

$$h_{f_{si}} = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{Q_i^2}{S^2 \cdot 2g} = 0'03 \cdot \frac{4}{0'01} \cdot \frac{N_i^2 \cdot (2'22 \cdot 10^{-6})^2}{S^2 \cdot 2g} = 0'03 \cdot \frac{4}{0'01} \cdot \frac{N_i^2 \cdot (2'22 \cdot 10^{-6})^2}{(7'85 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 2 \cdot 9'8} \rightarrow$$

$$h_{f_{si}} = 4'9 \cdot 10^{-4} \cdot N_i^2$$

Aplicando la expresión general obtenida a cada tramo en particular:

$h_{f_{s1}} = 4'9\cdot10^{-4}\cdot15^2 = 0'110$ mca
$h_{f_{s2}} = 4'9\cdot10^{-4}\cdot14^2 = 0'096$ mca
$h_{f_{s3}} = 4'9\cdot10^{-4}\cdot13^2 = 0'083$ mca
$h_{f_{s4}} = 4'9\cdot10^{-4}\cdot12^2 = 0'071$mca
$h_{f_{s5}} = 4'9\cdot10^{-4}\cdot11^2 = 0'059$ mca
$h_{f_{s6}} = 4'9\cdot10^{-4}\cdot10^2 = 0'049$ mca
$h_{f_{s7}} = 4'9\cdot10^{-4}\cdot 9^2 = 0'040$ mca
$h_{f_{s8}} = 4'9\cdot10^{-4}\cdot 8^2 = 0'031$ mca
$h_{f_{s9}} = 4'9\cdot10^{-4}\cdot 7^2 = 0'024$ mca
$h_{f_{s10}} = 4'9\cdot10^{-4}\cdot 6^2 = 0'018$ mca
$h_{f_{s11}} = 4'9\cdot10^{-4}\cdot 5^2 = 0'012$ mca
$h_{f_{s12}} = 4'9\cdot10^{-4}\cdot 4^2 = 0'008$ mca
$h_{f_{s13}} = 4'9\cdot10^{-4}\cdot 3^2 = 0'004$ mca
$h_{f_{s14}} = 4'9\cdot10^{-4}\cdot 2^2 = 0'002$ mca
$h_{f_{s15}} = 4'9\cdot10^{-4}\cdot 1^2 = 0'000$ mca

Y sumando, obtenemos finalmente el valor de h_s en el ramal secundario que contiene a B:

$h_{f_s} = 0'607$ mca

Luego la pérdida de carga de presión desde A hasta B, será:

$P_f = \rho\cdot g\cdot h_f = 10^3\cdot9'8\cdot(3'465+0'607) = 3'99\cdot10^4$ N/m^2 (sería $4'04\cdot10^4$ N/m^2)

Tenemos ya, pues, los valores de v_A, v_B y P_f, que necesitábamos. Sustituyendo ahora en la ecuación (3) anterior $P_A = \frac{1}{2}\rho(v_B^2 - v_A^2) + \rho g h_B + P_B + P_f$, obtenemos:

$$P_A = \frac{1}{2}\cdot10^{-3}(0'028^2 - 0'94^2) + 10^3\cdot9'8\cdot20 + 1'5\cdot1'013\cdot10^5 + 3'99\cdot10^4 \rightarrow$$

$P_A = 3'88\cdot10^5$ N/m^2

Y sustituyendo en (2), se obtiene la presión suministrada por la bomba:

$P_b = P_A + P_{fil} = 3'88\cdot10^5 + 7'84\cdot10^4 = 4'66\cdot10^5$ N/m^2

Finalmente, sustituyendo en (1), podemos hallar la potencia hidrostática buscada:

$P_{hidr} = (P_b - P_{ent})\cdot Q = (4'66\cdot10^5 - 2'33\cdot10^4)\cdot6'66\cdot10^{-4} = 294'8$ W

Para terminar, cabe señalar que:

- Al ser pequeñas las velocidades en las conducciones, el término cinético ($\rho v^2/2$) en la ecuación de Bernoulli resulta despreciable frente al resto de valores.
- Por el mismo motivo, la pérdida de carga es poco significativa. Si la hubiéramos despreciado, el resultado obtenido habría sido de 268 W

Los estudiantes pueden practicar este problema con una animación *Modellus*, que calcula todas las magnitudes buscadas. En la pantalla hay dispuestos varios controladores manuales para poder modificar casi todos los parámetros intervinientes, viendo cómo afectan esas modificaciones a los resultados. Utilizando estos, pueden poner a prueba diferentes hipótesis y, dado que se trata de un problema complejo, en el que intervienen muchas variables, también pueden aprovechar estos controladores para ver más detenidamente a qué magnitudes afectan posibles cambios en otras. Por ejemplo: pueden modificar la altura del ramal principal y comprobar que, además de verse afectadas por esta modificación la potencia hidráulica de la bomba y la presión que dicha bomba ha de suministrar, también se alteran los valores de las pérdidas en cada sub-tramo vertical de dicho ramal, pero no lo hacen, lógicamente, los de las pérdidas en los ramales secundarios horizontales (lo contrario ocurre si modifica la longitud de dichos ramales secundarios); con la misma intención pueden modificar bien el diámetro del ramal principal o bien el de los ramales secundarios; también pueden modificar la altura a la que se ubica la bomba, comprobando que, entonces cambia la presión que dicha bomba suministra, así como la presión en la conducción y, por supuesto, la potencia hidráulica requerida, pero, en cambio, no se ven afectados los valores de las pérdidas en las conducciones; etc.

Finalmente, los estudiantes también pueden probar con la animación algunos casos límite evidentes, como, por ejemplo: igualar el caudal de cada gotero a cero para comprobar que entonces no se requiere potencia hidráulica alguna y no existen pérdidas; eliminar la fricción (f=0) para obtener la potencia hidráulica requerida en ese caso ideal en el que se anularían todas las pérdidas; etc.

La animación está disponible en la Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física de la Sección Local de Alicante de la RSEF:
http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm