28. Un fino haz de electrones penetra en el espacio comprendido entre las placas de un condensador plano (situado horizontalmente), paralelamente a éstas, con una rapidez v_0. Si entre las placas se aplica una diferencia de potencial ΔV se observa que, a la salida, la trayectoria del haz forma un ángulo de 20^0 con la dirección inicial.

a) ¿Cuál será el ángulo si se duplica la rapidez inicial?
b) ¿Y si dejando la misma rapidez inicial se duplica la diferencia de potencial aplicada?

(En ambos casos se desprecia el efecto del peso).

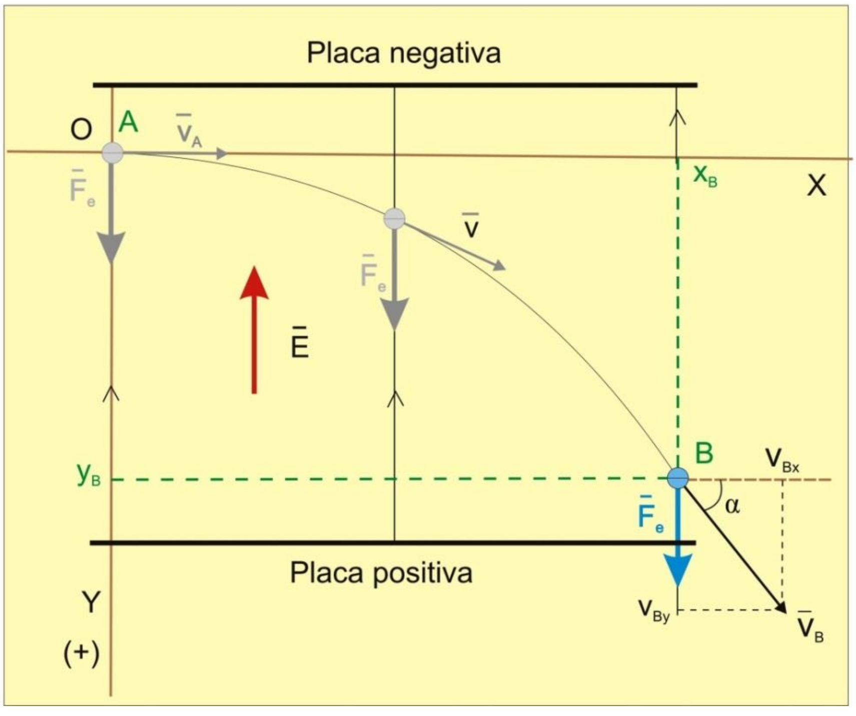
Planteamiento cualitativo de la situación

Comenzaremos suponiendo que las posibles interacciones de unos electrones con otros no afectan a la trayectoria del haz. Entonces, podremos estudiar la trayectoria de un electrón individual desde que penetra en el espacio comprendido entre las placas con la rapidez, v_0, que se asigna en el enunciado al haz en su conjunto.

Teniendo en cuenta el orden de magnitud de la masa y de la carga del electrón, consideraremos despreciable la acción del campo gravitatorio sobre él. En estas condiciones, el electrón entra en el condensador con una velocidad inicial, v_0, horizontal y, mientras esté entre las placas, se ejercerá sobre él una fuerza eléctrica debida al campo que existe entre ellas ($F_e = q \cdot E$), el cual, como ya hemos visto en los problemas anteriores, es un campo uniforme de intensidad:

$$E = \Delta V/d \quad (1)$$

Por tanto, podemos considerar el movimiento del electrón como resultado de la superposición de dos hipotéticos movimientos perpendiculares: Un movimiento uniforme de trayectoria horizontal (con rapidez v_0) y otro movimiento vertical acelerado, con aceleración constante y orientada hacia donde se orienta la fuerza eléctrica $\vec{F}_e$.



La trayectoria resultante, como se puede apreciar en la figura anterior, será una curva en la que el vector velocidad, que inicialmente es horizontal, se irá inclinando cada vez más con respecto a esa dirección horizontal. La magnitud que estamos buscando es el ángulo, α, que formará dicho vector cuando el electrón salga del espacio comprendido entre las dos placas.

Formulad hipótesis acerca de los factores de los que dependerá el ángulo buscado, α.

Cabe esperar que el ángulo α dependa de la carga, q, y la masa, m, de la partícula (en este caso, un electrón), de la ddp, ΔV, entre las placas del condensador y de la distancia, d, entre ellas (ambos factores determinan el valor del campo E), de la rapidez, v_0, con la que inicie la partícula su movimiento dentro del condensador y de la longitud, L, (horizontal) que deba recorrer la partícula hasta salir de dicho condensador.

$$\alpha = f\,(m, q, \Delta V, d, v_0, L)$$

Más precisamente: cuanto mayores sean q y ΔV, mayor deberá ser (en valor absoluto) el ángulo α, ya que un valor mayor de estos parámetros (a igualdad de los restantes) implica que sea mayor la fuerza eléctrica que se ejerce sobre la partícula en la dirección perpendicular a su avance horizontal y, por tanto, de la aceleración correspondiente. Del mismo modo, cuanto mayor sea d, menor deberá ser (también en valor absoluto) el ángulo α, ya que un valor mayor de d implica una menor intensidad de la fuerza eléctrica. Lo mismo cabe decir de la masa, m (inercial) de la partícula, ya que cuanto mayor sea, m, menor será el módulo de la aceleración ($a = F_e/m$). Por lo que se refiere a la rapidez inicial, v_0, de la partícula, esperamos que cuanto mayor sea, menor deberá ser el ángulo α, porque al avanzar más rápido por el condensador, estará menos tiempo desviándose de la trayectoria horizontal inicial. Por el motivo opuesto, esperamos que cuanto mayor sea L, mayor sea el ángulo α, ya que la partícula estará más tiempo dentro del condensador desviándose de la trayectoria horizontal inicial.

Naturalmente, también podemos imaginar algún caso límite, de fácil interpretación. Por ejemplo, el resultado debe transformarse en α = 0 cuando se haga q = 0, puesto que, en ese caso, no habría fuerza eléctrica y la partícula (electrón de peso despreciable) seguiría con movimiento rectilíneo y uniforme sin desviarse.

¿Cómo podemos obtener el ángulo buscado?

Puesto que el ángulo que se busca es el que forma el vector velocidad con la dirección horizontal justamente cuando la partícula está en la posición de salida del condensador, para obtener dicho ángulo habrá que llegar a expresar las componentes (horizontal y vertical) de dicha velocidad en ese instante. Para ello, podemos empezar escribiendo vectorialmente la fuerza que se ejerce sobre la partícula y la aceleración correspondiente. Seguidamente obtendremos las ecuaciones de su movimiento (de la posición y de la velocidad). Cuando la componente horizontal de la posición sea x = L, la partícula estará en la posición de salida del condensador, de modo que exigiendo x = L, podremos obtener el instante en que ello ocurre. Y sustituyendo ese valor del tiempo, t, en la ecuación de la velocidad, podremos obtener sus dos componentes, v_x y v_y.

En el sistema de referencia representado en la figura anterior, la aceleración de la partícula se expresa como:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\mathrm{res}}}{m} = \frac{\vec{F}_e}{m} = \frac{(0, \mathrm{qE})}{m} = \left(0, \frac{\mathrm{q} \cdot \Delta\mathrm{V}}{m \cdot d}\right)$$

En la expresión anterior la única componente de la aceleración es positiva (el vector aceleración, de acuerdo con el sistema de referencia escogido, se orienta en sentido positivo). Por tanto, q (carga del electrón) se expresará en valor absoluto.

Integrando con respecto al tiempo, t (teniendo en cuenta que para t = 0, las componentes de la velocidad son $v_x = v_0$ y $v_y = 0$) tenemos la expresión de la velocidad de la partícula a lo largo del trayecto que realiza dentro del condensador:

$$\vec{v} = \left(v_0, \frac{\mathrm{q} \cdot \Delta \mathrm{V}}{m \cdot d} t\right)$$

Y volviendo a integrar (teniendo ahora en cuenta que para $t = t_0 = 0$, ocurre que $x = x_0 = 0$ e $y = y_0 = 0$), obtenemos el vector de posición de la partícula en ese mismo trayecto:

$$\vec{r} = \left(v_0 \cdot t, \frac{\mathrm{q} \cdot \Delta \mathrm{V}}{2 \cdot m \cdot d} t^2\right)$$

La ecuación anterior o ecuación de la trayectoria, se puede también expresar en forma explícita, eliminando el parámetro "t", con lo que se obtiene:

$y = \left(\dfrac{q \cdot \Delta V}{2md \cdot v_0^2}\right) \cdot x^2$, lo que nos muestra que la trayectoria es parabólica

El instante preciso, t, en el que la partícula está saliendo del condensador corresponde a que la componente horizontal de la posición sea x = L, es decir:

$$L = v_0 \cdot t \rightarrow t = L/v_0$$

Sustituyendo t en la ecuación de la velocidad, obtenemos las componentes del vector velocidad en la posición de salida:

$$\vec{v} = (v_x, v_y) = \left(v_0, \frac{\mathrm{q} \cdot \Delta \mathrm{V} \cdot \mathrm{L}}{m \cdot d \cdot v_0}\right)$$

Por tanto, la tangente del ángulo buscado es:

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\mathrm{q} \cdot \Delta \mathrm{V} \cdot \mathrm{L}}{m \cdot d \cdot v_0^2}$$

Vamos ahora a considerar que ocurre en los dos casos que plantea el enunciado:

a) Al duplicar el valor de v_0

Entonces tenemos:

$$\mathrm{tg}\, \alpha' = \frac{\mathrm{q} \cdot \Delta \mathrm{V} \cdot \mathrm{L}}{m \cdot d \cdot (2v_0)^2} = \frac{\mathrm{q} \cdot \Delta \mathrm{V} \cdot \mathrm{L}}{m \cdot d \cdot 4 \cdot v_0^2} = \frac{\mathrm{tg}\, \alpha}{4}$$

Es decir, la tangente del ángulo buscado se hace 4 veces menor.

Sustituyendo valores: tgα = tg 20º = 0’364 → tgα’ = 0’364/4 = 0’091

De modo que α’ = arctg 0’091 → α’ = 5’2 º

Como vemos el ángulo disminuye casi hasta la cuarta parte del valor que tiene en la situación anterior (20º).

b) Al duplicar el valor de la ddp aplicada

Entonces resulta:

$$\tan\alpha' = \frac{\mathrm{q}\cdot 2\cdot \Delta\mathrm{V}\cdot \mathrm{L}}{m\cdot d\cdot v_0} = 2\cdot\tan\alpha$$

En este caso, la tangente del ángulo buscado se duplica y dicho ángulo pasa a valer 36,05º que es menos que el doble de su valor en la situación anterior (20º).

Vemos así que un cambio en la velocidad inicial afecta mucho más a la desviación que sufre la partícula que otro cambio similar en la diferencia de potencial. Esto es así porque, como muestra el resultado literal del problema, la tangente del ángulo que expresa esa desviación depende linealmente (de manera proporcional o inversamente proporcional) de todas las variables, a excepción precisamente de la velocidad, v_0, de la que depende cuadráticamente (en este caso, es proporcional al cuadrado de v_0).