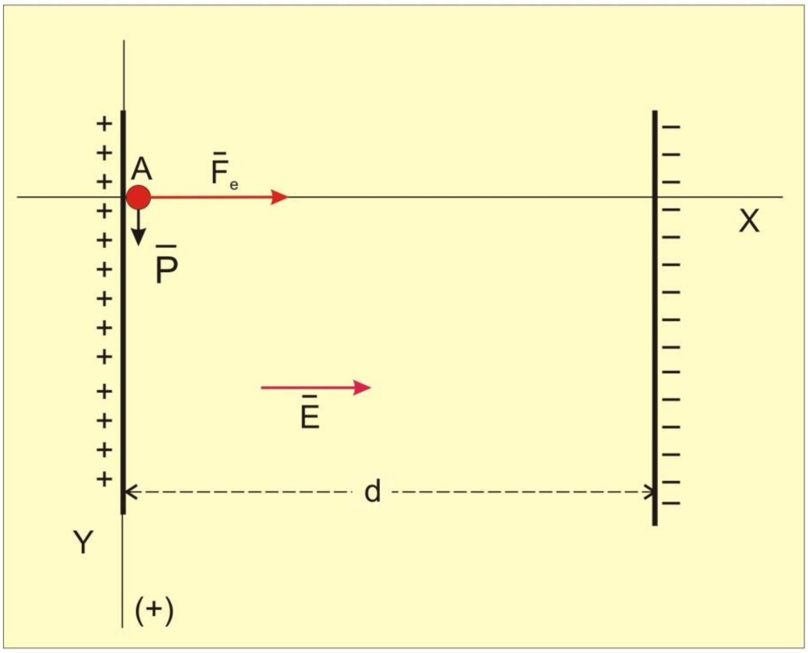
27. Una pequeña esfera de carga q positiva de 10 nC y 0'1 mg de masa, se abandona junto a la lámina positiva de un condensador de placas planas, verticales y separadas 5 cm entre sí. Sabiendo que la diferencia de potencial entre las placas es de 10^4 V, determinad la rapidez con que la carga choca contra la otra lámina.

La situación que se plantea es similar a la de los dos problemas anteriores, pero ahora tendremos en cuenta el peso $\vec{P}$ de la partícula cargada (perpendicular en todo momento a la fuerza eléctrica $\vec{F}_e$) como una variable influyente, con lo cual, la trayectoria descrita no se conoce de antemano, lo que nos obliga a realizar un tratamiento vectorial para poder estudiar las características del movimiento.

En la figura siguiente, se muestra la situación de partida. Arbitrariamente, hemos escogido un sistema de referencia cartesiano, con origen en el punto A de donde sale la esferita cargada.



En cuanto se abandone la partícula cargada en un punto A sobre la placa positiva, la fuerza ejercida por el campo eléctrico existente entre las placas, la empujará horizontalmente hacia la placa negativa, pero a la vez, el peso, la estará empujando verticalmente hacia abajo, de manera que el punto B de llegada no estará situado justo enfrente de A sino algo más abajo.

Una forma de comenzar es abordar antes una situación mucho más simple que ya nos es familiar (peso despreciable), con lo que B estaría entonces justo enfrente de A. En este caso, la rapidez buscada, v_B, dependerá de los mismos factores que hemos considerado en los ejercicios anteriores, con la salvedad de que ahora ya sabemos que la partícula empieza a moverse desde la placa positiva. Por tanto, planteamos que:

$$v_B = f\,(q, \Delta V, m, d)$$

Y, lógicamente, esperamos que v_B sea tanto mayor cuanto mayor sean q, ΔV y d, pero menor cuanto mayor sea la masa m (inercial) de la partícula.

La partícula se moverá con un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado a lo largo del eje X. Teniendo en cuenta que en el instante $t_0 = 0$, se cumple que: $x = x_A = 0$, y que cuando llega a la otra placa, se cumple que: $x = x_B = d$, las ecuaciones del movimiento para cualquier instante t del mismo serán:

$v = a \cdot t$ (1)

$x = a \cdot t^2/2$ (2)

Por otra parte, aplicando la ecuación fundamental de la dinámica:

$a = F_{res}/m = q \cdot E/m$

Y teniendo en cuenta la expresión, ya vista anteriormente para el módulo de la intensidad del campo eléctrico: $E = \Delta V/d$

Se obtiene que $a = q \cdot \Delta V/m \cdot d$ (3) (ΔV en valor absoluto).

Eliminando el tiempo t entre las ecuaciones (1) y (2):

$x = v^2/2a$

Sustituyendo ahora la aceleración:

$x = v^2 \cdot m \cdot d/2 \cdot q \cdot \Delta V$

Despejando: $v = \sqrt{\dfrac{2x \cdot q \cdot \Delta V}{m \cdot d}}$

Finalmente, particularizando para el instante en que la partícula llega a la placa de enfrente ($x = d$, $v = v_B$) y simplificando, nos queda que:

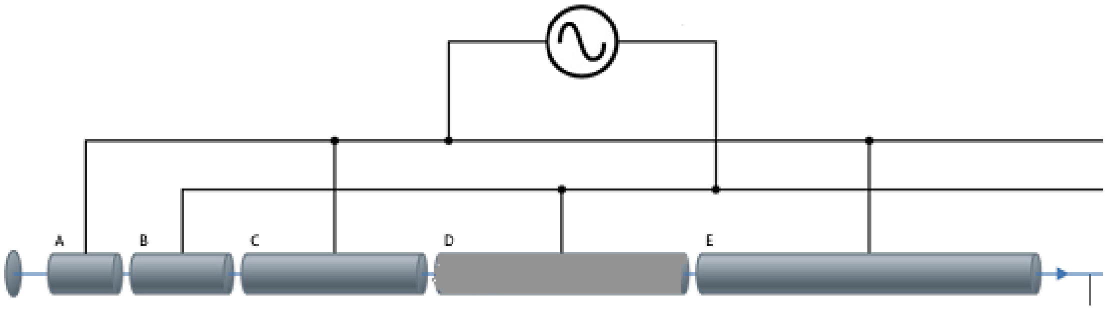
$$v_B = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot \Delta V}{m}} \quad (4)$$

El resultado literal que acabamos de obtener, no solo es dimensionalmente homogéneo, sino que se contemplan en él, todas las hipótesis de partida.

Sustituyendo los valores numéricos, nos queda v_B = 44'72 m/s

El dispositivo que venimos manejando en estos ejercicios (láminas conductoras conectadas a una diferencia de potencial elevada), constituye la base de los aceleradores lineales de partículas, que se utilizan para dotar a diversas partículas cargadas, de una gran energía cinética, con lo que se pueden utilizar como proyectiles con los que romper los núcleos atómicos e investigar así la estructura íntima de la materia.

Los primeros aceleradores se basaban en la aplicación de un voltaje continuo. Sin embargo, esto tenía la limitación de que al aumentar el voltaje a unas decenas de megavoltios se producía una descarga entre las placas (una ruptura del dieléctrico existente entre ellas). Por eso se buscaron alternativas, entre ellas, la de un voltaje alterno utilizando un número variable de tubos cilíndricos. Los tubos alternos están conectados entre sí de manera que se pueda aplicar una ddp oscilante entre los dos conjuntos de tubos. Así los aceleradores actuales de altas energías, más sofisticados, se pueden esquematizar mediante el dibujo adjunto. El haz de partículas cargadas, va pasando sucesivamente por el interior de tubos metálicos de longitud creciente, A, B, C, D, E,.., que están conectados a una tensión alterna.

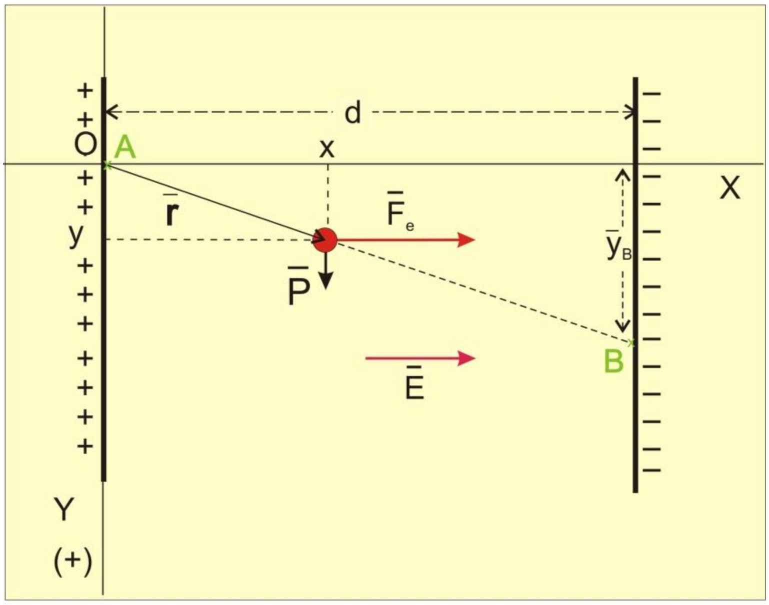


Para entender cómo funciona el sistema podemos suponer que se quiere acelerar un haz de partículas de carga positiva. Entonces, cuando se emite el haz, el primer tubo A tiene carga negativa y lo atrae produciéndole una aceleración antes de que el haz penetre en el tubo. Cuando el haz viaja por el interior del tubo, lo hace pasando justo por su eje, ya que el tubo lo atrae con la misma fuerza eléctrica en todas las direcciones y, por tanto, no modifica la trayectoria del haz. Justamente cuando dicho haz llega al punto medio del tubo A cambia el sentido de la corriente que alimenta todos los tubos lo que provoca que el tubo A, que tenía carga negativa, tenga carga positiva, el tubo B pase a tener carga negativa, el C positiva, etc. De esta manera, cuando el haz sale del tubo A, es repelido por él y atraído por el tubo B, lo que implica que el haz es acelerado en su trayecto de A hacia B. El mismo proceso se repite en cada etapa, es decir, cuando el haz llega a la mitad del tubo B, vuelve a cambiar de sentido de la corriente. B pasa a tener carga positiva, y A y C vuelven a tener carga negativa. Así cuando el haz sale del tubo B, es repelido por él y atraído por C, con lo que vuelve a ser acelerado al pasar de B a C. Y así sucesivamente. Cada nuevo tubo tiene una longitud mayor que el anterior, porque la carga de los tubos cambia de signo a intervalos de tiempo iguales (determinados por la frecuencia de la corriente alterna que los carga) y en cada nueva etapa el haz viaja a mayor velocidad.

El acelerador lineal de este tipo más largo del mundo es el colisionador Stanford Linear Accelerator (SLAC), ubicado al sur de San Francisco. Acelera electrones y positrones a lo largo de algo más de 3 km y los dirige hacia varios blancos, anillos y detectores ubicados en su finalización. Se construyó originalmente en 1962, y se ha ido ampliando y mejorando para seguir siendo uno de los centros de investigación de física de partículas más avanzados del mundo. Los experimentos realizados en el centro han ganado el premio Nobel en bastantes ocasiones.

Finalmente, podemos dar un paso más y tratar de resolver el problema, pero sin considerar el peso de la partícula despreciable.

Como ya se ha indicado, la intervención del peso como variable a considerar, implica que la trayectoria ya no sea horizontal. No obstante, sí será (casi) rectilínea, ya que, bajo las condiciones que hemos planteado (concretamente, estando las partículas suficientemente alejadas de los bordes de las placas) el campo E entre las placas es (casi) constante (lo sería completamente si dichas placas tuvieran superficie infinita), y g también lo es (porque la diferencia de altura durante el movimiento de las partículas es insignificante). Por tanto, el vector aceleración tiene dos componentes constantes y, como se parte del reposo, la esferita se moverá en la dirección y sentido de la aceleración, produciéndose una trayectoria rectilínea e inclinada tal como se muestra en la figura siguiente:



En esta versión más completa del problema, las hipótesis a considerar son las mismas que anteriormente, solo que ahora debemos incluir también la intensidad del campo gravitatorio y razonar que el resultado que se obtenga deberá de transformarse en el anterior, en el hipotético caso de que g = 0.

Con estas nuevas condiciones y tomando como sistema de coordenadas el expresado en la figura de arriba (sentido positivo de Y hacia abajo), la aceleración de la partícula cargada se podrá expresar en componentes cartesianas como:

$$\vec{a} = (a_x\ ,\ a_y) = \left(\frac{q \cdot \Delta V}{m \cdot d}\ ,\ g \right)$$

Y si integramos sucesivamente teniendo en cuenta las condiciones iniciales (para t = 0, ocurre que: $v_{ox}= 0$, $v_{oy} = 0$, $x_0= 0$ e $y_0 = 0$), obtenemos las ecuaciones de la velocidad y la posición en cualquier instante, dadas por los vectores:

$$\vec{v} = (v_x\ ,\ v_y) = \left(\frac{q \cdot \Delta V}{m \cdot d} \cdot t\ ,\ g \cdot t \right)$$

$$\vec{r} = (x\ ,\ y) = \left(\frac{q \cdot \Delta V}{2m \cdot d} \cdot t^2\ ,\ \frac{g}{2} \cdot t^2 \right)$$

Este último vector, determina la ecuación de la trayectoria, que en función del parámetro “t”, será:

$$x = \frac{q \cdot \Delta V}{2m \cdot d} \cdot t^2$$

$$y = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Si quisiéramos expresar la ecuación de la trayectoria en forma explícita, bastaría eliminar el parámetro t. En efecto:

$$t^2 = \frac{2m \cdot d}{q \cdot \Delta V} \cdot x$$

Y, sustituyendo, obtenemos que: $y = \left(\frac{g \cdot m \cdot d}{q \cdot \Delta V} \right) \cdot x$

La última expresión, indica que la partícula cargada (que, insistimos, parte del reposo) seguiría una trayectoria recta cuya ecuación es de la forma $y = k \cdot x$, donde k es una constante, tal que: $k = gmd/\Delta V$, desde el punto A de partida hasta el punto B situado en la otra placa.

Una posible estrategia para resolver el problema consiste en *calcular en qué instante se cumple que x = d y utilizar este dato para calcular* v_B.

Haciendo x = d en la ecuación: $t^2 = \frac{2m \cdot d}{q \cdot \Delta V} \cdot x$

Obtenemos que el tiempo empleado por la partícula en llegar desde A hasta B, viene dado por:

$$t = d \cdot \sqrt{\frac{2m}{q \cdot \Delta V}} \cdot$$

Con lo que sustituyendo en la ecuación de la velocidad:

$$\vec{v}_B = (v_x \ , v_y) = \left(\frac{q \cdot \Delta V}{m \cdot d} \cdot d \cdot \sqrt{\frac{2m}{q \cdot \Delta V}} \ , \ g \cdot d \cdot \sqrt{\frac{2m}{q \cdot \Delta V}} \right)$$

Y simplificando: $\vec{v}_B = \left(\sqrt{\frac{2q \cdot \Delta V}{m}} \ , \ g \cdot d \cdot \sqrt{\frac{2m}{q \cdot \Delta V}} \right)$

Con lo que se obtiene finalmente que:

$$|\vec{v}_B| = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot \Delta V}{m} + \frac{2m \cdot g^2 \cdot d^2}{q \cdot \Delta V}} \quad (5)$$

Si el resultado anterior es correcto, ¿qué debería ocurrir si en él introducimos la condición de g = 0?

En ese caso hipotético, el peso de la partícula sería despreciable, con lo que la ecuación (5) debería transformarse en la (4) y, efectivamente, como podemos comprobar, eso es lo que sucede.

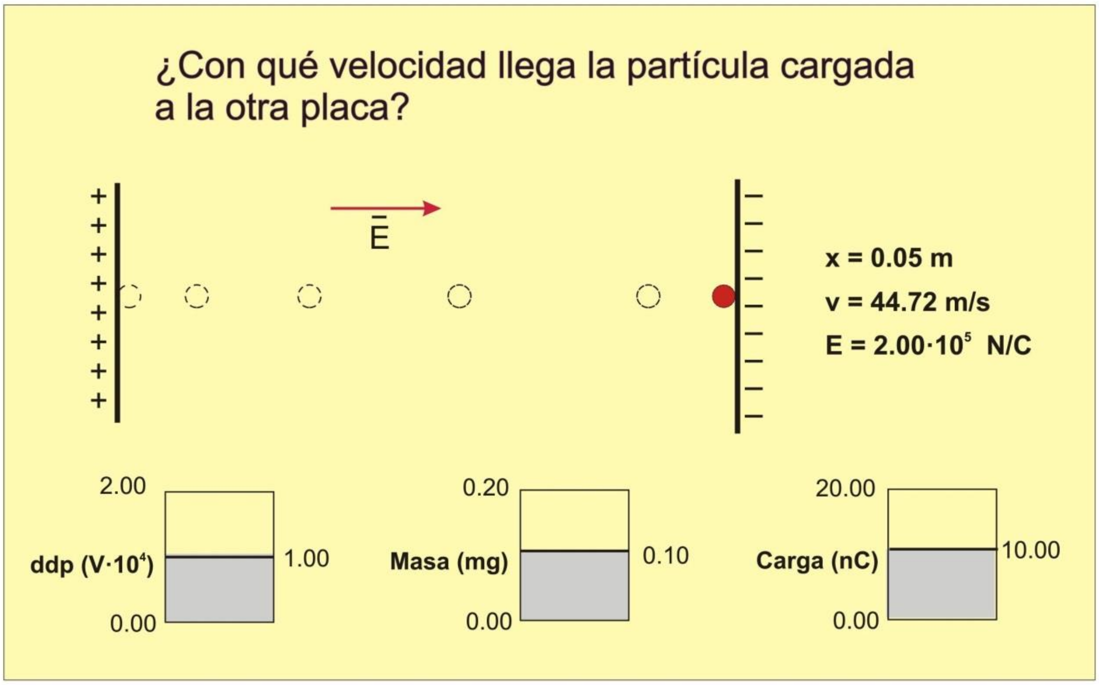
Podemos ahora obtener el resultado numérico sin más que sustituir valores en la ecuación (5), con lo que se obtiene: $|\vec{v}_B| = 44'72$ m/s. Este resultado numérico es prácticamente idéntico al que se obtuvo despreciando el peso de la partícula (coincide porque hemos ajustado el valor a solo dos cifras decimales). Para que la diferencia fuese más apreciable, el peso debería de ser mucho mayor. Así, por ejemplo, para una masa m = 50 mg, el resultado *(comprobadlo)* sería: $|\vec{v}_B| = 2'06$ m/s. Muy diferente al anterior.

El problema se puede extender desde aquí, considerando la posibilidad de *volver a resolverlo mediante trabajo y energía y también planteando nuevas preguntas como, por ejemplo: ¿Cuánto vale la desviación y_B? ¿Qué ocurre cuando la partícula se mueve perpendicularmente a las líneas de fuerza del campo eléctrico en lugar de paralelamente? ¿Y, cuando su velocidad inicial no es nula? etc.* Esta forma de actuar en la finalización de problemas de Física (o Química) es coherente con lo que ocurre en la finalización de las buenas investigaciones científicas, en las que, cuando es posible, utilizan distintos diseños para contrastar una misma hipótesis (lo que aumenta la validez y solidez de los resultados) y también se abren nuevas interrogantes. Así, al incorporar todo esto a los problemas, contribuimos a impulsar y desarrollar la competencia científica en alumnas y alumnos.

Refuerzo

Para reforzar algunos de los conceptos involucrados en este problema hemos creado una animación *Modellus*, que representa el movimiento de una partícula cargada entre las dos placas (sin considerar la influencia de la gravedad) y calcula en cada instante su posición y su rapidez, hasta obtener la rapidez buscada que corresponde al instante en el que la partícula alcanza la segunda placa. En la pantalla se dispone de tres controladores manuales con los que los alumnos pueden modificar los valores de los tres parámetros que influyen en el problema (ΔV, q y m), poniendo así a prueba sus hipótesis.

La imagen siguiente corresponde al resultado obtenido con los datos del enunciado en el instante en el que la partícula llega a la placa negativa.



La animación y el programa para hacerla correr en cualquier ordenador están disponibles en la página "Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física", de la Sección Local de Alicante de la RSEF. http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm