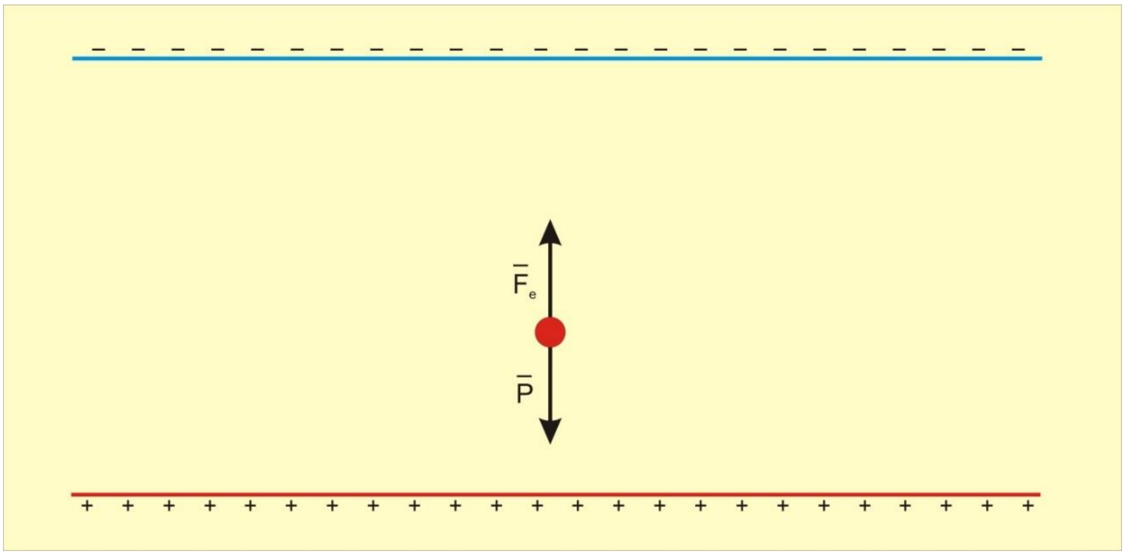
26. Supongamos dos láminas metálicas planas y paralelas dispuestas horizontalmente, homogéneamente cargadas con cargas iguales y de distinto signo, y separadas 20 cm entre sí. Se pide:

a) ¿Qué diferencia de potencial sería necesario aplicar entre las placas para que una partícula de 1 mg de masa y cargada positivamente con 10 nC, quede en suspensión cuando se abandona entre ellas?
b) Una vez que la partícula está en suspensión, calculad la velocidad con que llegaría a la placa superior si, de repente, se duplicase la diferencia de potencial

Planteamiento cualitativo de la situación

Al dejar una partícula cargada entre las láminas se ejercen sobre ella dos fuerzas: la fuerza electrostática, $\vec{F}_e$, y la gravitatoria $\vec{P}$. Para que la partícula quede en equilibrio, ambas fuerzas han de tener el mismo valor y sentidos contrarios. Por tanto, la fuerza electrostática deberá ser vertical y orientada hacia arriba y para que ello ocurra, dado que la partícula tiene carga positiva, la placa superior necesariamente deberá estar cargada negativamente. Esta situación inicial, se puede representar mediante la figura siguiente:



Supondremos que ambas placas son suficientemente grandes (en relación con el tamaño de la partícula) como para que la partícula cargada que colocamos entre ellas esté bastante alejada de los bordes. En esa zona el campo eléctrico es uniforme y su módulo E, la diferencia de potencial, ΔV (en valor absoluto) entre las placas y la distancia d entre ellas, sabemos que se relacionan mediante la expresión:

$$E = \Delta V/d \quad (1)$$

Plantead hipótesis acerca de los factores de los que dependerá ΔV

Para empezar, conviene tener en cuenta que, dado que E entre las placas es constante, no importará el punto concreto entre las dos placas en el que se abandone inicialmente a la partícula cargada, puesto que la fuerza eléctrica tendrá en todos ellos el mismo valor, al igual que la fuerza peso.

.
Cabe esperar que el valor de la diferencia de potencial (ddp) que hay que aplicar entre las placas para contrarrestar la acción del campo gravitatorio y mantener a la partícula en equilibrio, dependa de la distancia (d) entre dichas placas, de la carga (q) y de la masa (m) de partícula, así como de la intensidad del campo gravitatorio (g).

$$\Delta V = f\,(q, m, g, d)$$

De manera más precisa, podemos pensar, en principio, que ΔV deberá ser tanto mayor, cuanto mayores sean los factores que aumentan el peso de la partícula (m y g) y menor sea la carga q de la partícula. En cuanto a la distancia entre las placas, es lógico pensar que cuanto más separadas estén (siempre a igualdad de los restantes factores), mayor tendrá que ser la ddp a aplicar entre ellas.

Proceded a resolver el problema y analizad el resultado:

Sabemos que para que la partícula permanezca en reposo, debe cumplirse que las fuerzas que actúan sobre ella tengan el mismo módulo:

$F_e = P$ (2)

Por otra parte, también sabemos que: $P = mg$ y que: $F_e = q \cdot E = q \cdot \Delta V/d$

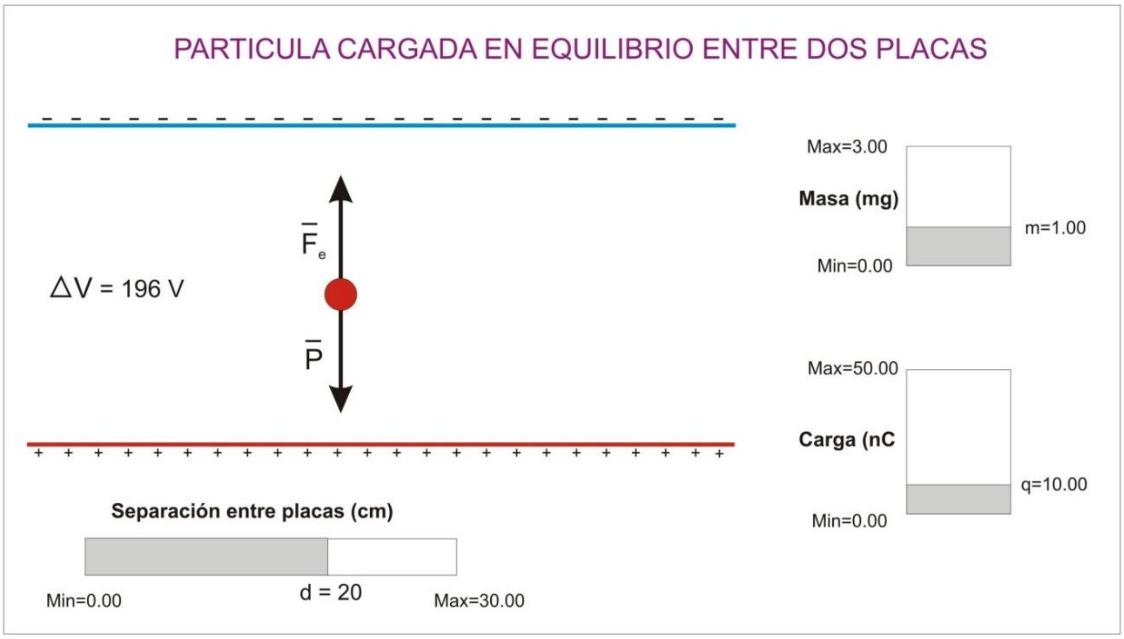
Sustituyendo las expresiones anteriores en la igualdad (2): $q \cdot \frac{\Delta V}{d} = mg$

Y despejando: $\Delta V = \frac{mg \cdot d}{q}$

El resultado anterior es dimensionalmente homogéneo (unidades de J/C a ambos lados de la expresión) y confirma todas las hipótesis que habíamos planteado. En el caso concreto que se nos plantea, al sustituir los valores que proporciona el enunciado, obtenemos:

$$\Delta V = \frac{mg \cdot d}{q} = \frac{10^{-6} \cdot 9'8 \cdot 0'2}{10 \cdot 10^{-9}} = 196\,V$$

Este desarrollo se puede reforzar con una animación *Modellus* que resuelve y visualiza la situación planteada. Es una animación interactiva con la que los estudiantes pueden modificar cualquiera de las variables y ver cómo influyen esas modificaciones en el resultado del problema. La imagen siguiente muestra el aspecto de la pantalla cuando dichos valores coinciden con los que hemos adoptado aquí.

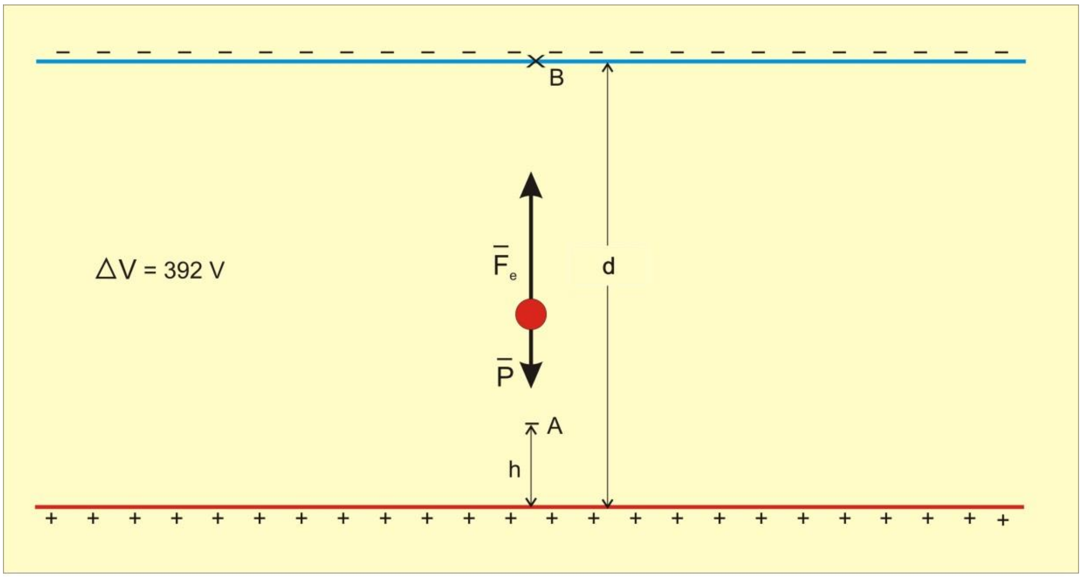


La animación y el programa para hacerla correr en cualquier ordenador están disponibles en la página "Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física", de la Sección Local de Alicante de la RSEF. http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm

Veamos ahora qué ocurre si se duplica el potencial entre las placas. Es evidente que entonces aumentará el módulo de la fuerza eléctrica y se mantendrá el de la fuerza gravitatoria. Por tanto, sobre la partícula se ejercerá una fuerza neta ascendente, que la llevará hacia la placa superior con un movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado.

¿De qué dependerá la rapidez con la que llegaría en este caso la partícula a la placa superior?

Para responder esta segunda cuestión, supondremos que la partícula empieza a moverse desde un punto A cualquiera, situado entre las placas hasta otro punto B situado en la placa superior.



Parece lógico pensar, que la rapidez v_B con que la partícula llegará a la placa superior, dependerá de su carga q, su masa m, la intensidad g del campo gravitatorio, la diferencia de potencial V_A-V_B, la posición inicial de la partícula (dada por h) y la distancia d que separa ambas placas. Es decir:

$$v_B = f\,(q, m, g, \Delta V, d, h)$$

Podemos precisar un poco más y tratar de avanzar la forma en que debería influir cada una de las variables anteriores (manteniendo constantes las restantes). En principio, cabe esperar que, la rapidez v_B con que la partícula llega a B sea mayor, cuando:

- Aumente la carga, ya que aumentar q implica aumentar el módulo de la fuerza eléctrica, dado por: $F_e = q \cdot E$, (y, por tanto, el de la fuerza neta que hace ascender a la partícula).

- Aumente la diferencia de potencial ΔV (en valor absoluto) entre las posiciones inicial (A) y final (B), porque un aumento de ΔV también implica un aumento de la intensidad del campo eléctrico E y, por tanto, de la fuerza eléctrica que se ejerce sobre la partícula hacia arriba.

- Disminuya el valor de g, puesto que la fuerza gravitatoria o peso (dada por $P = mg$), se opone al movimiento ascendente de la partícula.

En cuanto a la influencia de la masa m de la partícula, la situación es algo más compleja. Por una parte, cuanto mayor sea m (gravitatoria) menor deberá ser v_B, porque, en la situación planteada, la fuerza gravitatoria (proporcional a m) se opone al movimiento de la partícula. Por otro lado, un aumento de la masa m (inercial) también debería implicar una aceleración menor para una fuerza eléctrica dada ($a = F_e/m$), y, en consecuencia, un menor valor de v_B.

La influencia de la distancia d entre las placas y de la posición inicial h de la partícula, no es algo evidente de entrada, puesto que si d aumentase (a igualdad de los restantes factores), la distancia a recorrer por la partícula (dada por d-h) aumentaría, lo que haría que la partícula estuviese más tiempo subiendo sometida a una determinada aceleración hacia arriba y, por tanto, llegase a B con mayor rapidez. Sin embargo, si d aumenta, también disminuye la intensidad del campo eléctrico entre las placas (ved ecuación 1 anterior), lo que implica (siempre a igualdad de los restantes factores) menor fuerza eléctrica hacia arriba (dada por $Fe = q \cdot E$) haciendo que la aceleración de subida disminuya, lo que se traduciría en un movimiento ascendente más lento y, por tanto en una v_B menor.

Plantead posibles estrategias para obtener v_B.

Podemos considerar, al menos, dos maneras de abordar la resolución del problema.

-Mediante un planteamiento basado en consideraciones de trabajo y energía, que puede comenzar expresando la energía del sistema que forman la partícula, las placas y la Tierra (dado que es el campo gravitatorio terrestre el que se ejerce sobre la partícula). Como, tanto la fuerza gravitatoria como la fuerza eléctrica, son conservativas, la energía mecánica de este sistema se ha de conservar en la transformación que lleva a la partícula desde su posición inicial hasta su posición final. Por tanto, podremos imponer esa conservación para relacionar entre sí todas las variables implicadas en el problema y despejar la rapidez v_B.

-Mediante un planteamiento cinemático-dinámico a lo largo de la trayectoria, que puede comenzar obteniendo la expresión de la fuerza tangencial neta ejercida sobre la partícula.

A partir de aquí podremos obtener la aceleración sobre la trayectoria a_t y, seguidamente, escribir las ecuaciones de su movimiento (de la posición y de la rapidez). Usando dichas ecuaciones, podremos obtener el tiempo que emplea la partícula en llegar desde A hasta B y finalmente, sustituir ese tiempo en la ecuación de la rapidez, para obtener v_B.

Por supuesto, basta una cualquiera de las dos estrategias expuestas para resolver satisfactoriamente el problema y eso es lo que se suele hacer en general. No obstante, siempre es conveniente que, en determinados casos (y este puede ser uno de ellos), los estudiantes lleven a cabo distintas estrategias y comprueben que se llega al mismo resultado. Este proceder es un aspecto fundamental del trabajo científico y permite darse cuenta de la globalidad y coherencia del cuerpo de conocimientos científico implicado (en este caso la Mecánica), por lo que lo consideramos como algo esencial para contribuir a desarrollar de forma más efectiva la competencia científica en el alumnado.

Resolved el problema mediante la primera de las estrategias enunciadas

Empezamos designando un estado inicial (A), del sistema correspondiente a cuando se abandona la partícula cargada y otro final (B) cuando dicha partícula llega a la placa superior negativamente cargada. Las dos únicas fuerzas que intervienen (electrostática y gravitatoria) son conservativas y, por tanto, podemos afirmar que en ese cambio la energía mecánica del sistema se conserva:

$$\Delta E_{c(A-B)} + \Delta E_{p(A-B)} = 0 \quad (3)$$

La partícula parte del reposo en la posición A y llega a la placa negativa (posición B) con la velocidad buscada v_B. Por tanto, el aumento de energía cinética es:

$$\Delta Ec_{(A\rightarrow B)} = Ec_B - Ec_A = Ec_B - 0 = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 \quad (4)$$

En cuanto a la disminución global de energía potencial, resulta de un aumento de energía potencial gravitatoria y de una disminución de energía potencial eléctrica:

$$\Delta E_{p(A-B)} = \Delta E_{pg(A-B)} + \Delta E_{pe(A-B)} \quad (5)$$

En el sistema de referencia adoptado, el movimiento de la partícula conlleva un incremento de altura dado por (d-h). Por tanto, el aumento de energía potencial gravitatoria es:

$$\Delta Epg_{(A\rightarrow B)} = Epg_B - Epg_A = mgd - mgh = mg \cdot (d-h) \quad (6)$$

Mientras que la diminución de energía potencial eléctrica es:

$$\Delta Epe_{(A\rightarrow B)} = Epe_B - Epe_A = q \cdot V_B - q \cdot V_A = -q \cdot (V_A - V_B) \quad (7)$$

Obviamente, $\Delta V_{(A\text{-}B)}$ no coincide con el valor absoluto de la diferencia de potencial existente entre las placas, (a menos, claro está, que la partícula se abandonara justamente a la altura de placa inferior, positiva). No obstante, teniendo en cuenta que el campo eléctrico entre ambas placas es uniforme, podemos relacionar ambos incrementos.

En efecto, sabemos que: $E = \dfrac{\Delta V}{d}$ y que $E = \dfrac{\Delta V_{(A-B)}}{d-h}$

En las ecuaciones anteriores E representa el módulo del vector intensidad del campo eléctrico, por lo que los incrementos de potencial, deben expresarse en valores absolutos[1].

Igualando las dos expresiones anteriores y despejando, obtenemos:

$$\Delta V_{(A-B)} = \frac{\Delta V \cdot (d-h)}{d}$$

Por tanto, la ecuación 7, se puede escribir también, en función de los datos que tenemos, como:

$$\Delta Epe_{(A\to B)} = Epe_B - Epe_A = q\cdot V_B - q\cdot V_A = -q\cdot (V_A - V_B) = -q\cdot \frac{\Delta V\cdot (d-h)}{d} \quad (8)$$

Sustituyendo (6) y (8) en (5):

$$\Delta Ep_{(A\to B)} = \Delta Epg_{(A\to B)} + \Delta Epe_{(A\to B)} = mg\cdot (d-h) - \frac{q\cdot \Delta V\cdot (d-h)}{d}$$

Y simplificando:

$$\Delta Ep_{(A\to B)} = \left(mg - \frac{q\cdot \Delta V}{d} \right)\cdot (d-h) \quad (9)$$

Sustituyendo ahora (9) y (4) en la ecuación (3):

$$\Delta Ec_{(A\to B)} + \Delta Ep_{(A\to B)} = \frac{1}{2} m\cdot v_B^2 - \left(mg - \frac{q\cdot \Delta V}{d} \right)\cdot (d-h) = 0$$

Finalmente, despejando v_B de la ecuación anterior: $v_B = \sqrt{2\cdot \left(\frac{q\cdot \Delta V}{m\cdot d} - g \right)\cdot (d-h)}$ (10)

Analizando el resultado literal obtenido, nos podemos dar cuenta en primer lugar, de que es dimensionalmente homogéneo (L/T en ambos lados de la igualdad) y de que contempla las hipótesis de partida. Por ejemplo, que la rapidez v_B aumentará cuando q y ΔV aumenten y disminuirá cuando m y g aumenten.

El resultado es coherente con lo que debería ocurrir en el caso límite de que h aumentase hasta igualarse a d (v_B valdría 0, puesto que la partícula inicialmente ya estaría en B) y también permite *conocer el valor de v_B en el caso particular de que el punto A de partida fuese un punto de la placa inferior*. Basta para ello hacer h = 0 en la ecuación general (10) con lo que esta se transformaría en:

$$v_B = \sqrt{2\cdot \left(\frac{q\cdot \Delta V}{m\cdot} - g\cdot d \right)} \quad (11)$$

[1] El módulo de un vector no puede ser nunca una cantidad negativa, puesto que ningún vector puede tener un tamaño inferior a 0

Si queremos calcular ahora, para este caso particular, el valor numérico de v_B, no tenemos más que sustituir los datos que conocemos en la ecuación (11) anterior, con lo que:

$$v_B = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{10 \cdot 10^{-9} \cdot 392}{1 \cdot 10^{-6}} - 9'8 \cdot 20 \cdot 10^{-2} \right)} \rightarrow v_B = 1'96 \, \frac{m}{s}$$

Otra cuestión en la que podemos fijarnos es el orden de magnitud de los diferentes parámetros. Con los datos del enunciado, las dos fuerzas (eléctrica y gravitatoria) son del mismo orden de magnitud. Concretamente, al haber duplicado la ddp respecto al valor necesario de esta para que la partícula permanezca en equilibrio, ocurre que la fuerza eléctrica es el doble que la fuerza gravitatoria. En este caso concreto, los módulos de dichas fuerzas valen:

$F_e = q \cdot E = q \cdot \Delta V/d = 10 \cdot 10^{-9} \cdot 392/0'2 = 1'96 \cdot 10^{-5} N$

$F_g = m \cdot g = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 9'8 = 9'8 \cdot 10^{-6} N$

Ahora bien, conviene tener en cuenta que esto es así porque hemos supuesto una partícula cargada muy masiva, si la comparamos, por ejemplo, con diversas partículas elementales en las que podríamos pensar (por ejemplo, protones o electrones). La masa de tales partículas es muchísimo menor; también lo es, en consecuencia, la fuerza gravitatoria ejercida sobre ellas, y, de hecho, en este tipo de problemas dicha fuerza gravitatoria se puede despreciar. Las velocidades que alcanzan partículas como las citadas al someterse a la acción de campos eléctricos habituales, en general, tienen valores **muchísimo mayores** que el que hemos obtenido anteriormente, y el resultado literal anterior del problema se simplifica **para esos casos**[2], quedando entonces como:

$$v_B = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{q \cdot \Delta V}{m \cdot} \right)}$$

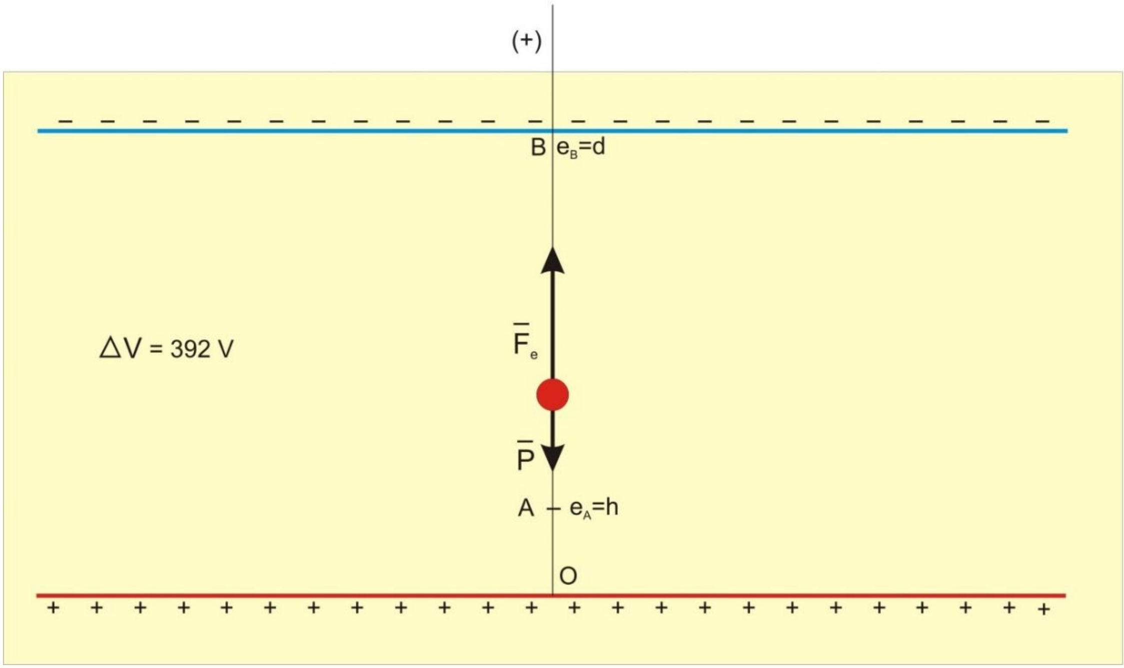
Obsérvese que, en la situación descrita en el párrafo anterior, la distancia d entre las placas, no influye en el valor de v_B (para unos valores dados de q, ΔV y m).

Para terminar, se puede proponer:

Obtened de nuevo v_B mediante la segunda de las estrategias enunciadas de resolución anteriormente enunciadas y comprobad que se llega al mismo resultado general que con la primera.

La figura siguiente, muestra esquemáticamente la situación planteada, en la que se puede observar el origen de espacios O escogido y las fuerzas que actúan sobre la partícula en un instante cualquiera de su trayectoria ascendente.

[2] Debe cumplirse que: $(q \cdot \Delta V/m) >>> g \cdot d \rightarrow q \cdot \Delta V >>> m \cdot g \cdot d$



Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica:

$$Fres_t = m \cdot a_t \rightarrow Fe - P = m \cdot a_t \rightarrow q \cdot E - m \cdot g = m \cdot a_t \;\rightarrow\; a_t = \frac{q \cdot E - mg}{m}$$

Dado que la aceleración tangencial es constante, se trata de un movimiento uniformemente acelerado, cuyas ecuaciones son:

$$v = v_0 + a_t \cdot (t - t_0)$$

$$e = e_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a_t \cdot (t - t_0)^2$$

En nuestro caso, teniendo en cuenta que para $t_0 = 0$, se cumple que: $v_0 = 0$, $e_0 = e_A = h$ y haciendo $v = v_B$ y $e = e_B = d$, estas ecuaciones se transforman en:

$$v_B = a_t \cdot t$$

$$d = h + \frac{a_t \cdot t^2}{2}$$

Despejando t de la primera y sustituyendo en la segunda: $d - h = \dfrac{v_B^2}{2 \cdot a_t}$

Si en la última ecuación sustituimos a_t por su expresión: $d - h = \dfrac{v_B^2 \cdot m}{2 \cdot (qE - mg)}$

Y despejando v_B: $v_B = \sqrt{2 \cdot \left(\dfrac{qE - mg}{m}\right) \cdot (d - h)}$

Dado que E es uniforme, tiene el mismo valor sea cual sea el punto en el que se halle la partícula, por lo que, en la ecuación anterior, podemos hacer:

$E = \dfrac{\Delta V}{d}$, obteniendo finalmente:

$$v_B = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{q \cdot \Delta V - g}{md} \right) \cdot (d - h)}$$

Como se puede apreciar, el resultado general obtenido, es el mismo que al que se llegó anteriormente mediante consideraciones de trabajo energía (ecuación 10). Podríamos haber optado, pues, perfectamente, por esta segunda estrategia de resolución en lugar de la primera y haber seguido analizando el resultado, etc.

Acabamos de estudiar el movimiento vertical de una partícula cargada cuando se abandona en el seno de un campo eléctrico generado por dos placas cargadas y paralelas. Para continuar, podemos preguntarnos qué ocurrirá cuando la partícula describa otro tipo de trayectorias. En el problema siguiente, se aborda un caso muy similar a este, con la diferencia de que la trayectoria descrita es horizontal en lugar de vertical.