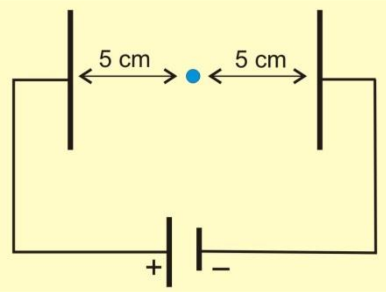
25. Una pequeña esfera conductora de 10 μg de masa y 1 mm de radio se carga conectándola a un potencial de -9000 V. Si se deja en el punto medio entre dos láminas verticales separadas 10 cm y conectadas a una diferencia de potencial ΔV, determinad:



Valor de ΔV, si sabemos que llega hasta la lámina correspondiente con una rapidez de 10 m/s (se desprecia el efecto de la fuerza peso).

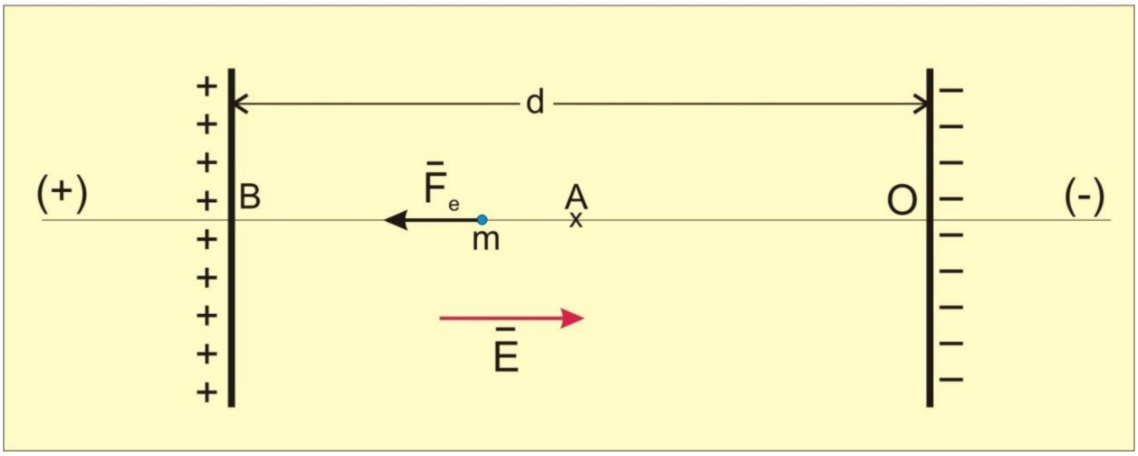
Para comenzar, obtendremos la carga, q, que adquirió la esfera cuando se conectó a un potencial de - 9000 V:

Sabemos que el potencial en la superficie de una esfera cargada viene dado por:

$V = K \cdot q/R$

Bastará, pues, con despejar q y sustituir: $q = V \cdot R/K = -9000 \cdot 10^{-1} / 9 \cdot 10^{9} = -10^{-7}$C

Al tener en cuenta este dato, vemos que sobre la esfera, se ejerce una fuerza eléctrica F_e horizontal, constante y de sentido opuesto al del campo eléctrico establecido entre las placas del condensador (ya que la carga de dicha esfera es negativa). Por tanto, se moverá desde el punto A hasta el B, con movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado.



Si se quiere que llegue a B con una determinada rapidez v_B, es lógico plantear que la diferencia de potencial ΔV necesaria entre las placas, dependerá del valor que se asigne a v_B, de la carga q y la masa m de la esfera, de su posición inicial e_A y de la distancia d entre ambas placas.

$$\Delta V = f\,(v_B, q, m, e_A, d)$$

Más concretamente, a igualdad de los restantes factores, cabe esperar que ΔV sea mayor cuanto mayor sea v_B y también cuanto mayor sea m, (ya que un valor mayor de dicha masa, inercial, implicará una menor aceleración de la esfera) y la distancia d entre las placas (ya que una distancia mayor implica una fuerza eléctrica más débil sobre ella). En cambio, la ΔV deberá ser menor cuanto mayor sea q y también cuanto mayor sea el desplazamiento $e_B - e_A$ ya que, a mayor valor de q, mayor será la fuerza eléctrica sobre la esferita y a mayor desplazamiento (siempre a igualdad de los restantes factores), mayor será la distancia recorrida y, por tanto, durante más tiempo estará actuando la fuerza eléctrica.

¿Cómo podemos resolver el problema?

Podemos plantear, como en el problema anterior sendas estrategias de resolución (cinemático-dinámica o trabajo y energía). Nos decantaremos, en este caso, por la primera:

Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica:

$$Fres_t = m \cdot a_t \rightarrow Fe = m \cdot a_t \rightarrow q \cdot E = m \cdot a_t \rightarrow \quad a_t = \frac{q \cdot E}{m}$$

Teniendo en cuenta que E = ΔV/d y sustituyendo en la ecuación anterior: $a_t = \dfrac{q \cdot \Delta V}{m \cdot d}$

Dado que la aceleración tangencial es constante, se trata, como ya hemos indicado, de un movimiento uniformemente acelerado, cuyas ecuaciones son:

$$v = v_0 + a_t \cdot (t - t_0)$$
$$e = e_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a_t \cdot (t - t_0)^2$$

En nuestro caso, teniendo en cuenta que para $t_0 = 0$, se cumple que: $v_0 = 0$, $e_0 = e_A$, y que, cuando llegue a la placa de enfrente en el instante "t" se cumplirá que: $v = v_B$ y $e = e_B = d$, las ecuaciones anteriores se transforman en:

$$v_B = a_t \cdot t$$
$$d = e_A + \frac{a_t \cdot t^2}{2}$$

Despejando t de la primera y sustituyendo en la segunda: $d - e_A = \dfrac{v_B^2}{2 \cdot a_t}$

Si en la última ecuación sustituimos a_t por su expresión, obtenemos que: $d - e_A = \dfrac{v_B^2 \cdot m \cdot d}{2 \cdot q \cdot \Delta V}$

Finalmente, despejando: $\boxed{\Delta V = \dfrac{v_B^2 \cdot m \cdot d}{2 \cdot q \cdot (d - e_A)}}$ (1)

Sustituyendo ahora los valores numéricos proporcionados en el enunciado:

$$\Delta V = \frac{10^2 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-2}} \quad \rightarrow \quad \Delta V = 10^3 \text{ V}$$

Analizando el resultado literal de la ddp podemos comprobar que es homogéneo (unidades de J/C en ambos lados de la igualdad). También se comprueba que se cumplen las hipótesis previamente planteadas. En efecto, si se observa el resultado literal, se ve fácilmente cómo si se aumenta el valor de la rapidez con la que se quiere que la esferita impacte en la placa, la diferencia de potencial entre ambas placas ha de aumentar, mientras que, si aumentamos la carga de la esferita, ΔV disminuye.

Es interesante analizar lo que ocurre con el desplazamiento experimentado por la esferita (dado por $d-e_A$). Analizando el resultado, vemos que (para una distancia d determinada), cuanto mayor sea dicho desplazamiento, menor será la diferencia de potencial ΔV necesaria.

Vale la pena tener en cuenta también que la posición inicial e_A de la esferita, en el sistema de referencia escogido, siempre ha de estar comprendido entre 0 y d.

Analizad qué ocurre con ΔV en el caso particular de que $e_A = 0$ *y en el caso de que* $e_A \rightarrow d$

Haciendo $e_A = 0$ en el resultado literal:

$$\Delta V = \frac{v_B^2 \cdot m \cdot d}{2q \cdot (d-0)} \quad \rightarrow \quad \Delta V = \frac{v_B^2 \cdot m}{2q} \qquad (2)$$

Vemos que, en este caso particular la diferencia de potencial requerida (para conseguir una v_B determinada), no depende de la distancia d que separa ambas placas.

En el segundo caso, si imaginamos que e_A va aumentando, vemos que, en el límite, cuando $e_A \rightarrow d$ ocurre que $\Delta V \rightarrow \infty$, lo cual es lógico, puesto que si el punto A de partida (esferita inicialmente en reposo), estuviese muy próximo a la placa positiva donde se ha de llegar con una determinada velocidad, haría falta una gran diferencia de potencial para conseguir una fuerza eléctrica lo bastante grande como para permitir alcanzar dicha velocidad en tan corto espacio, partiendo del reposo.

Conviene aclarar, por otra parte, que en la expresión que calcula ΔV hemos obviado el signo de la carga, de tal modo que realmente hemos obtenido un valor absoluto de dicha diferencia de potencial. El signo de ΔV será positivo siempre que $V_{final} > V_{inicial}$ y será negativo en el caso contrario. En este caso, la fuerza eléctrica desplaza a una carga negativa en sentido opuesto al del campo eléctrico establecido entre las placas del condensador. Podemos recordar que el campo eléctrico se orienta siempre en el sentido en el que decrece el potencial (de mayor a menor potencial eléctrico) y concluir que en este caso la diferencia de potencial obtenida es positiva.

Una vez resuelto el problema, podemos detenernos a comprobar en qué grado la simplificación realizada al inicio de haber despreciado la fuerza gravitatoria está justificada.

En unidades del Sistema Internacional, el módulo de dicha fuerza gravitatoria es:

$F_g = m \cdot g = 10 \cdot 10^{-9} \cdot 9'8 = 9'8 \cdot 10^{-8}$ N.

Y el de la fuerza eléctrica es:

$Fe = q \cdot E = q \cdot \Delta V/d = 10^{-7} \cdot 1000/0.5 = 2 \cdot 10^{-4}$ N

Dividiendo Fe/ Fg, resulta:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{9.8 \cdot 10^{-8}} = 2041$$

Es decir, la fuerza eléctrica es 2041 veces mayor que la fuerza gravitatoria y, por tanto, es adecuado haber despreciado la segunda. Cabe plantearse, pues, qué es lo que ocurre cuando no podamos hacer esta simplificación y haya que considerar como un factor a tener en cuenta, el peso de la partícula.