24. Sea un condensador plano vertical cargado a una diferencia de potencial de 5000 V. Entre sus placas, separadas 20 cm, se sitúa un péndulo eléctrico cuya esfera metálica tiene 1 mm de radio y una densidad de 5 g/cm^3. Determinad el ángulo que formará el péndulo en situación de equilibrio, si la esfera del mismo se cargó a 2000 V.

Un condensador es un dispositivo formado por dos partes metálicas (llamadas armaduras) que están separadas por un aislante. En nuestro caso, las partes metálicas son dos placas de superficies planas y paralelas y el aislante será el aire.

¿Qué es lo que sucede cuando dos láminas conductoras, iguales, descargadas y paralelas, se conectan a los extremos de un generador?

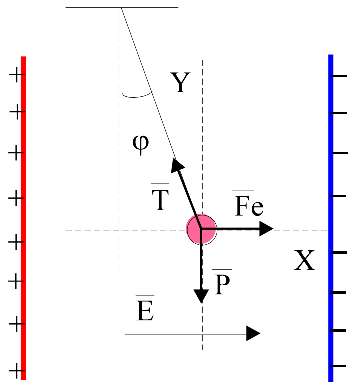
Al estar las láminas inicialmente descargadas, el potencial en ellas será nulo, de modo que por los hilos conductores circularán cargas hasta que el potencial de la placa conectada al polo positivo se iguale al de este, y la placa conectada al polo negativo también se iguale al potencial de dicho polo. Es decir, habrá flujo de cargas hasta que la diferencia de potencial entre las láminas sea la misma que entre los polos del generador, siendo la carga adquirida por una lámina, igual y de signo contrario a la adquirida por la otra. Las cargas suministradas por el generador a cada lámina se distribuirán por su superficie alejándose lo más posible unas de otras (ya que se repelen y las láminas son conductoras) hasta alcanzar una situación de equilibrio (reposo).

Entre las láminas del condensador cargado se establece un campo eléctrico uniforme creado por las distribuciones de carga existentes en ellas. Dicho campo es perpendicular a las láminas (sentido desde la positiva a la negativa) y su módulo vale $E = V_{AD}/d$ (ved problema anterior), siendo V_{AD} la diferencia de potencial existente entre las láminas (igual a la suministrada por el generador V_{BC}) y d la distancia a que se hallan separadas.

En el problema se nos dice que entre las láminas de un condensador plano se introduce un péndulo cuya esfera se halla cargada eléctricamente.

¿Qué le ocurrirá a la esfera?

Para comprender lo que le sucede, conviene comenzar viendo qué fuerzas actúan sobre ella. Al encontrarse en el seno de un campo eléctrico y estar cargada, sobre la esfera, además del peso $\vec{P}$ y de la tensión $\vec{T}$ del hilo, actuará una tercera fuerza que será la fuerza electrostática $\vec{F}_e$ ejercida por el campo, lo que da lugar al estado de equilibrio representado en la figura de la derecha, en el que la esferita se halla en reposo y donde se cumplirá que:



$$\vec{F}_e + \vec{P} + \vec{T} = 0$$

Como podemos ver en la figura, el hilo del péndulo forma un cierto ángulo φ respecto de la vertical. Podemos plantearnos ahora:

¿De qué dependerá dicho ángulo y cómo lo hará?

Cabe esperar que el ángulo φ dependa de la carga del péndulo, q, de la diferencia de potencial entre las placas, V_{AD}, del peso (masa, m, y gravedad, g) de la bolita y de la distancia entre las placas, d:

$$\varphi = f\,(q, V_{AD}, m, g, d)$$

Concretamente, cabe esperar que cuanto mayor sea la diferencia de potencial entre las láminas, V_{AD}, mayor sea el ángulo buscado, puesto que una diferencia de potencial mayor implica que sea mayor la intensidad del campo eléctrico establecido entre las placas y, por tanto, F_e (puesto que $F_e = q\cdot E$). Análogamente ocurrirá con la carga q, puesto que a mayor valor de q (a igualdad siempre de los restantes factores), también será mayor la fuerza eléctrica sobre la bolita y, consecuentemente, mayor será φ. En cuanto a la influencia del peso de la bolita, cuanto mayor sean tanto m, como g, cabe esperar que sea menor el ángulo buscado, porque la fuerza peso actúa sobre el péndulo eléctrico en dirección vertical y descendente. Finalmente, con respecto a la influencia de la distancia d entre las placas, cabe esperar que cuanto mayor sea esta, menor sea el valor del ángulo φ, porque menor será F_e ya que la intensidad del campo eléctrico que se establece entre las placas es inversamente proporcional a d ($E=V_{AD}/d$).

Es posible también imaginar algunos casos límite evidentes como, por ejemplo, que si la diferencia de potencial fuese nula, φ valdría 0; o que si el peso fuese nulo (por ejemplo, si no hubiese gravedad), el ángulo debería ser 90º.

Estrategias de resolución y resolución

Una posible estrategia para obtener, φ, es empezar aplicando la condición de equilibrio:

$$\vec{F}_e + \vec{P} + \vec{T} = 0$$

Seguidamente habrá que expresar cada uno de los vectores en función de sus componentes escalares y despejar φ.

De esta forma tenemos:

$\vec{F}_e = q\cdot \vec{E} = q\cdot (E, 0) = (qE, 0)$

$\vec{P} = (0, -P) = (0, -mg)$

$\vec{T} = (T_x, T_y) = \left[T\cdot \cos(90+\varphi)\,,\ T\cos\varphi\right] = (-T\text{sen}\ \varphi\ , T\cos\ \varphi)$

Sustituyendo en: $\vec{F}_e + \vec{P} + \vec{T} = 0 \rightarrow (qE, 0) + (0, -mg) + (-T\text{sen}\ \varphi\ , T\cos\ \varphi) = 0$

La ecuación vectorial obtenida puede descomponerse en dos escalares:

$qE - T\text{sen}\ \varphi = 0 \rightarrow T\text{sen}\ \varphi = qE$

$T\cos\ \varphi - mg = 0 \rightarrow T\cos\ \varphi = mg$

Dividiendo entre si ambas ecuaciones obtenemos: $tg\varphi = \dfrac{qE}{mg}$

Y teniendo en cuenta que $E = \dfrac{V_{AD}}{d}$, obtenemos finalmente: $tg\varphi = \dfrac{q\cdot V_{AD}}{mg\cdot d}$

Podemos ahora, *analizar este primer resultado*, comprobando que, además de ser dimensionalmente homogéneo, contempla las hipótesis iniciales siendo fácil ver, por ejemplo, que cuanto mayor sea la carga q mayor será el ángulo φ (siempre a igualdad de los restantes factores), o que si el campo gravitatorio fuese nulo tg φ sería ∞, lo cual corresponde a un ángulo de 90º y que si no hubiese diferencia de potencial entre las placas, tg φ sería 0, lo cual corresponde a un ángulo de 0º (hilo en la vertical).

Ahora bien, teniendo en cuenta cuáles son los datos que proporciona el enunciado, para calcular el valor de φ todavía nos queda *averiguar el valor de q y de la masa de la esfera conductora*. Para obtener la carga, q, sabemos que la esferita se cargó a 2000 V.

Por tanto, a partir de V = $K \cdot \frac{q}{R}$, podemos despejar q, con lo que se obtiene:

$$q = \frac{V \cdot R}{K} = \frac{2000 \cdot 10^{-3}}{9 \cdot 10^{9}} = 2'22 \cdot 10^{-10} \text{ C}$$

En cuanto a la masa, como conocemos la densidad basta hacer m = ρ·V, siendo V el volumen de la esferita y ρ su densidad, de manera que:

$$m = 5000 \cdot \frac{4}{3} \pi^{3} (10^{-3})^{3} = 2'1 \cdot 10^{-5} \text{ kg}$$

Sustituyendo los valores numéricos hallados en el resultado literal, obtenemos:

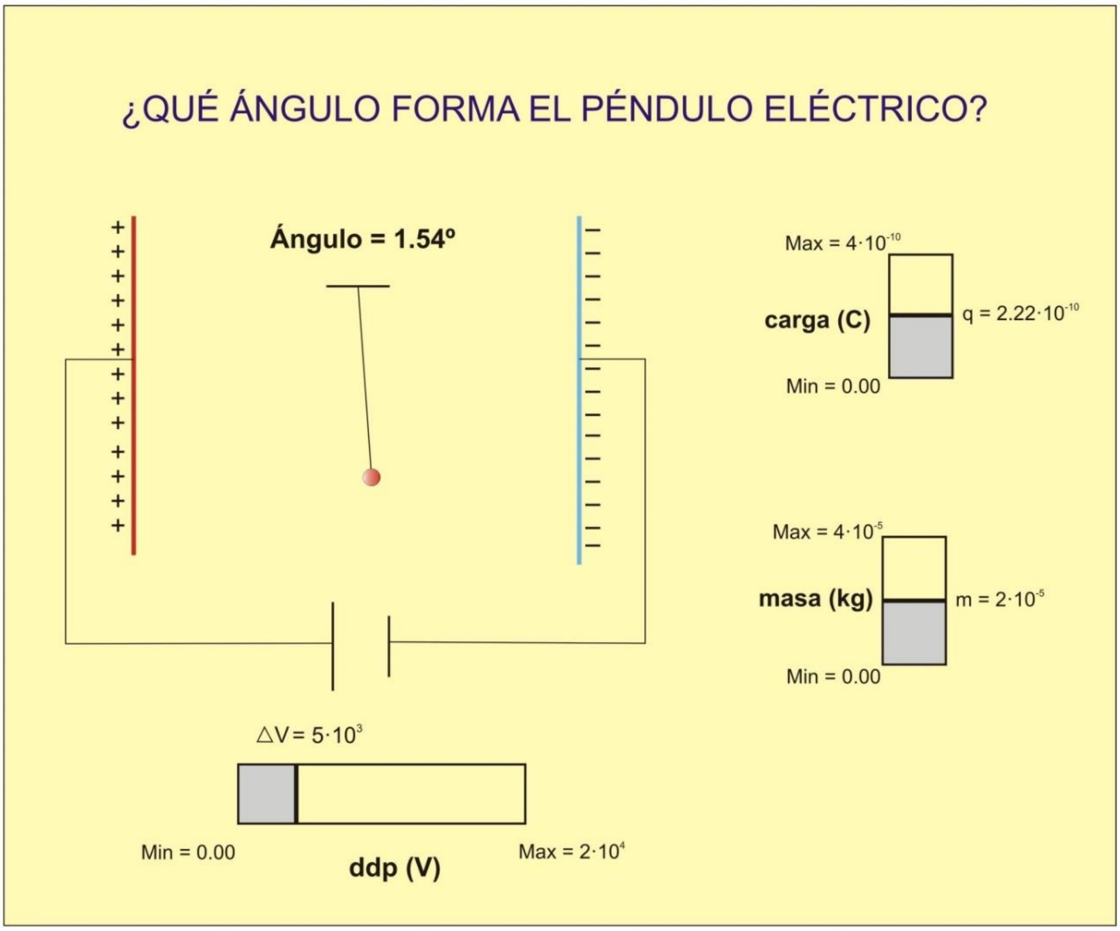
$$\text{tg } \varphi = 2'7 \cdot 10^{-2} \rightarrow \varphi = 1'5^{\circ}$$

Como es lógico este dispositivo se puede utilizar también para, conocido experimentalmente el valor del ángulo que se desvía el péndulo, poder determinar el valor de una carga desconocida.

Refuerzo:

Para reforzar este problema, los alumnos pueden usar una animación *Modellus*, que hemos elaborado sobre él. Con ella, los estudiantes pueden probar diferentes valores del potencial aplicado entre las placas del condensador, así como de la carga y de la masa del pendulito eléctrico.

La figura siguiente muestra el aspecto de la pantalla cuando los valores de todos estos parámetros coinciden con los que hemos adoptado aquí.



La animación y el programa para hacerla correr están disponibles en la página "Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física", de la Sección Local de Alicante de la RSEF. http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm