22. Teniendo en cuenta la expresión que relaciona el trabajo realizado por el campo eléctrico con la diferencia de potencial entre dos puntos del mismo, así como la proporcionalidad existente entre fuerza e intensidad de campo, obtened una expresión que relacione la intensidad del campo con la diferencia de potencial.

Sabemos que el trabajo realizado por las fuerzas del campo eléctrico cuando se traslada una carga testigo desde un punto A hasta otro punto B, se relaciona con la diferencia de potencial entre esos dos puntos, de acuerdo la ecuación siguiente:

$W = -q\,(V_B - V_A)$ o lo que es equivalente: $W = -q\int_A^B dV$ (1)

Ese mismo trabajo se puede expresar también como:

$$W = \int_A^B F_t \cdot de = \int_A^B qE_t \cdot de = q\int_A^B E_t \cdot de \quad (2)$$

En la expresión (2) anterior, "F_t" es la componente escalar tangencial del vector fuerza eléctrica que actúa sobre una pequeña carga "q" que se mueve en el seno de un campo eléctrico siguiendo una trayectoria que se conoce de antemano, y "de" un cambio de posición infinitesimal experimentado por dicha carga (también se suele designar como "dr").

Haciendo (1) = (2) obtenemos que: $-\int_A^B dV = \int_A^B E_t \cdot de$ y por tanto:

$-\Delta V = \int_A^B E_t \cdot de$ o bien para un desplazamiento infinitesimal: $-dV = E_t \cdot de$

La última expresión obtenida también suele escribirse como $E_t = -\dfrac{dV}{de}$ (3)

Cuando se escribe de esta forma es fácil de comprender que en un desplazamiento infinitesimal, la variación de V con la posición sobre la trayectoria "e", nos indica (cambiado de signo) el valor de la componente tangencial del vector intensidad de campo eléctrico en el punto considerado.

Utilizad la expresión (3) para:

a) *Comprobar que la intensidad del campo eléctrico en un punto ha de ser perpendicular a la superficie equipotencial que contiene a dicho punto.*

En efecto, al ser equipotencial, la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera contenidos en dicha superficie ha de ser nula. Ello implica que, dado un punto cualquiera de una superficie equipotencial, al desplazarnos un "de" sobre dicha superficie, se cumplirá que $dV = 0$, con lo que, de acuerdo con (3), E_t también será 0. Por tanto, el vector campo eléctrico $\vec{E}$ en esos puntos, solo tiene componente normal, o, lo que es equivalente, el vector intensidad de campo eléctrico en cualquier punto de una superficie equipotencial ha de ser perpendicular a dicha superficie. En consecuencia, dado que las líneas de fuerza son siempre tangentes a la intensidad del campo eléctrico, también podemos concluir que las líneas de fuerza de cualquier campo eléctrico atraviesan siempre perpendicularmente a cualquier superficie equipotencial.

b) *Deducir la relación existente entre la variación de energía potencial y la fuerza eléctrica realizada por el campo en un desplazamiento infinitesimal.*

A partir de $E_t = -\dfrac{dV}{de}$ y multiplicando por "q": $q \cdot E_t = -\dfrac{q \cdot dV}{de} \rightarrow F_t = -\dfrac{dE_p}{de}$

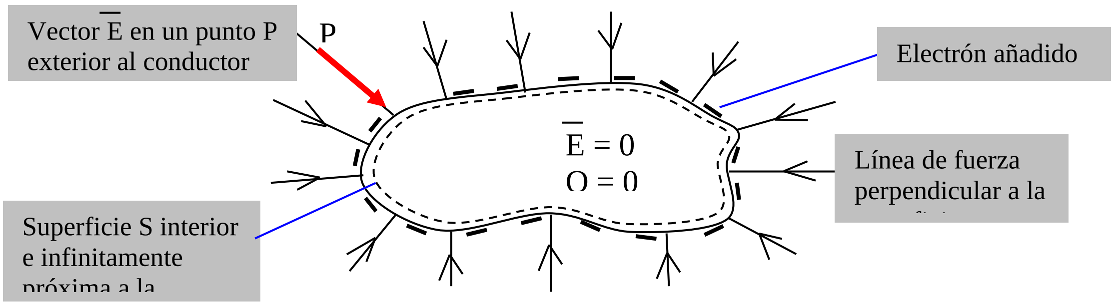
c) Demostrar que en el interior de un conductor cargado y en equilibrio electrostático, el potencial V es constante.

En efecto, cargar eléctricamente un conductor inicialmente neutro, supone descompensar su carga neta nula añadiendo o extrayendo electrones. Partiendo de esta situación, es lógico pensar que el exceso "Q" de carga añadido (sea esta positiva o negativa), al tratarse de un material conductor por el que las cargas libres se pueden mover con gran facilidad, se distribuirá por toda la superficie exterior, del conductor, ya que entre las cargas libres que suman la carga Q añadida, se ejercerán fuerzas de repulsión y, consecuentemente, se separarán lo más posible unas de otras hasta que al llegar a la superficie exterior, se alcanza una situación de "equilibrio electrostático". Todo este proceso puede durar apenas una pequeña fracción de segundo.

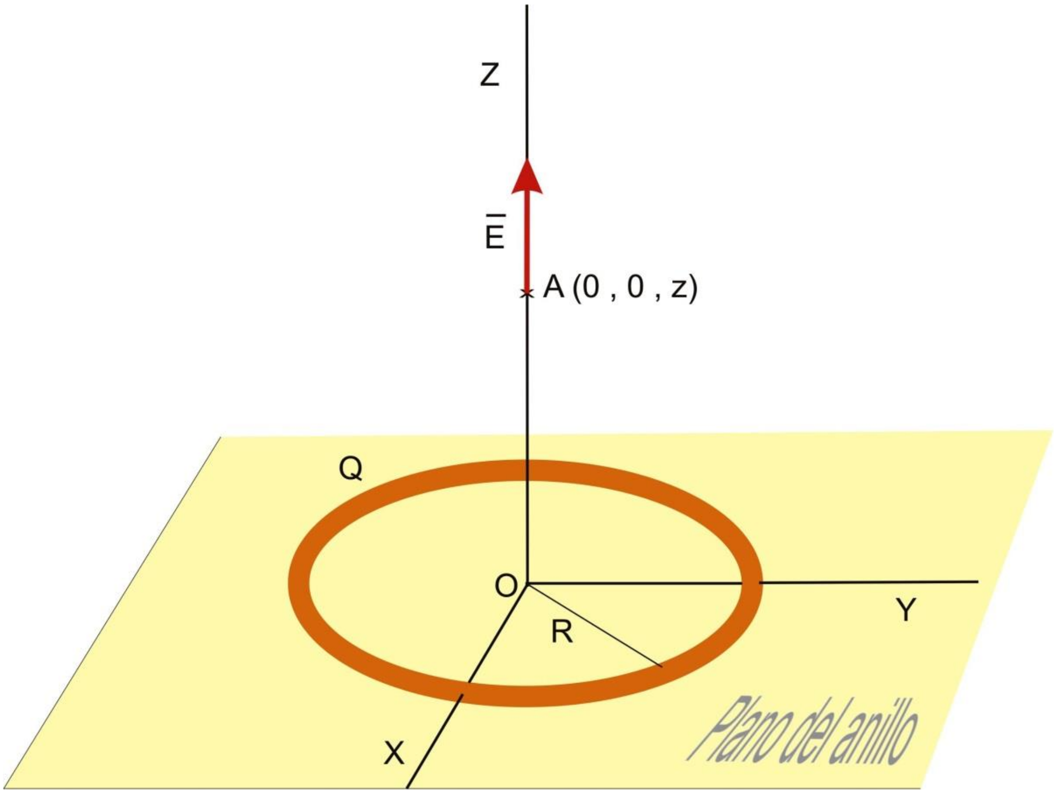
De acuerdo con las consideraciones anteriores, se puede comprender que, en cualquier punto del interior del conductor, una vez alcanzado el estado de equilibrio, no existirá campo eléctrico alguno, puesto que, si lo hubiese, ello provocaría inmediatamente un movimiento de carga (electrones) por el interior del material conductor, incompatible con el hecho experimental observado de equilibrio electrostático.

Por tanto, si en el interior del conductor E = 0 y no hay desplazamiento de cargas, de acuerdo con la expresión (3) anterior, se cumplirá que:

El potencial V en el interior del conductor cargado y en equilibrio electrostático, ha de ser constante e igual al existente en la superficie.



Este ejercicio también se puede extender comprobando cómo la expresión obtenida, también sirve para resolver de forma más sencilla, otros problemas que ya se abordaron anteriormente. Este sería el caso, por ejemplo, del problema 5 en el que se planteaba la determinación de la intensidad del campo eléctrico creado por un anillo cargado en un punto del eje perpendicular al plano del anillo y que pasa por su centro (ved figura siguiente).



En el problema 5 obtuvimos (laboriosamente) que los valores de E y de V que caracterizan el campo eléctrico generado por la carga neta Q del anillo de la figura, en el punto A, eran respectivamente:

$$E = K \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot 2 \cdot \left(1 - \frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right) \quad (5)$$

$$V = K \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot 2 \cdot (\sqrt{R^2+z^2} - z) \quad (6)$$

Otro método alternativo de obtener E hubiese sido obtener primero el valor de V y después aplicar la expresión (3) para determinar E. Comprobadlo.

La variable para indicar la posición sobre la trayectoria, sería ahora la coordenada "z". Por tanto, se trata, simplemente de aplicar la expresión E_t = -dV/dz a la ecuación (6) y simplificar, con lo que se obtiene rápidamente, el valor de E.

$$E_t = -\frac{dV}{dz} = K \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot 2 \cdot \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$$

Esto mismo, se puede hacer en el caso de un disco cargado (problema 6).