20. Una esfera metálica (1) de 10 cm de radio, aislada, se carga a una tensión de $5 \cdot 10^3$ V. ¿Cuál es su carga en culombios? A continuación se une a otra esfera también metálica (2) descargada y aislada, de 8 cm de radio. ¿Cuál es la carga que adquiere (2)? ¿Cuánto vale el potencial de cada una después del contacto? Datos: K = $9 \cdot 10^9$ U.I.

Planteamiento cualitativo

En este problema el fenómeno implicado es una transferencia de carga de una esfera a otra. Podemos generalizarlo imaginando que antes de que se pongan en contacto cada esfera pueda tener una determinada carga: Q_1 la esfera (1) y Q_2 la esfera (2). Sabemos que para que se produzca esa transferencia de carga de una a otra al conectarse entre sí, debe haber una diferencia de potencial inicial entre las dos esferas. Entonces, se producirá una transferencia de carga positiva desde la que está a mayor potencial a la otra cuyo potencial es menor, hasta que ambos potenciales se igualen.[1]

También sabemos que el potencial a que se encuentre cada esfera, depende de la carga neta que tenga y de su radio. Podemos decir que potencial eléctrico mide de alguna forma "la densidad de carga neta", ya que cuanto mayor sea la carga neta por unidad de superficie, mayor será el potencial de la esfera (en valor absoluto).

Para simplificar el problema, supondremos que el medio es el vacío y que no existe ninguna influencia de las esferas entre ellas que no sea el conductor con el que las unimos. También supondremos que no hay ninguna pérdida de carga al exterior.

El problema, se puede, pues, reformular, con un enunciado más abierto y más general, como:

Dos esferas conductoras cargadas y convenientemente alejadas, se conectan mediante un hilo conductor. ¿Qué carga pasa de una a otra?

Hipótesis

De acuerdo con las consideraciones anteriores, podemos pensar que, la carga Q transferida dependerá de los valores iniciales de carga de cada esfera Q_1 y Q_2, así como de los radios respectivos R_1 y R_2:

$Q = f(Q_1, Q_2, R_1, R_2)$

Concretamente, cabe suponer que, cuando se mantienen constantes los restantes factores:

Q aumente cuanto mayor sea la diferencia de carga entre ambas esferas
Q aumente cuanto mayor sea la diferencia entre los radios de ambas esferas

Podemos imaginar algunos supuestos de fácil interpretación. Por ejemplo: si las dos esferas tuviesen el mismo tamaño ($R_1 = R_2$), la esfera (2) estuviese inicialmente descargada y la esfera (1) cargada con Q_1 (positiva), la carga positiva transferida Q,

[1] En realidad, son los electrones (cargas negativas) quienes se mueven y se trasladan desde la esfera a menor potencial hacia la esfera a mayor potencial, aunque el resultado es totalmente equivalente a un movimiento de carga positiva en sentido contrario.

valdría justamente $Q_1/2$ e iría de (1) a (2). Si se repitiese la misma situación, pero siendo ahora la carga de la esfera (1) negativa, entonces la carga Q transferida valdría justamente $-Q_1/2$.

Por supuesto, si las dos esferas fueran del mismo tamaño ($R_1 = R_2$) y tuviesen inicialmente la misma carga ($Q_1 = Q_2$), entonces no habría ninguna transferencia de carga, es decir, sería $Q = 0$.

Ahora bien, este resultado ($Q = 0$) también se podría dar, aunque las dos esferas no tuvieran el mismo tamaño ($R_1 \neq R_2$), ya que una diferencia de tamaño entre ellas no impide que ambas puedan cargarse aplicándoles el mismo potencial ($V_1 = V_2$). Este proceso llevaría a la esfera de mayor radio a adquirir una carga inicial también mayor que la de menor radio ($Q_1 \neq Q_2$). Este caso posible nos recuerda que lo que es determinante para que haya una transferencia de carga entre las esferas, no es que haya más carga en una que en otra, sino que el potencial de una sea mayor que el de la otra.

Otro caso particular de este tipo que podemos plantear es lo que ocurrirá cuando ambas esferas posean inicialmente la misma carga neta ($Q_1 = Q_2$) pero sean de distinto tamaño ($R_1 \neq R_2$). Evidentemente, en este caso también se ha de producir una transferencia de carga, ya que el potencial de la de menor radio será mayor que el potencial de la otra, y pasará carga positiva de la primera a la segunda[2].

Estrategias de resolución y resolución

Una vez producido el contacto y efectuada la transferencia de carga desde la esfera a mayor potencial a la otra, el potencial final de ambas esferas deberá ser el mismo. Por tanto, una forma de resolver el problema, será expresar el potencial final de cada esfera $V_1^{'}$ y $V_2^{'}$ en función de su carga final y el radio e igualarlos, teniendo en cuenta que no hay ninguna pérdida de carga y que, por tanto, la carga perdida por una ha de ser justo la ganada por la otra. Así, en el caso que el potencial inicial de la esfera (1), sea mayor que el potencial inicial a que se halla la esfera (2), el transvase de carga positiva se producirá de (1) hacia (2), de modo que:

Situación inicial (esferas aisladas, separadas y sin influencia mutua):

Esfera (1): $V_1 = K \cdot \dfrac{Q_1}{R_1}$

Esfera (2): $V_2 = K \cdot \dfrac{Q_2}{R_2}$

Transferencia de carga Q de (1) a (2), de modo que la carga final en la primera esfera será Q_1-Q y en la segunda Q_2+Q

Situación final (después de conectar ambas esferas):

Esfera (1): $V_1^{'} = K \cdot \dfrac{Q_1 - Q}{R_1}$

[2] Es algo parecido a lo que ocurre cuando se ponen en contacto dos recipientes que contienen la misma cantidad de agua pero en uno el nivel del agua es mayor que en el otro. Habrá un transvase de agua desde donde hay más nivel al otro, hasta que se igualen los niveles (situación de equilibrio)

Esfera (2): $V_2^{'} = K \cdot \dfrac{Q_2 + Q}{R_2}$

Igualando los potenciales finales:

$$V_1^{'} = V_2^{'} \rightarrow K \cdot \frac{Q_1 - Q}{R_1} = K \cdot \frac{Q_2 + Q}{R_2}$$

Y despejando Q, obtenemos finalmente: $\boxed{Q = \dfrac{Q_1 R_2 - Q_2 R_1}{R_1 + R_2}}$

Podemos ahora sustituir numéricamente para obtener el valor pedido de acuerdo con los datos concretos que se nos dan en el enunciado:

Para conocer Q, necesitamos conocer Q_1, ya que $Q_2 = 0$.

De $V_1 = K \cdot \dfrac{Q_1}{R_1}$ se obtiene el valor inicial de la carga neta de la esfera (1):

$$Q_1 = \frac{V_1 \cdot R_1}{K} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-1}}{9 \cdot 10^9} = 5'56 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

Sustituyendo valores en el resultado literal:

$$Q = \frac{Q_1 R_2 - Q_2 R_1}{R_1 + R_2} = \frac{5'56 \cdot 10^{-8} \cdot 8 \cdot 10^{-2}}{18 \cdot 10^{-2}} = 2'47 \cdot 10^{-8}\ C$$

Análisis de resultados y perspectivas

Como es lógico, el resultado obtenido es válido mientras se cumplan las condiciones impuestas, es decir, que la influencia mutua entre las esferas separadas sea despreciable y que V_1 sea mayor que V_2.

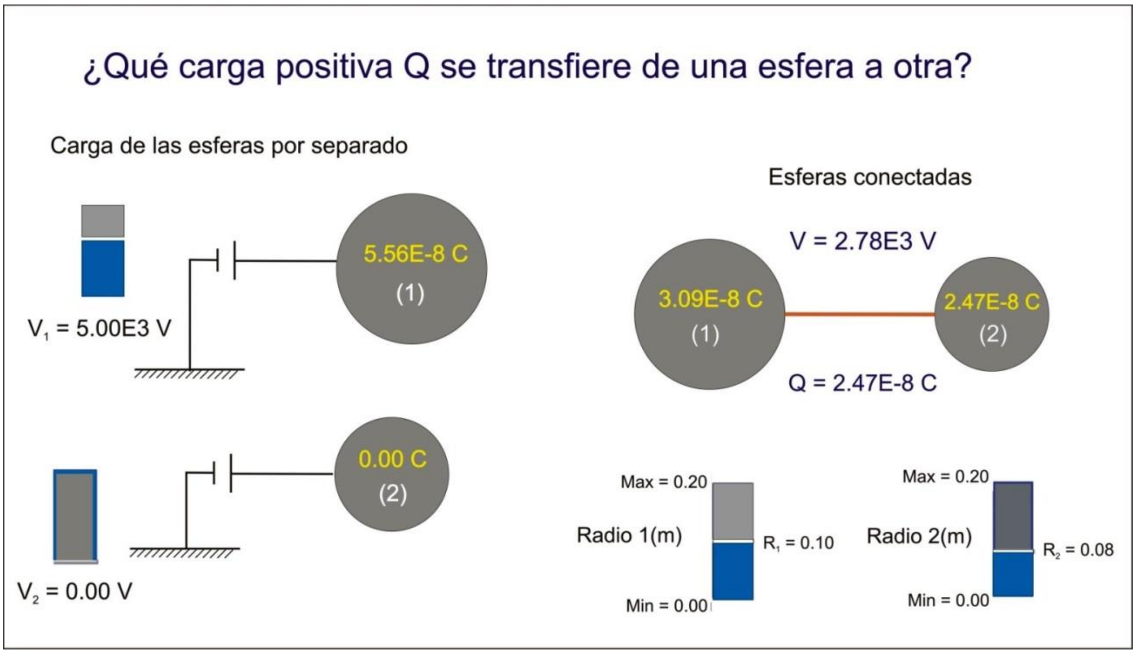
Si nos fijamos en el resultado literal obtenido, podemos ver en primer lugar que es dimensionalmente homogéneo (Q en ambos lados de la igualdad) y que, además, contempla todas las hipótesis y casos particulares considerados al comienzo. Así, por ejemplo, vemos que, efectivamente, si $R_1 = R_2$ y $Q_2 = 0$, ocurre que $Q = Q_1/2$. Este resultado concreto, permite ir más allá y plantearse que este procedimiento se podría utilizar para obtener, a partir de una carga dada otras que valiesen la mitad, la cuarta parte, etc.

Finalmente, también podríamos plantearnos por lo que ocurriría en caso de no despreciar la influencia mutua entre dos esferas cargadas separadas una cierta distancia entre ellas. Concretamente: ¿Cómo calcular en ese caso el potencial de cada una, conocidas las cargas y los radios? ¿Es posible que un objeto esté cargado eléctricamente y el potencial a que se encuentre sea 0?

Refuerzo:

Para reforzar los conceptos involucrados en este problema hemos creado una animación *Modellus*, en la que se representa a las esferas durante su carga previa y la situación que resulta después de que se pongan en contacto. En la pantalla se dispone de cuatro controladores manuales con los que los alumnos pueden modificar los potenciales que se aplican a cada una de las esferas para cargarlas inicialmente, así como los radios de cada una de ellas. Modificando estos parámetros pueden poner a prueba las hipótesis y probar concretamente cualquiera de los casos particulares que hemos comentado aquí (cargas iguales con el mismo o diferente tamaño, potenciales iguales, potencial mayor de una o de otra esfera, etc.) La animación resuelve el problema mostrando la carga final de las dos esferas, la carga que se transfiere entre ellas y el potencial común después de la conexión.

La imagen siguiente corresponde al caso en el que los valores de todas las magnitudes coinciden con los que hemos adoptado en esta resolución literal.



La animación y el programa para hacerla correr están disponibles en la página “Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física”, de la Sección Local de Alicante de la RSEF. http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm