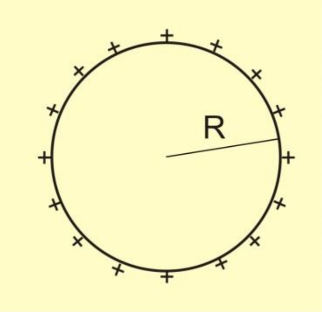
9. Supongamos una esfera metálica de radio R y cargada positivamente con una carga neta Q.



Aplicad el Teorema de Gauss para obtener el módulo de la intensidad del campo eléctrico en un punto A cualquiera situado a una distancia r ≥ R del centro de la esfera.

Por tratarse de una esfera conductora, la carga Q se distribuirá uniformemente por toda su superficie (tanto si se trata de una esfera maciza como si se trata de una esfera hueca), con lo que la densidad superficial de carga será constante y en cualquier punto de dicha superficie valdrá:

$$\sigma = Q/4\pi R^2$$

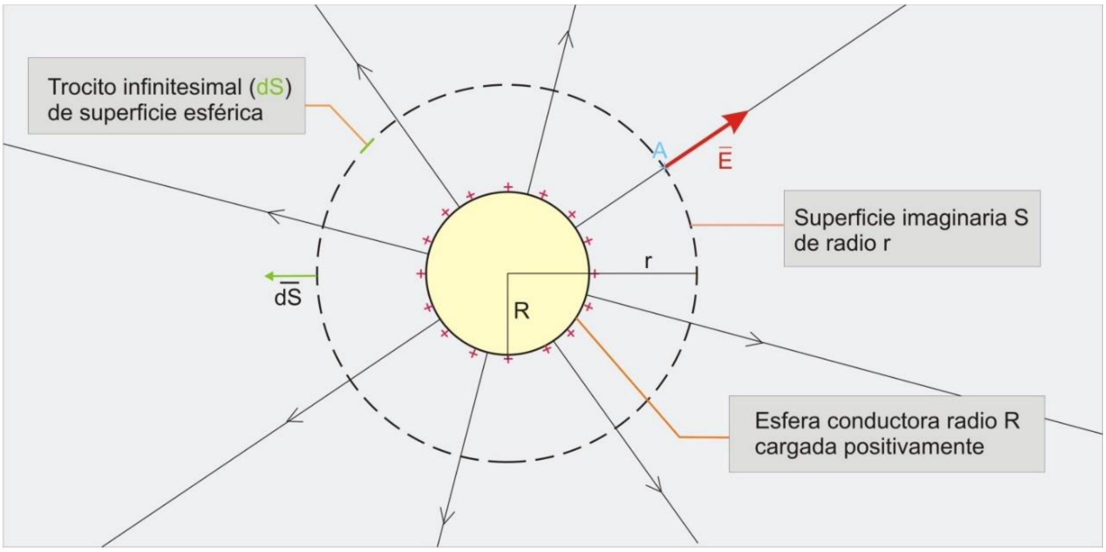
El Teorema de Gauss se puede expresar, en general, mediante la ecuación:

$$\phi = \int d\phi = \int \vec{E} \bullet d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon}$$

En la expresión anterior, ϕ representa el flujo o número (neto) de líneas de fuerza que entran o salen a través de una superficie cerrada que engloba a Q. Dichas líneas corresponden al campo eléctrico creado por la carga Q.

En nuestro caso si el punto A está situado a una distancia r > R del centro de la esfera, para aplicar Gauss, bastará dibujar una superficie esférica imaginaria de radio r concéntrica con la esfera y representar las líneas de fuerza del campo generado por la carga Q uniformemente distribuida en la superficie de la esfera conductora. El vector intensidad del campo eléctrico en A, será entonces un vector tangente a la línea de fuerza que pasa por A y dirigido hacia afuera, tal y como se representa en la figura 1 siguiente.

En la figura 1, la superficie esférica imaginaria (superficie de Gauss) se ha dibujado con línea discontinua. Su superficie total es S y cada uno de los pequeños segmentos que la forman, podría representar una superficie infinitesimal dS. Como sabemos, cada uno de esos elementos dS se puede representar por un vector perpendicular a ella y dirigido de la parte cóncava hacia la convexa. Para mayor claridad en el dibujo, solo hemos dibujado uno de tales vectores (de color verde).



Aplicaremos ahora el teorema de Gauss a la superficie esférica que contiene al punto A, teniendo en cuenta que, debido a la simetría existente, el valor (módulo) de la intensidad del campo en cualquier otro punto de la superficie considerada es el mismo, que su dirección es radial, que su sentido coincide con el de la línea de fuerza, y que el vector campo eléctrico y el vector superficie forman un ángulo de 0º, con lo que:

$$\phi = \int E \cdot dS \cdot \cos 0 = E \cdot \int dS = E \cdot S = E \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{Q}{\varepsilon}$$

Y despejando: $\boxed{E = \dfrac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon}}$

O, lo que es equivalente: $\boxed{E = K \cdot \dfrac{Q}{r^2}}$

¿Cuánto valdrá E en la superficie de la esfera?

Para contestar esta pregunta, podemos imaginar una superficie esférica concéntrica con la esfera metálica, por fuera de ella pero infinitamente próxima, de forma que su radio r sea prácticamente igual a R, con lo que siguiendo los mismos pasos, se llega a que, en ese caso:

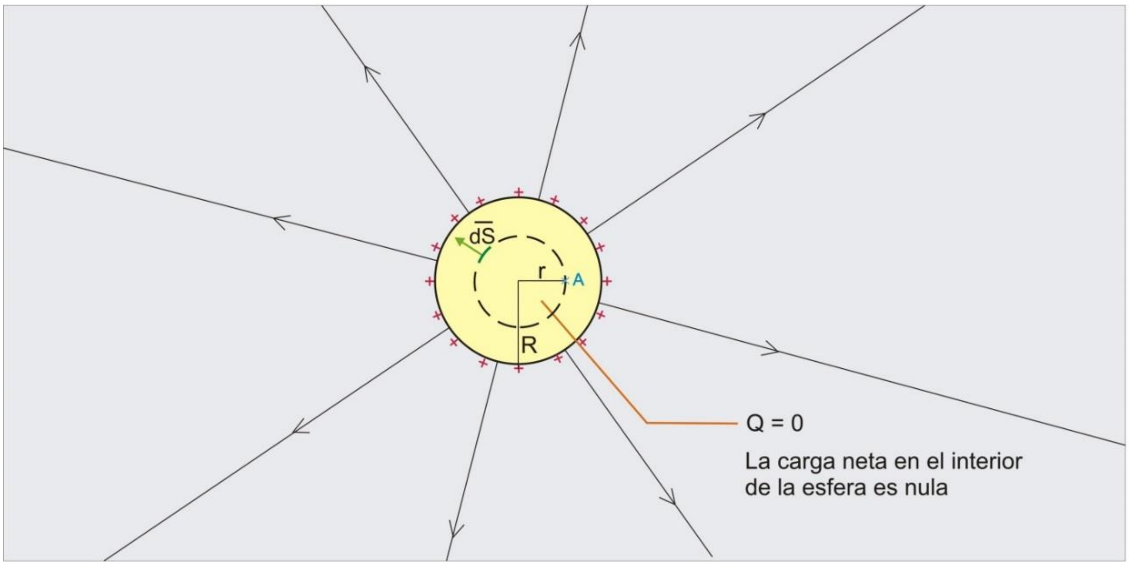
$\boxed{E = \dfrac{Q}{4\pi R^2 \varepsilon}}$ O bien: $\boxed{E = K \cdot \dfrac{Q}{R^2}}$

Como puede verse, los resultados obtenidos son los mismos que los que se obtuvieron en el problema 7, por un procedimiento más largo y complejo e, igual que allí, permiten concluir que:

Una esfera homogéneamente cargada con una carga neta Q, a efectos de campo eléctrico, para distancias iguales o mayores que su radio R, equivale a una carga puntual del mismo valor Q, situada en su centro.

Utilizad también el teorema de Gauss para obtener E en cualquier punto del interior de la esfera

Podemos pensar en una superficie esférica imaginaria concéntrica con la esfera metálica, por dentro de ella, que contenga al punto en el que queremos hallar el campo eléctrico y hemos de tener en cuenta que no existe carga neta alguna en el interior de la esfera, puesto que las cargas eléctricas que conforman la carga extra comunicada, debido a la repulsión eléctrica y al medio (conductor) se distribuyen homogéneamente separándose entre sí lo más posible hasta que se alcanza una situación de equilibrio electrostático.



El flujo neto que atravesará la superficie esférica punteada será 0, puesto que la carga neta que encierra, también lo es. Por tanto, si aplicamos Gauss, tendremos que:

$$\phi = \int E \cdot dS \cdot \cos 0 = E \cdot \int dS = E \cdot S = E \cdot 4\pi \cdot r^2 = 0 \rightarrow E = 0$$

Es decir, como ya sabíamos (problema 7):

El campo eléctrico en el interior de una esfera conductora homogéneamente cargada es nulo