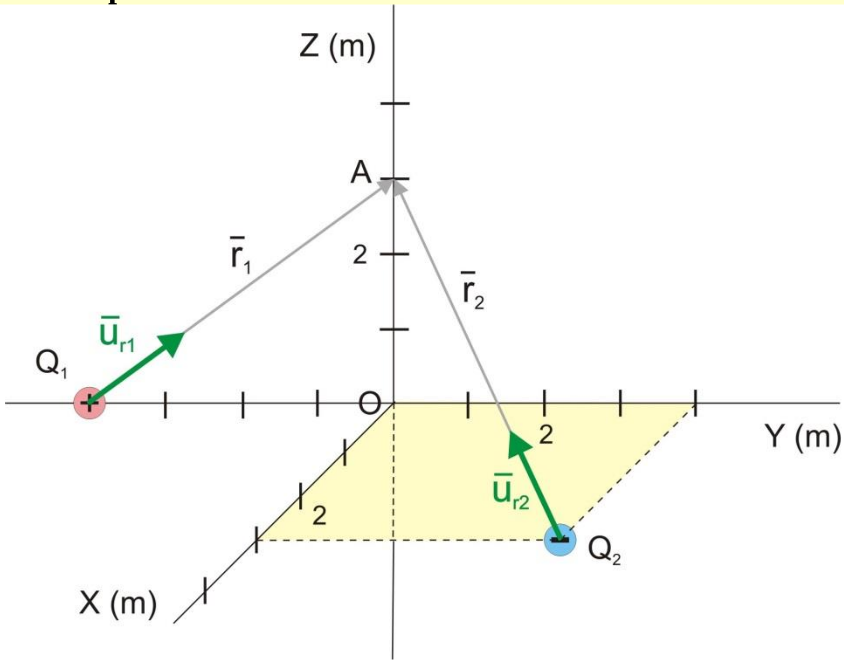
4. En el sistema de dos cargas puntuales representado en la figura, $Q_1 = 3 \cdot 10^{-5}$ C y $Q_2 = -2 \cdot 10^{-5}$ C. Se pide:



a) Intensidad del campo eléctrico resultante en el punto A (0, 0, 3) m.
b) Fuerza que sufriría una carga $q = -10^{-8}$ C si se colocase en A.
d) Trabajo realizado por el campo cuando q se desplace desde A hasta el origen O de coordenadas.

a) Hasta ahora hemos trabajado con cargas distribuidas en un plano. En este tipo de problemas podríamos haber calculado la intensidad $\vec{E}$ del campo eléctrico resultante sin apoyarnos en el vector unitario $\bar{u}_r$, obteniendo las componentes escalares de $\vec{E}$ por consideraciones trigonométricas. Sin embargo, no lo hemos hecho porque este procedimiento no es útil en problemas como el que aquí se plantea, donde se tiene una distribución espacial y hay que trabajar en tres dimensiones.

Calculad $\vec{E}$ como la suma de los vectores $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ que crean en dicho punto las cargas Q_1 y Q_2 respectivamente, aplicando el procedimiento general que venimos utilizando.

Teniendo en cuenta el signo de las cargas, antes de realizar ningún cálculo sabemos que $\vec{E}_1$ tendrá el mismo sentido que $\vec{r}_1$ y que $\vec{E}_2$ tendrá sentido contrario a $\vec{r}_2$. Procederemos primero a calcular dichos vectores y, luego a realizar su suma analítica y gráficamente, para obtener el vector $\vec{E}$ resultante.

Para poder calcular los vectores $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ necesitamos conocer antes los módulos de los vectores $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$.

El módulo de $\vec{r}_1$ es inmediato puesto que corresponde a la hipotenusa del triángulo con vértices en Q_1, O y A, con lo que si aplicamos el teorema de Pitágoras se obtiene fácilmente: $r_1 = 5$ m.

Para el módulo del vector $\vec{r}_2$ podemos obtener primero el vector restando a las coordenadas de su extremo las coordenadas de su origen con lo que:

$\vec{r}_2$ = (0 , 0 , 3) – (3 , 4 , 0) = (-3 , - 4 , 3) m

Y luego aplicar: $r_2 = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} = \sqrt{9+16+9} = \sqrt{34}$ = 5’83 m

Por tanto, las intensidades de campo eléctrico resultan:

$$\vec{E}_1 = \frac{K \cdot Q_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r1} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (3 \cdot 10^{-5})}{25} \cdot \vec{u}_{r1} = 10'08 \cdot 10^3 \cdot \vec{u}_{r1}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{K \cdot Q_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-2 \cdot 10^{-5})}{34} \cdot \vec{u}_{r2} = -5'29 \cdot 10^3 \cdot \vec{u}_{r2}$$

Podemos ahora calcular los vectores unitarios:

$$\vec{u}_{r1} = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{(0\ ,\ 4\ ,\ 3)}{5} = (0\ ,\ 0'8\ ,\ 0'6)$$

$$\vec{u}_{r2} = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{(-3\ ,\ -4\ ,\ 3)}{5'83} = (-0'51\ ,\ -0'69\ ,\ 0'51)$$

Y, sustituyendo, el campo resultante es:

$$\vec{\mathrm{E}} = \vec{\mathrm{E}}_1 + \vec{\mathrm{E}}_2 = 10'08 \cdot 10^3 \cdot \vec{u}_{r1} + (-5'29 \cdot 10^3) \cdot \vec{u}_{r2} \rightarrow$$

$$\vec{E} = 10'08 \cdot 10^3 \cdot (0\ ,\ 0'8\ ,\ 0'6) + (-5'29 \cdot 10^3) \cdot (-0'51\ ,\ -0'69\ ,\ 0'51) \rightarrow$$

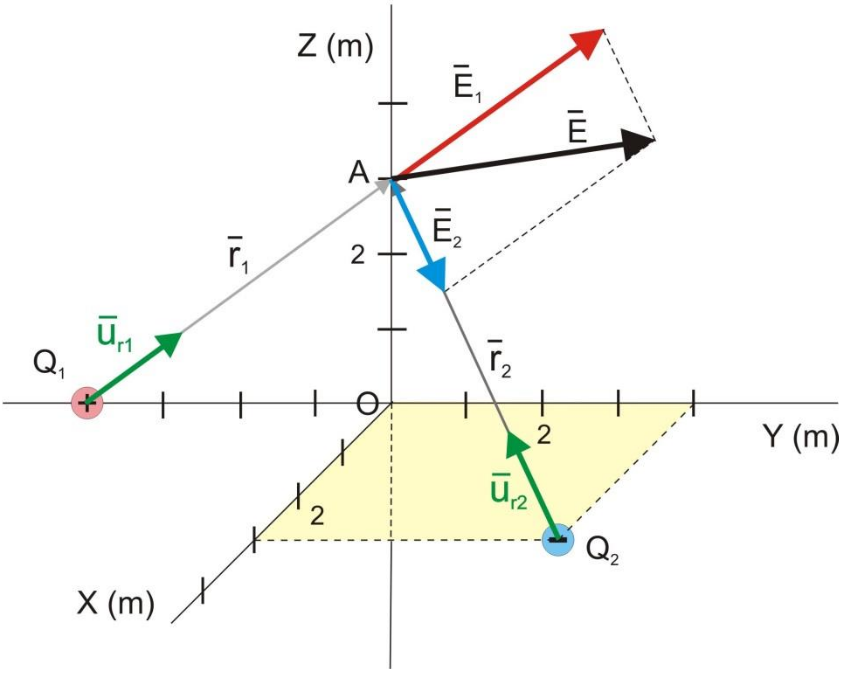
$$\vec{E} = (0\ ,\ 8'06 \cdot 10^3\ ,\ 6'05 \cdot 10^3) + (2'70 \cdot 10^3\ ,\ 3'65 \cdot 10^3\ ,\ -2'70 \cdot 10^3) \rightarrow$$

$$\vec{E} = (2'70 \cdot 10^3\ ,\ 11'71 \cdot 10^3\ ,\ 3'35 \cdot 10^3) \ \text{N/C}$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \sqrt{(2'70 \cdot 10^3)^2 + (11'71 \cdot 10^3)^2 + (3'35 \cdot 10^3)^2} \rightarrow E = \sqrt{155'64 \cdot 10^6}$$

E = 12’48· 10^3 N/C

Podemos completar, ahora, la figura del enunciado, dibujando (con un tamaño relativo aproximado) los vectores $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ *y* $\vec{E}$ *.*



b) Para obtener la fuerza que actuaría sobre una carga q = -10^{-8} C colocada en A, aplicaremos la expresión: $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$. Dado que q es negativa, el vector fuerza que se obtenga tendrá sentido contrario al vector $\vec{E}$.

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} = -10^{-8} \cdot (2'70 \cdot 10^3 \ , 11'71 \cdot 10^3 \ , 3'35 \cdot 10^3) \rightarrow$$

$$\vec{F} = (-2'70 \cdot 10^{-5} \ , \ -11'71 \cdot 10^{-5} \ , \ -3'35 \cdot 10^{-5}) \text{ N}$$

¿Cómo podríamos calcular el módulo de esta fuerza?

Podría ser directamente, como la raíz cuadrado de la suma de sus componentes al cuadrado:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{(-2'70 \cdot 10^{-5})^2 + (-11'71 \cdot 10^{-5})^2 + (-3'35 \cdot 10^{-5})^2} \rightarrow F = \sqrt{155'64 \cdot 10^{-10}}$$
F = $12'48 \cdot 10^{-5}$ N

O bien aplicando la expresión: F = q·E (colocando q en valor absoluto, para evitar que el módulo salga negativo):

F = q·E = $10^{-8} \cdot 12'48 \cdot 10^{3} \cdot 10^{-8} \rightarrow$ F = $12'48 \cdot 10^{-5}$ N

c) *¿Cómo podríamos obtener ahora el trabajo realizado por el campo cuando q se desplace desde A hasta el origen O de coordenadas?*

Dado que el campo eléctrico, al igual que el gravitatorio, es un campo conservativo, el trabajo realizado por la fuerza eléctrica del campo, se podrá determinar mediante la expresión:

$$W_{Fe\,A}^{\ O} = -\Delta Ep_A^O = -q \cdot (V_O - V_A)$$

Así pues, para calcular el trabajo tendremos que *calcular previamente el potencial del campo creado por las cargas* Q_1 *y* Q_2 *en los puntos A y O.*

$V_A = V_{A1} + V_{A2}$

$$V_A = \frac{K\,Q_1}{r_{A1}} + \frac{K\,Q_2}{r_{A2}} = 9\cdot 10^9 \cdot \frac{3\cdot 10^{-5}}{5} + 9\cdot 19^9 \cdot \left(\frac{-2\cdot 10^{-5}}{5'83}\right) = 9\cdot 10^4 \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{5'83}\right) = 23125'2\ V$$

$V_O = V_{O1} + V_{O2}$

$$V_O = \frac{K\,Q_1}{r_{O1}} + \frac{K\,Q_2}{r_{O2}} = 9\cdot 10^9 \cdot \frac{3\cdot 10^{-5}}{4} + 9\cdot 19^9 \cdot \left(\frac{-2\cdot 10^{-5}}{5}\right) = 9\cdot 10^4 \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5}\right) = 31500\ V$$

Sustituyendo:

$$W_{Fe}{}_A^O = -\Delta Ep_A^O = -q\cdot(V_O - V_A) = -10^{-8}\cdot(31500 - 23125'2) \rightarrow \quad W_{Fe}{}_A^O \approx -8'37\cdot 10^{-5}\ \text{J}$$

¿Cómo interpretar que el trabajo realizado por el campo haya salido negativo?

El signo negativo del trabajo indica que la transformación considerada (desplazamiento de q desde su posición inicial A hasta el origen de coordenadas O), no es espontánea, lo que significa que la fuerza electrostática que actúa sobre q se opone al desplazamiento. Por tanto, para que esta transformación se produzca será necesario que disminuya la energía cinética de q en $8'37\cdot 10^{-5}$ J, o bien que actúe una fuerza exterior sobre ella que realice un trabajo (suministre una energía) de, al menos, $8'37\cdot 10^{-5}$ J.