3. Supongamos un sistema formado por dos objetos cargados eléctricamente con cargas Q_1 y Q_2 y separados una cierta distancia entre sí. Se pide:

a) ¿En qué punto la intensidad del campo eléctrico resultante será nula?

b) Concretad para el caso de que Q_1 = - 36 μC se halle en el punto (0, 0) de un sistema de coordenadas cartesianas y Q_2 = 9 μC en el (4, 0) cm del mismo sistema.

a) Nos vamos a centrar en el caso de dos objetos cargados y separados por una gran distancia "d" (comparada con su tamaño). Supondremos que ambos se pueden considerar como cargas puntuales[1]. Este puede ser el caso, por ejemplo, de dos pequeñas esferas metálicas cargadas.

En principio, como en el enunciado no se dice sobre el signo de las cargas, se pueden plantear dos situaciones:

-Que ambas sean mismo signo:

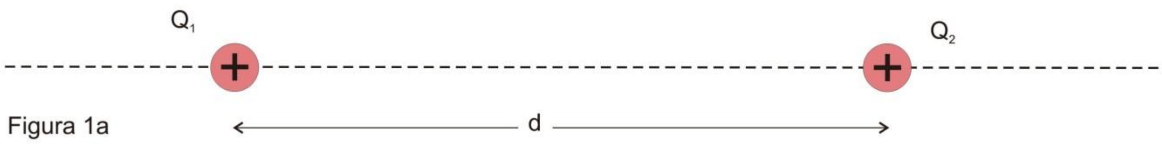


Figura 1a

-Que sean de distinto signo:

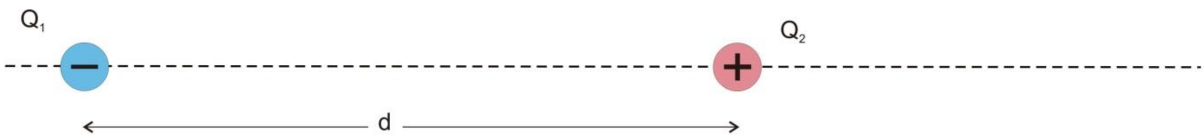


Figura 2a

Para dibujar en cualquier punto el vector intensidad del campo eléctrico debido a una carga puntual, conviene preguntarse por la fuerza que dicha carga, ejercería sobre una hipotética unidad de carga positiva colocada en ese punto. Coherentemente con la definición de intensidad de campo eléctrico, el vector $\vec{E}$ en el punto considerado, tendrá la misma dirección, sentido y módulo que dicha fuerza.

*En la situación planteada en la **figura 1a** razonad en qué zona (a la izquierda de Q_1, entre Q_1 y Q_2, a la derecha de Q_2) podría estar el punto P en el que la intensidad del campo eléctrico resultante fuese nula.*

En este caso, el punto que buscamos ha de estar situado en la recta que pasa por ambas cargas y necesariamente en algún punto del segmento de recta (de longitud d) que las

[1] Veremos en un problema posterior que, si pretendemos calcular magnitudes, tales como fuerza, campo, etc., en el exterior de esos objetos, esta suposición será exacta cuando ambos objetos sean perfectamente esféricos y su carga se distribuya homogéneamente en la superficie de cada uno

separa, puesto que es la única zona en la que los vectores $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ tienen la misma dirección y sentidos contrarios. Además, para que tengan el mismo módulo y su suma pueda dar 0, dicho punto deberá estar más cerca de la carga menor, para que pueda compensarse ese menor valor de la carga con una mayor proximidad a la misma. Naturalmente, en el caso de que ambas cargas tengan el mismo valor, ese punto coincidirá con d/2.

Si situamos la carga Q_1 en el origen de coordenadas y suponemos que $Q_1 > Q_2$, podemos completar la figura 1a anterior dibujando los vectores $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ en P, situado a una distancia r_1 de Q_1 y a distancia r_2 de Q_2, de tal forma que $r_1 + r_2 = d$ (ved figura 1b siguiente).

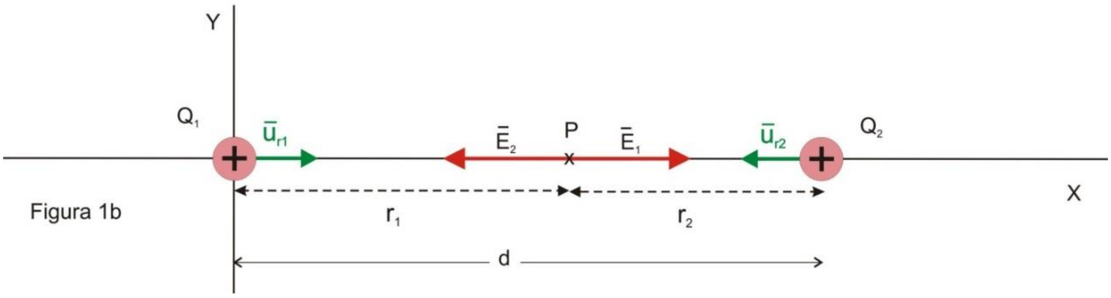


Figura 1b

Se trata, por tanto, de hallar la distancia r_1 a que se encuentra P del origen de coordenadas.

Reflexionad acerca de los factores de los cuales puede depender r_1 y cómo influirá cada uno de ellos en su valor.

En principio, cabe pensar que r_1 dependa de la distancia d, así como de los valores de Q_1 y de Q_2:

$$r_1 = f(Q_1, Q_2, d)$$

Y más concretamente que (a igualdad de los restantes factores): cuanto mayor sea Q_1 y/o menor sea Q_2 (valores absolutos) tanto mayor será r_1; cuanto mayor sea d, mayor será también r_1. También podemos pensar en algunos casos límite evidentes, como, por ejemplo: Si Q_2 tiende a 0, r_1 tenderá a d. Si las dos cargas fuesen iguales (en valor absoluto), entonces será $r_1 = d/2$.

Elaborad posibles estrategias para resolver el problema en la situación planteada

Sabemos que en el caso del campo eléctrico creado por una carga Q puntual (o que pueda considerarse como tal), la intensidad del campo en un punto dado del mismo es una magnitud vectorial dada por:

$$\vec{E} = K \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

En nuestro caso, la intensidad del campo eléctrico resultante será $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

-Obviamente, para que la suma de estos dos vectores, que tienen la misma dirección y sentidos contrarios, valga 0, es necesario que sus módulos (E_1 y E_2) sean iguales. Por tanto, una primera forma de resolver el problema podría ser igualar E_1 con E_2 y, a partir de la ecuación obtenida, hallar r_1.

-También podríamos realizar un tratamiento vectorial. En ese caso, bastaría con obtener los vectores $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ e igualar a 0 la suma de ambos, despejando finalmente r_1 de la ecuación obtenida.

Resolved utilizando la segunda de las estrategias que acabamos de exponer

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = K \cdot \frac{Q_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r1} + K \cdot \frac{Q_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r2}$$

$$\vec{E} = K \cdot \frac{Q_1}{r_1^2} \cdot (1\,,\,0) + K \cdot \frac{Q_2}{r_2^2} \cdot (-1\,,\,0) = 0 \;\rightarrow\; \frac{Q_1}{r_1^2} - \frac{Q_2}{r_2^2} = 0$$

Sustituyendo $r_2 = d - r_1$ y despejando r_1, obtenemos:

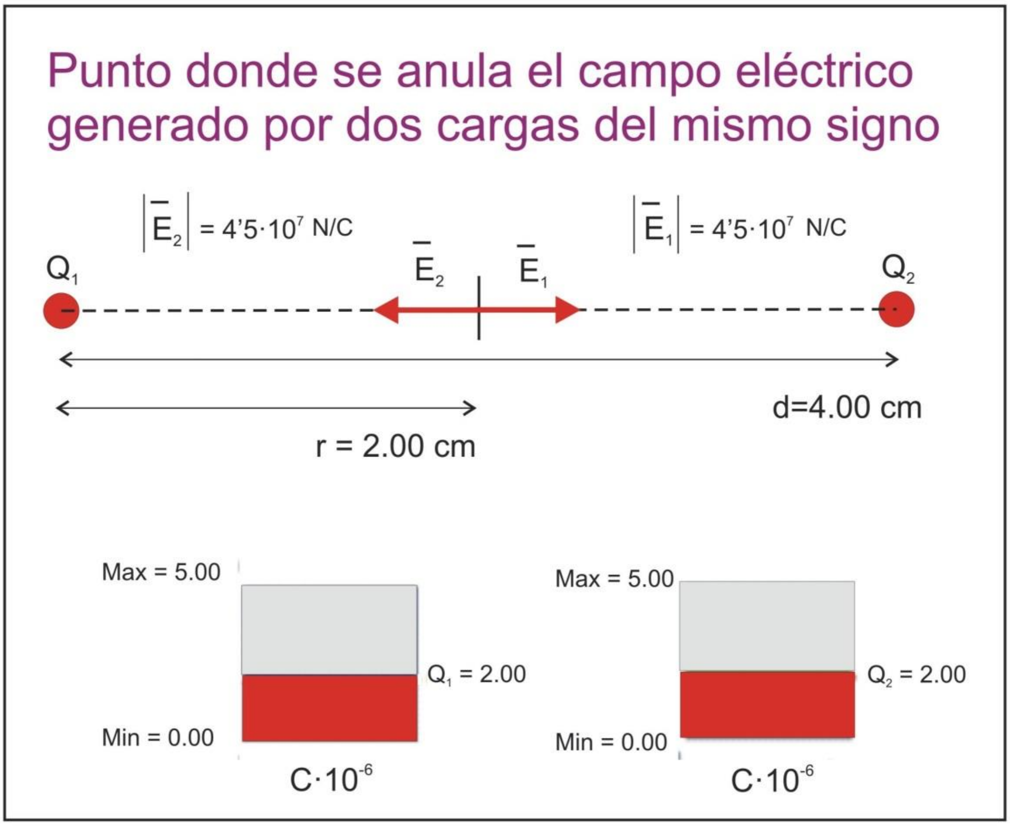
$$r_1 = \frac{\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2}} \cdot d$$

Y simplificando, obtenemos finalmente que: $\boxed{r_1 = \dfrac{1}{1 + \sqrt{\dfrac{Q_2}{Q_1}}} \cdot d}$

Analizad el resultado obtenido

Podemos ver, en primer lugar, que el resultado anterior es dimensionalmente homogéneo (L en ambos miembros). En segundo, lugar vemos también que se cumplen nuestras hipótesis de partida ya que, por ejemplo: si Q_1 aumenta (en valor absoluto), r_1 también aumenta; si Q_2 tiende a 0, r_1 tiende a d; si $Q_1 = Q_2$ (valores absolutos), $r_1 = d/2$, etc.

Como complemento a este desarrollo se puede usar una animación *Modellus* que ilustra este caso particular en el que ambas cargas tienen el mismo signo. En la pantalla se representan las dos cargas y los vectores que indican los campos eléctricos que generan en el punto en el que se contrarrestan. El usuario puede desplazar horizontalmente la carga Q_2 (colocando el ratón encima de ella) y, así, modificar la distancia, d. También puede usar los dos controladores manuales que vemos en la figura adjunta para modificar el valor de cada una de las dos cargas. En la animación, las distancias se han expresado en cm y las cargas en µC, obteniéndose el campo eléctrico en N/C. La animación y el programa para usarla en cualquier ordenador están disponibles en la página web de la Sección Local de Alicante de la RSEF.
(http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm)



Veremos ahora cómo tratar el problema en la situación representada en la **figura 2a**. En este caso el punto que buscamos también ha de estar situado en la recta que pasa por ambas cargas (para que los vectores $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ tengan la misma dirección), pero, a diferencia de antes, P no puede estar entre las dos cargas, puesto que en cualquier punto de esa zona (*comprobadlo*), ambos vectores $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ tienen el mismo sentido (hacia la carga negativa Q_1). Sin embargo, tanto a la derecha de Q_2 como a la izquierda de Q_1, esos vectores tienen sentidos contrarios (*comprobadlo*), aunque solo en una de esas dos zonas podrían anularse.

Teniendo en cuenta que Q_1 (en valor absoluto) es mayor que Q_2, determinad razonadamente en cuál de esas dos posibles zonas estará situado el punto P que buscamos.

P deberá estar situado a la derecha de Q_2, puesto que es la única zona en la que teniendo los vectores $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ la misma dirección y sentidos contrarios, sus módulos pueden ser iguales, ya que el menor valor de Q_2 se puede compensar con la mayor cercanía de P a esa carga. Esto no puede ocurrir a la izquierda de Q_1 (*comprobadlo*), ya que en esa zona P siempre estaría más cercano de la carga mayor (en valor absoluto) y, por tanto siempre sería $E_1 > E_2$.

Si situamos la carga Q_1 en el origen de coordenadas y suponemos que $Q_1 > Q_2$, podemos completar la figura 2a anterior dibujando los vectores $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ en P, situado a una distancia r_1 de Q_1 y a distancia r_2 de Q_2, de tal forma que $r_1 = r_2 + d$ (ved figura 2b siguiente).

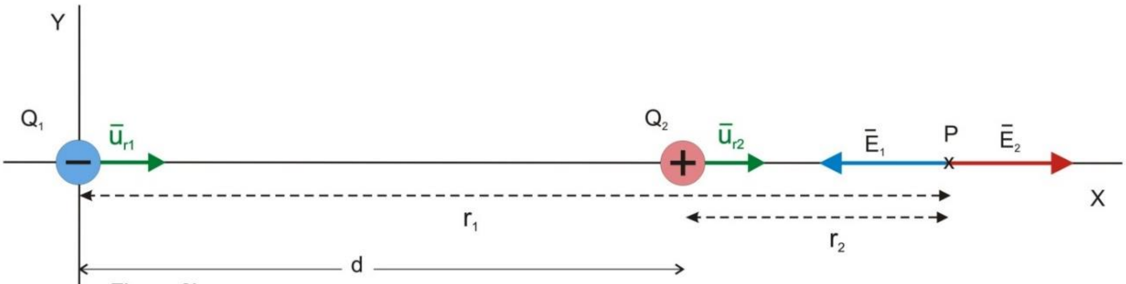


Figura 2b

Al igual que en la primera situación planteada (cargas del mismo signo), aquí también cabe pensar que r_1 dependa de la distancia d, así como de los valores de Q_1 y de Q_2:

$$r_1 = f\,(Q_1, Q_2, d)$$

Y más concretamente (siempre a igualdad de los restantes factores) que: si Q_1 aumenta, r_1 aumentará; si Q_2 aumenta, r_1 disminuirá; si d aumenta, r_1 aumentará; Si Q_2 tiende a 0, r_1 tenderá a "d".

¿Dónde estaría el punto P, en el caso de que las dos cargas fuesen iguales en valor absoluto?

Si las dos cargas tuviesen el mismo valor absoluto y nos movemos hacia la derecha de Q_2, E_1 siempre será menor que E_2 puesto que P siempre estara más cerca de Q_2 que de Q_1. Por tanto, en este caso, solo en el infinito ambos vectores $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ serían nulos y el campo resultante también.

Siguiendo las mismas pautas que anteriormente para la situación planteada en la figura 1b, proceded ahora a determinar la posición de P en la situación planteada en la figura 2b

En este caso, también deberá cumplirse que:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = K \cdot \frac{Q_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r1} + K \cdot \frac{Q_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r2}$$

$$\vec{E} = K \cdot \frac{Q_1}{r_1^2} \cdot (1\,,0) + K \cdot \frac{Q_2}{r_2^2} \cdot (1\,,0) = 0 \;\rightarrow\; \frac{Q_1}{r_1^2} + \frac{Q_2}{r_2^2} = 0$$

Sustituyendo $r_2 = r_1 - d$ y despejando r_1, obtenemos:

$$\frac{Q_1}{r_1^2} + \frac{Q_2}{(r_1 - d)^2} = 0 \;\rightarrow\; \frac{Q_2}{(r_1 - d)^2} = -\frac{Q_1}{r_1^2} \;\rightarrow\; \sqrt{\frac{Q_2}{(r_1 - d)^2}} = \sqrt{-\frac{Q_1}{r_1^2}} \;\rightarrow\; \frac{\sqrt{Q_2}}{r_1 - d} = \frac{\sqrt{-Q_1}}{r_1}$$

Y simplificando, obtenemos finalmente que: $\boxed{r_1 = \dfrac{d}{1 - \sqrt{\dfrac{Q_2}{-Q_1}}}}$

Al igual que ocurría en el caso anterior, este resultado también es dimensionalmente homogéneo (L en ambos miembros). Y también se cumplen las hipótesis de partida ya que, por ejemplo: si Q_1 aumenta (en valor absoluto), r_1 también aumenta; si Q_2 tiende a 0, r_1 tiende a d; si $Q_1 = Q_2$ (valores absolutos), $r_1 = \infty$.

Es importante dejar claro también que en este resultado literal la raíz cuadrada no es la de un número negativo, puesto que al ser la carga Q_1 negativa, cuando se sutituye su valor numérico con el signo correspondiente, el signo “menos” desaparece.

b) Para contestar la pregunta planteada en este apartado, basta darse cuenta de que la situacion que se plantea es la misma que acabamos de tratar, de modo que lo único que nos queda por hacer es sustituir los valores numéricos correspondientes en el resultado literal anterior:

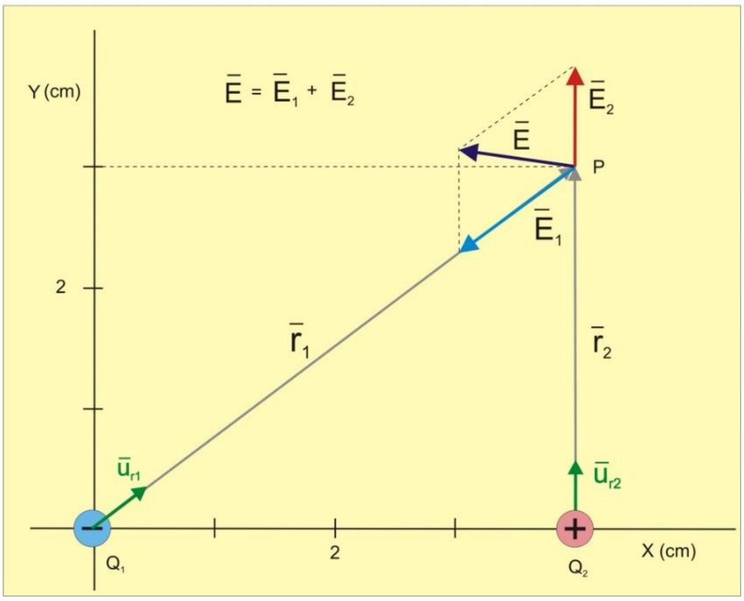
$$r_1 = \frac{d}{1-\sqrt{\dfrac{Q_2}{-Q_1}}} = \frac{4\cdot 10^{-2}}{1-\sqrt{\dfrac{9\cdot 10^{-6}}{-(-36\cdot 10^{-6})}}} = \frac{4\cdot 10^{-2}}{1-\sqrt{0{,}25}} = 8\cdot 10^{-2}\ m$$

También es necesario analizar los valores numéricos obtenidos en los problemas. En este caso, por ejemplo, esos 8 cm es un valor posible, puesto que es mayor que d y no resulta disparatado. Sin embargo un valor inferior a 4 cm, indicaría claramente que nos hemos equivocado en algo, puesto que, como hemos razonado anteriormente, el punto que se busca no puede estar entre las cargas, puesto que en ese caso los vectores $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ irían en el mismo sentido y no podrían anularse.

En este ejercicio nos hemos limitado a considerar casos en los que los puntos manejados se encontraban en la misma recta que pasa por ambas cargas. Podemos ir, ahora, un poco más allá y plantearnos cómo hallar los vectores intensidad de campo y el campo resultante, en un punto fuera de dicha recta.

Determinad el vector intensidad del campo eléctrico resultante en el punto (4, 3) cm. Del sistema de dos cargas considerado en el apartado b) de este ejercicio.

Si representamos el punto en cuestión en la figura 2a anterior, tendremos:



En la figura se han dibujado los vectores $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ (no a escala) y se ha determinado gráficamente el vector $\vec{E}$ como suma de los anteriores. Para obtener analíticamente el vector $\vec{E}$, debemos expresar primero $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ en función de sus componentes cartesianas y luego sumarlos.

Antes de comenzar, tenemos que conocer el valor de r_1. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo formado por las dos cargas y el punto P, obtenemos que r_1 = 5 cm.

Calculad la intensidad del campo eléctrico generada por cada una de las cargas en el punto P de la figura y, obtened $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

$$\vec{E}_1 = \frac{K \cdot Q_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r1} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-36 \cdot 10^{-6})}{25 \cdot 10^{-4}} \cdot \vec{u}_{r1} = -12'96 \cdot 10^7 \cdot \vec{u}_{r1}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{K \cdot Q_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 9 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 10^{-4}} \cdot \vec{u}_{r2} = 9 \cdot 10^7 \cdot \vec{u}_{r2}$$

La determinación del vector $\vec{u}_{r2}$ es inmediata ya que de la figura anterior se desprende que $\vec{u}_{r2}$ = (0, 1). Sin embargo, la determinación del vector $\vec{u}_{r1}$ es algo más laboriosa:

$$\vec{r}_1 = (4{\cdot}10^{-2}\ , 3{\cdot}10^{-2})\ m; \quad r_1 = \sqrt{(4{\cdot}10^{-2})^2 + (3{\cdot}10^{-2})^2} = 5{\cdot}10^{-2}\ m; \quad \vec{u}_{r1} = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{(4{\cdot}10^{-2}\ , 3{\cdot}10^{-2})}{5{\cdot}10^{-2}}$$

$$\vec{u}_{r1} = (0'8\ , 0'6)$$

Sustituyendo los vectores unitarios en las expresiones que nos dan las intensidades de campo y sumando:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 =$$
$$-12'96 \cdot 10^7 \cdot (0'8\ , 0'6) + 9{\cdot}10^7 \cdot (0\ , 1) = (-10'37 \cdot 10^7\ , -7'78 \cdot 10^7) + (0\ , 9 \cdot 10^7)$$

$$\vec{E} = (-10'37 \cdot 10^7\ ,\ 1'22 \cdot 10^7)\ \text{N/C}$$

El resultado coincide (mismo módulo, dirección y sentido) con la fuerza que actuaría sobre la unidad de carga positiva si se colocase en el punto P. Por otra parte, si nos fijamos en las componentes del vector $\vec{E}$, podemos ver que el resultado es coherente con el vector obtenido al realizar la suma gráficamente. En efecto, en la figura anterior, se puede constatar cómo la componente según el eje X del vector $\vec{E}$ es negativa y mayor (en valor absoluto) que su componente según el eje Y (que es positiva).

El módulo[2] del vector $\vec{E}$ será: $|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{(-10'37 \cdot 10^{-7})^2 + (1'22 \cdot 10^{-7})^2} \rightarrow$

$|\vec{E}|$ = 10’44·10^{-7} N/C

---

[2] En este documento, utilizaremos para designar el módulo de un vector, indistintamente las barras verticales como simplemente el símbolo (letra) de la magnitud sin la flechita arriba.