PROBLEMAS DE FÍSICA

CAMPO ELÉCTRICO

didacticafisicaquimica.es

JAIME CARRASCOSA ALÍS
SALVADOR MARTÍNEZ SALA
MANUEL ALONSO SÁNCHEZ
JUAN JOSÉ RUÍZ RUÍZ

01-enero-2024

INTRODUCCIÓN

En este documento se incluyen problemas y ejercicios de Campo Eléctrico resueltos por nosotros. El nivel es adecuado para alumnos de Educación Secundaria (entre 16 y 18 años) que estudien estos contenidos. También quizás, en un primer curso universitario. Hemos procurado realizar una resolución cuidadosa y detallada de cada uno de ellos, incluyendo también los esquemas gráficos pertinentes y, cuando ha sido posible, se han resuelto siguiendo estrategias metodológicas coherentes con el modelo de resolución de problemas como investigación, algo fundamental para poder contribuir eficazmente desde la resolución de problemas de lápiz y papel, al desarrollo de la Competencia Científica en el alumnado.

Este y otros materiales de Física y Química, Didáctica de las Ciencias Experimentales, y Formación del Profesorado, están en formato de libre acceso en:

didacticafisicaquimica.es

También pueden encontrarse en:

https://www.researchgate.net/profile/Jaime-Alis/publications

Los autores no tenemos inconveniente en que se utilicen todos ellos (citando la fuente) para la mejora de la enseñanza y aprendizaje de las ciencias. Ese es el objetivo fundamental con que los hemos elaborado y publicado.

Los contenidos aquí expuestos fueron hechos públicos el 1 de enero de 2024.

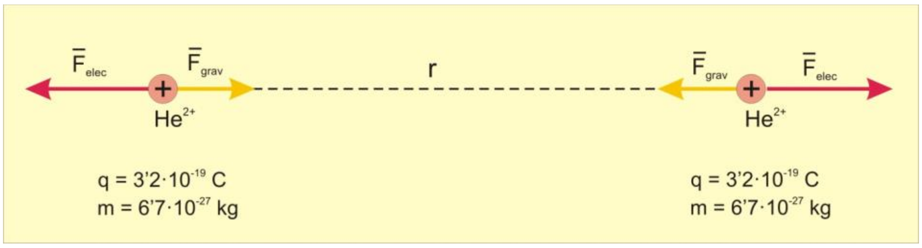
PROBLEMAS Y CUESTIONES SOBRE CAMPO ELÉCTRICO

Jaime Carrascosa Alís jaime.carrascosa@uv.es
Salvador Martínez Sala salvmart50@gmail.com
Manuel Alonso Sánchez manoloalonsosanchez@gmail.com
Juan José Ruíz Ruiz juanjoruiz124@gmail.com

1. Proponed un procedimiento para comparar el orden de magnitud de la fuerza electrostática con el de la fuerza gravitatoria.

Podemos pensar en dos partículas cargadas en reposo y separadas una cierta distancia, de las que conozcamos sus cargas y las masas correspondientes. Bastará entonces con aplicar la ley de Coulomb y la ley de Newton de la Gravitación Universal, para determinar la fuerza electrostática (F_{elec}) y la fuerza gravitatoria (F_{grav}) con las que interaccionan. Después, habrá que dividir entre sí los valores obtenidos para determinar cuántas veces es mayor una que otra.

Realizad el cálculo planteado, suponiendo que se trate de dos partículas α[1] *en el vacío (carga de la partícula α: $3'2\cdot10^{-19}$ C, masa de la partícula α: $6'7\cdot10^{-27}$ kg, $K = 9\cdot10^{9}$ S.I., $G = 6'67\cdot10^{-11}$ S.I.).*



En la figura anterior se visualiza globalmente la situación propuesta. Como ambos núcleos están cargados positivamente, en este caso la fuerza electrostática es de repulsión, mientras que la fuerza gravitatoria es (siempre lo es) de atracción. Los vectores fuerza se han dibujado con un tamaño arbitrario, dado que a priori no conocemos el módulo de cada una.

Módulo de la fuerza electrostática: $\left|\vec{F}_{elec}\right| = K \cdot \dfrac{q^2}{r^2}$ (1)

Módulo de la fuerza gravitatoria: $\left|\vec{F}_{grav}\right| = G \cdot \dfrac{m^2}{r^2}$ (2)

---

[1] Entre 1899 y 1900, Rutherford (trabajando en la Universidad McGill en Montreal, Canadá) y Villard (trabajando en París) separaron la radiación ionizante de origen nuclear en tres tipos, basándose en la penetración de objetos y en la deflexión que sufre dicha radiación por la acción de un campo magnético. Estos tres tipos fueron nombrados por Rutherford como radiación alfa, beta y gamma. La radiación alfa (α) está formada por núcleos de He completamente ionizados (He^{2+}) y, por tanto, las partículas alfa están constituidas por dos protones y dos neutrones.

Dividiendo (1) entre (2):

$$\frac{\left|\vec{F}_{elec}\right|}{\left|\vec{F}_{grav}\right|}=\frac{K}{G}\cdot\left(\frac{q}{m}\right)^2 \;\rightarrow\; \left|\vec{F}_{elec}\right|=\frac{K}{G}\cdot\left(\frac{q}{m}\right)^2\cdot\left|\vec{F}_{grav}\right|$$

Sustituyendo ahora los valores numéricos correspondientes:

$$\left|\vec{F}_{elec}\right|=\frac{9\cdot 10^{9}}{6'67\cdot 10^{-11}}\cdot\left(\frac{3'2\cdot 10^{-19}}{6'7\cdot 10^{-27}}\right)^2\left|\vec{F}_{grav}\right| \;\rightarrow\; \left|\vec{F}_{elec}\right|=3'1\cdot 10^{35}\left|\vec{F}_{grav}\right|$$

El resultado obtenido muestra que en este ejemplo (y en otras situaciones similares en las que intervengan partículas subatómicas cargadas como electrones o protones), la fuerza electrostática es muchos millones de millones… de veces superior a la gravitatoria. Por ello, todas estas situaciones se pueden tratar legítimamente como si no actuase la fuerza gravitatoria.

Esta enorme diferencia en cuanto a la intensidad entre la fuerza electrostática y la gravitatoria se debe a la diferencia existente entre los valores de las constantes K y G, que nos indican el valor de la fuerza entre dos objetos considerados como puntuales separados a 1 metro de distancia y cargados cada uno con 1 culombio (en el caso de la interacción electrostática), o teniendo cada uno una masa gravitatoria de 1 kilogramo (en el caso de la interacción gravitatoria).

Ahora bien, aunque 1 kg es una cantidad cotidiana de masa, 1 C es una cantidad enorme de carga (por ello habitualmente se utilizan submúltiplos para expresar la carga que pueden tener las partículas o cuerpos cargados). Por tanto, cabe preguntarse si en el caso de objetos de uso cotidiano cargados eléctricamente, en los que la masa es muchísimo mayor que la de cualquier partícula, se seguirá cumpliendo esta diferencia, a favor de la fuerza eléctrica.

Al frotar el extremo de una regla de plástico y acercarla (sujetándola por el otro extremo) a un trocito de papel situado sobre la superficie de una mesa, se observa una atracción eléctrica entre ambos, capaz de elevar el trocito de papel hasta el extremo frotado de la regla. Explicad este hecho y haced una estimación del valor de la carga mínima adquirida por la regla en el frotamiento.

La regla adquiere carga negativa al ser frotada y al acercar su borde al papelito (sin llegar a tocarlo), que es neutro, los electrones que hay en exceso en ese borde de la regla repelen a los más próximos del papelito, provocando que se polarice. Como consecuencia, en esa zona superior de la superficie del papelito queda un exceso de carga positiva (falta de electrones) y se produce un efecto neto de atracción entre el extremo de la regla y el papelito.

Para hacer la estimación solicitada, empezamos calculando la fuerza peso que se ejerce sobre el papelito. Para ello, vamos a imaginar una hoja de papel de un gramaje de 100 g/m^2 y a expresar la masa y el peso de un trocito de 1 cm^2 de dicha hoja, en unidades internacionales:

$m = 0'1\cdot 10^{-4}$ kg $= 10^{-5}$ kg

$P = m\cdot g \approx 10^{-5}\cdot 10 \rightarrow P \approx 10^{-4}$ N

Para que sea observable la atracción, la fuerza eléctrica entre la regla y el papelito ha de ser algo superior a la fuerza gravitatoria sobre dicho papelito. Podemos suponer que el extremo de la regla se acerca al papelito hasta una distancia aproximada de 1 cm y tratar la situación como si fueran dos cargas puntuales (esta simplificación dista mucho de la realidad, pero no altera significativamente el resultado de la estimación). Tenemos entonces:

$$Felec_{\min} = K \cdot \frac{q_{regla} \cdot q_{papelito}}{r^2} \approx 10^{-4}\ N$$

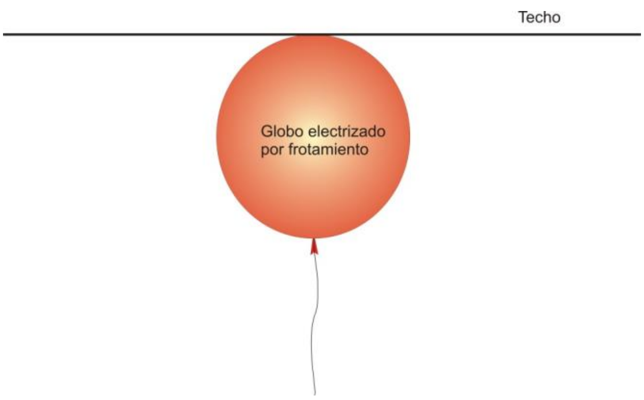
Para obtener ahora un valor mínimo de la carga acumulada por la regla, podemos imaginar que cada electrón en exceso situado en el borde de esta desplaza a un electrón superficial del papelito, de manera que podemos igualar (en valor absoluto) las cargas que se atraen entre la superficie del borde de la regla (exceso de electrones) y el borde del papelito (defecto de electrones). Obtenemos entonces el siguiente valor mínimo de q:

$K\ q^2/r^2 = 10^{-4} \rightarrow q^2 = 10^{-4} \cdot r^2 / K = (10^{-4} \cdot 10^{-4}) / 9 \cdot 10^9 \approx 10^{-18} \rightarrow q = 10^{-9}$ C

Es decir, la carga acumulada por la regla en el frotamiento será mayor que 10^{-9} C.

De manera más general, conviene saber que la carga que puede adquirir un objeto cotidiano cuando es frotado puede ser del orden de 1 nC a 1 µC (10^{-9} C a 10^{-6} C). Estos valores siguen siendo muy inferiores a la unidad de carga en el sistema internacional (1C). Pero, a su vez, son mucho mayores que la carga típica de partículas subatómicas, como, por ejemplo, electrones, protones, los dos núcleos de helio que hemos analizado anteriormente, etc.

En el ejemplo que acabamos de ver y también en otros experimentos similares que se pueden realizar en clase, la masa de los objetos cargados suele ser bastante pequeña, con lo que la fuerza eléctrica y la gravitatoria, pueden ser del mismo orden de magnitud. Por ello, se eligen esos objetos cuando se quiere poner de manifiesto la existencia de la fuerza eléctrica. Así, en la situación representada en la figura siguiente, la fuerza eléctrica de atracción entre el globo y el techo es algo mayor que la fuerza peso o fuerza de atracción gravitatoria entre el globo y la Tierra.



Sin embargo, la situación cambia cuando se consideran interacciones entre objetos macroscópicos neutros de mayor masa o que estén muy poco electrizados, y lo hace mucho más aún si intervienen objetos "celestes" como, por ejemplo, planetas, estrellas, satélites, etc., cuya masa es enorme. En esos casos, la interacción determinante es la gravitatoria.

2. Al colocar una pequeña carga q = 10^{-8} C en un punto dado de un campo eléctrico, se comprueba que la intensidad del campo en dicho punto es de 900 N/C.

Si en lugar de q se colocase una carga doble ($2\cdot10^{-8}$ C), el valor de la intensidad del campo eléctrico en ese mismo punto sería de:

a) 900 N/C
b) 450 N/C
c) 1800 N/C

La respuesta correcta para esta cuestión corresponde a la opción "a". Pero, según hemos podido comprobar, muchos alumnos se decantan por la opción "c". Conviene plantearnos la siguiente cuestión, para contribuir a superar esta dificultad:

Teniendo en cuenta la definición de campo eléctrico, repasad formalmente el procedimiento que ha de seguirse para determinar en la intensidad del campo eléctrico a que alude la cuestión anterior.

Partimos de la siguiente definición de intensidad del campo eléctrico en un punto:

Una magnitud que coincide en módulo, dirección y sentido (aunque con distinta unidad), con la fuerza que actuaría sobre la unidad de carga positiva si se la colocase en dicho punto[2].

Esta definición es acorde con el siguiente procedimiento que se ha de seguir para determinar la intensidad de campo en un punto P cualquiera del mismo:

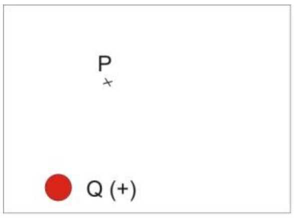
-Identificar en qué punto se desea realizar la determinación

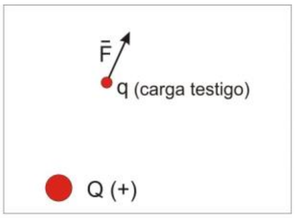
-Colocar en ese punto una carga testigo (por convenio positiva) y comprobar si sobre ella se ejerce una fuerza eléctrica.

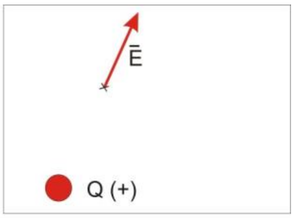
-Determinar la fuerza eléctrica ejercida sobre la carga testigo.

-Si la carga testigo fuese una carga unidad (1C), el valor (módulo) de la fuerza coincidiría con el de la intensidad del campo (también, la dirección y sentido de ambos vectores); si no es así, se ha de dividir el valor de la fuerza entre el valor de la carga testigo, para obtener de ese modo el valor de la fuerza por unidad de carga, es decir, el valor de la intensidad del campo.

El proceso anterior se puede clarificar mediante algunos dibujos como los siguientes:







2 Atención: Intensidad del campo eléctrico y fuerza eléctrica son magnitudes distintas, que se miden en distintas unidades. Para evitar confusiones es mejor no utilizar definiciones del tipo: "Intensidad del campo eléctrico en un punto **es la fuerza** que actuaría sobre la unidad de carga positiva...

Esquema de la izquierda: Queremos saber el campo eléctrico que genera una carga, Q (se usa letra mayúscula para indicar que se trata de la carga creadora del campo), en un cierto punto P. Q puede tener cualquier signo y en este caso hemos supuesto que es una carga positiva.

Esquema central: Colocamos en ese punto P a una carga testigo, q (ahora se usa letra minúscula para indicar que es una carga "testigo" o carga de prueba), que, por convenio, ha de ser siempre positiva. Sobre esa carga testigo, q, se ejerce una fuerza eléctrica F, orientada como muestra el dibujo (en este caso Q y q se repelen), y cuyo módulo es:

$$F = K \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$$

(r es la separación entre Q y q, o, lo que es igual, la distancia del punto P a la carga Q)

Esquema de la derecha: Obtenida la fuerza $\vec{F}$, el campo eléctrico $\vec{E}$ en el punto P se obtiene dividiendo $\vec{F}$ entre la carga testigo q. Por tanto, $\vec{E}$ es un vector orientado como la fuerza $\vec{F}$ y cuyo módulo en ese punto vendrá dado por:

$$E = \frac{F}{q} = K \cdot \frac{Q}{r^2}$$

El resultado muestra que E únicamente depende de Q, la carga creadora del campo (en valor absoluto) y de la distancia, r, a la que el punto P se encuentra de ella. Como es lógico, el valor de E es independiente de que en el punto P haya o no carga alguna.

Eso sí, si se colocara cualquier carga, como la carga testigo q, en ese punto P, el campo ejercería sobre ella una determinada fuerza de módulo F, y si la carga colocada ahí fuese el doble (q' = 2q), la fuerza F' sobre ella sería también el doble (F'=2F), lo que no contradice que el campo en ese punto P tiene un valor determinado, el cual no depende de que carga podamos colocar en ese punto para detectarlo. En resumen:

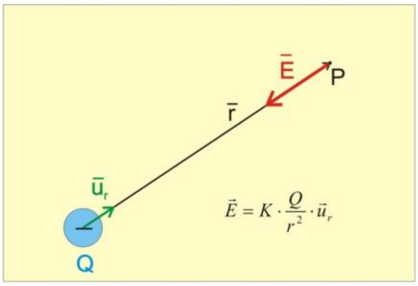
La intensidad de un campo eléctrico en un punto dado del mismo, no depende de la carga que pueda colocarse en dicho punto, pero sí de la carga o cargas que generan dicho campo.

Otra cuestión distinta, que hay que tener muy en cuenta con respecto al concepto de campo eléctrico, es el hecho de que su valor y/o su orientación, en la mayoría de casos, serán diferentes en distintos puntos del mismo. En el caso que acabamos de ver, si se coloca una determinada carga testigo, q, en dos lugares distintos (a diferente distancia de Q), dicha carga se ve sometida una fuerza diferente, por ser diferente el valor de la intensidad del campo.

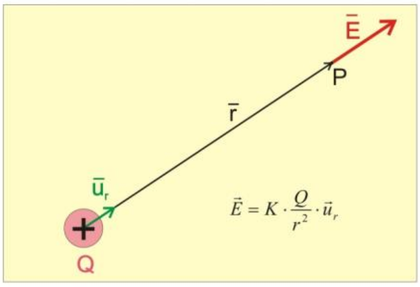
Para expresar vectorialmente la intensidad del campo generado por Q, consideraremos el vector $\vec{r}$ como un vector con origen en el punto donde se halla la carga Q generadora del campo y sentido hacia el punto P donde se va a evaluar la intensidad $\vec{E}$ del campo. El vector $\vec{u}_r$ es un vector unitario con la misma dirección y sentido que $\vec{r}$.

$$\vec{E} = K \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

Es importante tener en cuenta que, en la expresión anterior, el valor de Q debe figurar siempre con su signo. De acuerdo con dicha expresión, la dirección de $\vec{E}$ será la de la recta que une la carga Q con el punto P, y el signo de Q es lo que determinará el sentido de $\vec{E}$ (hacia Q si esta es negativa y al contrario si es positiva), tal y como se muestra en las figuras siguientes:

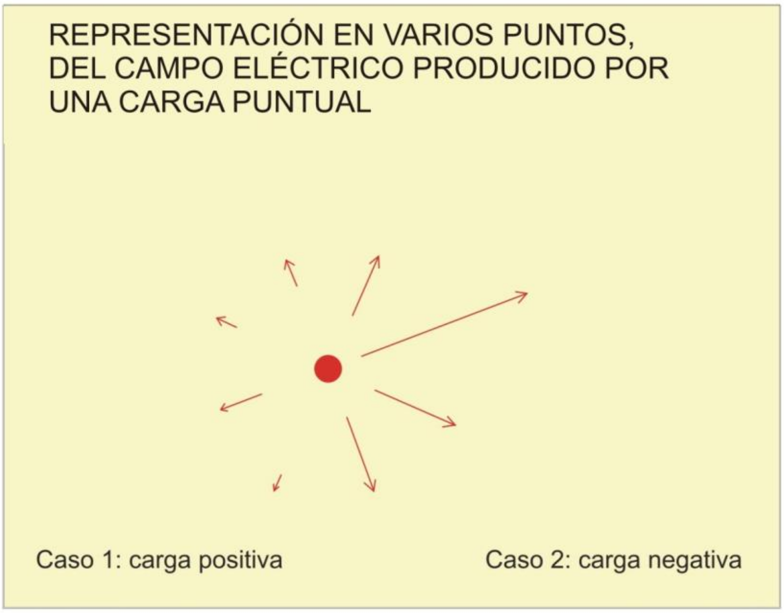


Intensidad del campo en P cuando Q es negativa



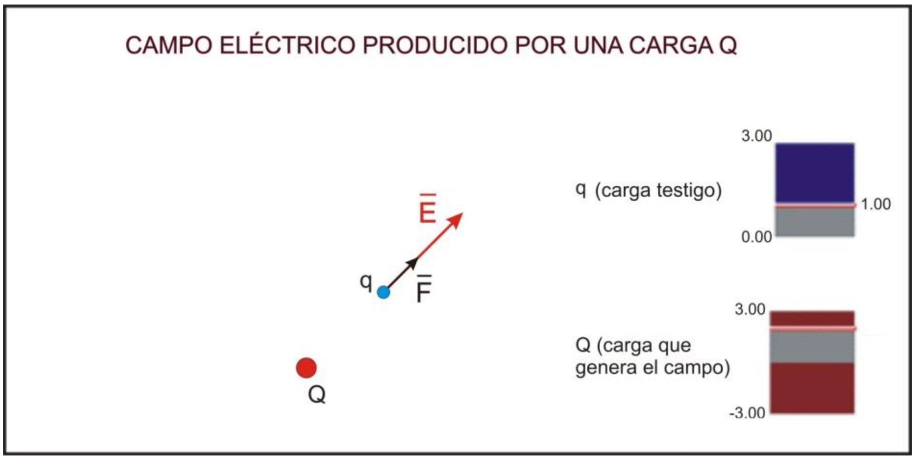
Intensidad del campo en P cuando Q es positiva

Para trabajar en algunos de estos conceptos que involucran al campo eléctrico hemos diseñado dos animaciones interactivas que pueden aprovecharse en clase o que, también, pueden usar autónomamente los estudiantes en sus casas como refuerzo.



La primera de estas animaciones (ved figura anterior), representa en algunos puntos al azar el vector intensidad del campo eléctrico generado por una supuesta carga puntual Q. El usuario puede elegir que Q sea positiva o negativa y, seguidamente, ha de ir moviendo el cursor por la pantalla en la que se van dibujando vectores intensidad en muchos puntos diferentes. El resultado permite constatar que, en la situación planteada, el campo eléctrico tiene geometría radial y que cada vector $\vec{E}$, tiene una longitud proporcional a su valor (módulo) en cada punto. La imagen refleja el aspecto que va mostrando la pantalla para una carga generadora del campo que sea positiva.

La segunda animación trata específicamente la cuestión que acabamos de resolver. En la pantalla puede verse a una carga puntual Q que genera un campo eléctrico y a otra carga de prueba, q, sobre la que actúa dicho campo. Se dispone de dos controladores manuales con los que se pueden modificar los valores (en microculombios) de la carga testigo, q, y de la carga que genera el campo, Q (incluyendo la posibilidad de que Q sea positiva o negativa). Al hacerlo se constata que la intensidad del campo no depende de cuál sea la carga testigo que se coloque en el punto, pero sí, lógicamente, de la carga Q que genera ese campo. La animación también calcula en cada caso la fuerza que se ejerce sobre la carga testigo q, pudiéndose así comprobar que, por ejemplo, a un mismo valor del campo E, le corresponden distintos valores de F según sea el valor de la carga q. Colocando el cursor encima de la carga testigo q, también se puede mover ésta a cualquier otro lugar y ver cómo se orientan y que longitud tienen ahí los dos vectores representados ($\vec{E}$ y $\vec{F}$).



Ambas animaciones están disponibles en la página web de la Sección Local de Alicante de la Real Sociedad Española de Física (http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm)

Podemos, ahora, ir un poco más allá y plantearnos el cálculo de la intensidad de un campo eléctrico en un punto P dado del mismo, en el caso de que dicho campo sea generado no por una, sino por varias cargas que puedan considerarse como puntuales.

3. Supongamos un sistema formado por dos objetos cargados eléctricamente con cargas Q_1 y Q_2 y separados una cierta distancia entre sí. Se pide:

a) ¿En qué punto la intensidad del campo eléctrico resultante será nula?

b) Concretad para el caso de que Q_1 = - 36 μC se halle en el punto (0 , 0) de un sistema de coordenadas cartesianas y Q_2 = 9 μC en el (4 , 0) cm del mismo sistema.

a) Nos vamos a centrar en el caso de dos objetos cargados y separados por una gran distancia "d" (comparada con su tamaño). Supondremos que ambos se pueden considerar como cargas puntuales[3]. Este puede ser el caso, por ejemplo, de dos pequeñas esferas metálicas cargadas.

En principio, como en el enunciado no se dice sobre el signo de las cargas, se pueden plantear dos situaciones:

-Que ambas sean mismo signo:

Figura 1a

-Que sean de distinto signo:

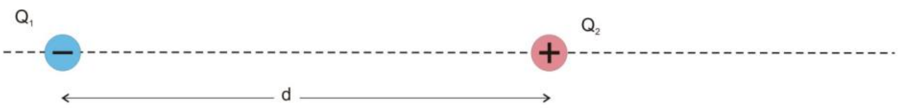


Figura 2a

Para dibujar en cualquier punto el vector intensidad del campo eléctrico debido a una carga puntual, conviene preguntarse por la fuerza que dicha carga, ejercería sobre una hipotética unidad de carga positiva colocada en ese punto. Coherentemente con la definición de intensidad de campo eléctrico, el vector $\vec{E}$ en el punto considerado, tendrá la misma dirección, sentido y módulo que dicha fuerza.

En la situación planteada en la ***figura 1a*** *razonad en qué zona (a la izquierda de Q_1, entre Q_1 y Q_2, a la derecha de Q_2) podría estar el punto P en el que la intensidad del campo eléctrico resultante fuese nula.*

En este caso, el punto que buscamos ha de estar situado en la recta que pasa por ambas cargas y necesariamente en algún punto del segmento de recta (de longitud d) que las separa, puesto que

[3] Veremos en un problema posterior que, si pretendemos calcular magnitudes, tales como fuerza, campo, etc., en el exterior de esos objetos, esta suposición será exacta cuando ambos objetos sean perfectamente esféricos y su carga se distribuya homogéneamente en la superficie de cada uno

es la única zona en la que los vectores $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ tienen la misma dirección y sentidos contrarios. Además, para que tengan el mismo módulo y su suma pueda dar 0, dicho punto deberá estar más cerca de la carga menor, para que pueda compensarse ese menor valor de la carga con una mayor proximidad a la misma. Naturalmente, en el caso de que ambas cargas tengan el mismo valor, ese punto coincidirá con d/2.

Si situamos la carga Q_1 en el origen de coordenadas y suponemos que $Q_1 > Q_2$, podemos completar la figura 1a anterior dibujando los vectores $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ en P, situado a una distancia r_1 de Q_1 y a distancia r_2 de Q_2, de tal forma que $r_1 + r_2 = d$ (ved figura 1b siguiente).

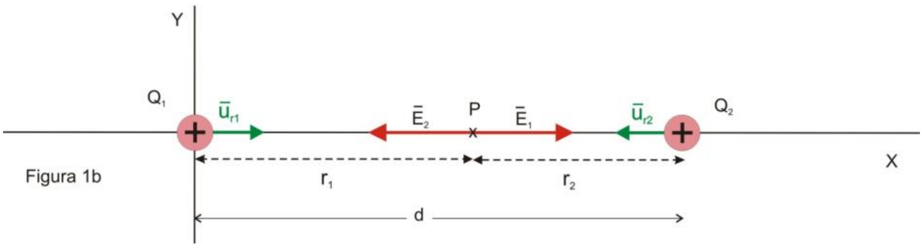


Figura 1b

Se trata, por tanto, de hallar la distancia r_1 a que se encuentra P del origen de coordenadas.

Reflexionad acerca de los factores de los cuales puede depender r_1 y cómo influirá cada uno de ellos en su valor.

En principio, cabe pensar que r_1 dependa de la distancia d, así como de los valores de Q_1 y de Q_2:

$$r_1 = f(Q_1, Q_2, d)$$

Y más concretamente que (a igualdad de los restantes factores): cuanto mayor sea Q_1 y/o menor sea Q_2 (valores absolutos) tanto mayor será r_1; cuanto mayor sea d, mayor será también r_1. También podemos pensar en algunos casos límite evidentes, como, por ejemplo: que si Q_2 tiende a 0, r_1 tenderá a d; o que si las dos cargas fuesen iguales (en valor absoluto), entonces será $r_1 = d/2$.

Elaborad posibles estrategias para resolver el problema en la situación planteada

Sabemos que en el caso del campo eléctrico creado por una carga Q puntual (o que pueda considerarse como tal), la intensidad del campo en un punto dado del mismo es una magnitud vectorial dada por:

$$\vec{E} = K \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

En nuestro caso, la intensidad del campo eléctrico resultante será $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

-Obviamente, para que la suma de estos dos vectores, que tienen la misma dirección y sentidos contrarios, valga 0, es necesario que sus módulos (E_1 y E_2) sean iguales. Por tanto, una primera forma de resolver el problema podría ser igualar E_1 con E_2 y, a partir de la ecuación obtenida, hallar r_1.

-También podríamos realizar un tratamiento vectorial. En ese caso, bastaría con obtener los vectores $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ e igualar a 0 la suma de ambos, despejando finalmente r_1 de la ecuación obtenida.

Resolved utilizando la segunda de las estrategias que acabamos de exponer

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = K \cdot \frac{Q_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r1} + K \cdot \frac{Q_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r2}$$

$$\vec{E} = K \cdot \frac{Q_1}{r_1^2} \cdot (1\,,\,0) + K \cdot \frac{Q_2}{r_2^2} \cdot (-1\,,\,0) = 0 \;\rightarrow\; \frac{Q_1}{r_1^2} - \frac{Q_2}{r_2^2} = 0$$

Sustituyendo $r_2 = d - r_1$ y despejando r_1, obtenemos:

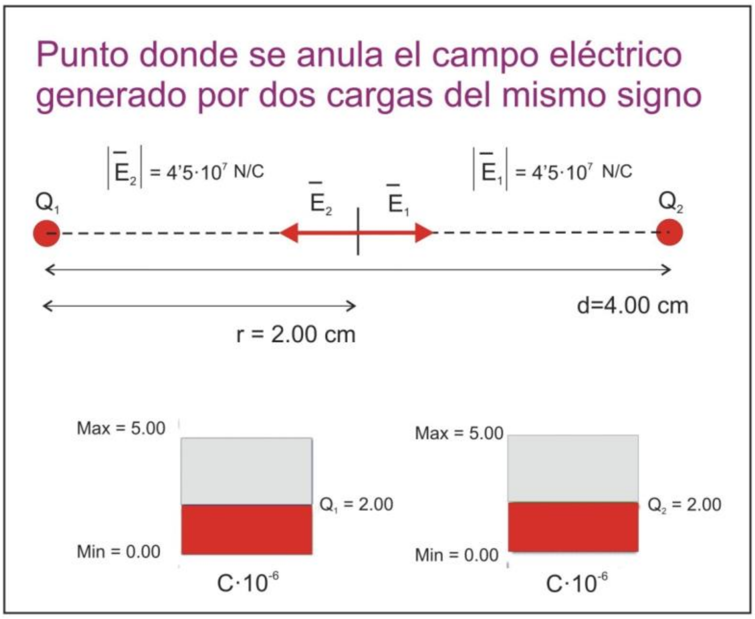
$$r_1 = \frac{\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2}} \cdot d$$

Y simplificando, obtenemos finalmente que: $\boxed{r_1 = \dfrac{1}{1 + \sqrt{\dfrac{Q_2}{Q_1}}} \cdot d}$

Analizad el resultado obtenido

Podemos ver, en primer lugar, que el resultado anterior es dimensionalmente homogéneo (L en ambos miembros). En segundo, lugar vemos también que se cumplen nuestras hipótesis de partida ya que, por ejemplo: si Q_1 aumenta (en valor absoluto), r_1 también aumenta; si Q_2 tiende a 0, r_1 tiende a d; si $Q_1 = Q_2$ (valores absolutos), $r_1 = d/2$, etc.

Como complemento a este desarrollo se puede usar una animación *Modellus* que ilustra este caso particular en el que ambas cargas tienen el mismo signo. En la pantalla se representan las dos cargas y los vectores que indican los campos eléctricos que generan en el punto en el que se contrarrestan. El usuario puede desplazar horizontalmente la carga Q_2 (colocando el ratón encima de ella) y, así, modificar la distancia, d. También puede usar los dos controladores manuales que vemos en la figura adjunta para modificar el valor de cada una de las dos cargas. En la animación, las distancias se han expresado en cm y las cargas en µC, obteniéndose el campo eléctrico en N/C. La animación y el programa para usarla en cualquier ordenador están disponibles en la página web de la Sección Local de Alicante de la RSEF.
(http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm)



Veremos ahora cómo tratar el problema en la situación representada en la **figura 2a**. En este caso el punto que buscamos también ha de estar situado en la recta que pasa por ambas cargas (para que los vectores $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ tengan la misma dirección), pero, a diferencia de antes, P no puede estar entre las dos cargas, puesto que en cualquier punto de esa zona (*comprobadlo*), ambos vectores $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ tienen el mismo sentido (hacia la carga negativa Q_1). Sin embargo, tanto a la derecha de Q_2 como a la izquierda de Q_1, esos vectores tienen sentidos contrarios (*comprobadlo*), aunque solo en una de esas dos zonas podrían anularse.

Teniendo en cuenta que Q_1 (en valor absoluto) es mayor que Q_2, determinad razonadamente en cuál de esas dos posibles zonas estará situado el punto P que buscamos.

P deberá estar situado a la derecha de Q_2, puesto que es la única zona en la que teniendo los vectores $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ la misma dirección y sentidos contrarios, sus módulos pueden ser iguales, ya que el menor valor de Q_2 se puede compensar con la mayor cercanía de P a esa carga. Esto no puede ocurrir a la izquierda de Q_1 (*comprobadlo*), ya que en esa zona P siempre estaría más cercano de la carga mayor (en valor absoluto) y, por tanto siempre sería $E_1 > E_2$.

Si situamos la carga Q_1 en el origen de coordenadas y suponemos que $Q_1 > Q_2$, podemos completar la figura 2a anterior dibujando los vectores $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ en P, situado a una distancia r_1 de Q_1 y a distancia r_2 de Q_2, de tal forma que $r_1 = r_2 + d$ (ved figura 2b siguiente).

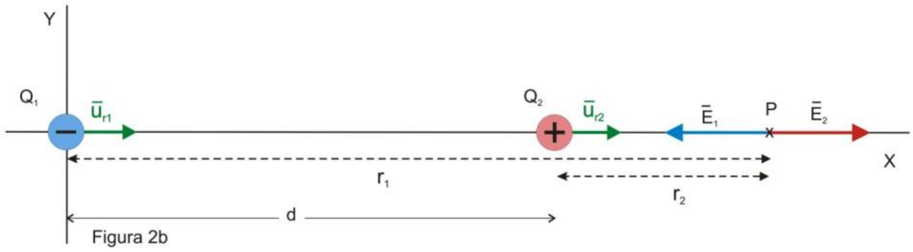


Figura 2b

Al igual que en la primera situación planteada (cargas del mismo signo), aquí también cabe pensar que r_1 dependa de la distancia d, así como de los valores de Q_1 y de Q_2:

$$r_1 = f\,(Q_1, Q_2, d)$$

Y más concretamente (siempre a igualdad de los restantes factores) que: si Q_1 aumenta, r_1 aumentará; si Q_2 aumenta, r_1 disminuirá; si d aumenta, r_1 aumentará; Si Q_2 tiende a 0, r_1 tenderá a "d".

¿Dónde estaría el punto P, en el caso de que las dos cargas fuesen iguales en valor absoluto?

Si las dos cargas tuviesen el mismo valor absoluto y nos movemos hacia la derecha de Q_2, E_1 siempre será menor que E_2 puesto que P siempre estara más cerca de Q_2 que de Q_1. Por tanto, en este caso, solo en el infinito ambos vectores $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ serían nulos y el campo resultante también.

Siguiendo las mismas pautas que anteriormente para la situación planteada en la figura 1b, proceded ahora a determinar la posición de P en la situación planteada en la figura 2b

En este caso, también deberá cumplirse que:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = K \cdot \frac{Q_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r1} + K \cdot \frac{Q_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r2}$$

$$\vec{E} = K \cdot \frac{Q_1}{r_1^2} \cdot (1\,,0) + K \cdot \frac{Q_2}{r_2^2} \cdot (1\,,0) = 0 \;\rightarrow\; \frac{Q_1}{r_1^2} + \frac{Q_2}{r_2^2} = 0$$

Sustituyendo $r_2 = r_1 - d$ y despejando r_1, obtenemos:

$$\frac{Q_1}{r_1^2} + \frac{Q_2}{(r_1 - d)^2} = 0 \;\rightarrow\; \frac{Q_2}{(r_1 - d)^2} = -\frac{Q_1}{r_1^2} \;\;\rightarrow\;\; \sqrt{\frac{Q_2}{(r_1 - d)^2}} = \sqrt{-\frac{Q_1}{r_1^2}} \;\;\rightarrow\;\; \frac{\sqrt{Q_2}}{r_1 - d} = \frac{\sqrt{-Q_1}}{r_1}$$

Y simplificando, obtenemos finalmente que: $\boxed{r_1 = \dfrac{d}{1 - \sqrt{\dfrac{Q_2}{-Q_1}}}}$

Al igual que ocurría en el caso anterior, este resultado también es dimensionalmente homogéneo (L en ambos miembros). Y también se cumplen las hipótesis de partida ya que, por ejemplo: si Q_1 aumenta (en valor absoluto), r_1 también aumenta; si Q_2 tiende a 0, r_1 tiende a d; si $Q_1 = Q_2$ (valores absolutos), $r_1 = \infty$.

Es importante dejar claro también que en este resultado literal la raíz cuadrada no es la de un número negativo, puesto que al ser la carga Q_1 negativa, cuando se sutituye su valor numérico con el signo correspondiente, el signo "menos" desaparece.

b) Para contestar la pregunta planteada en este apartado, basta darse cuenta de que la situacion que se plantea es la misma que acabamos de tratar, de modo que lo único que nos queda por hacer es sustituir los valores numéricos correspondientes en el resultado literal anterior:

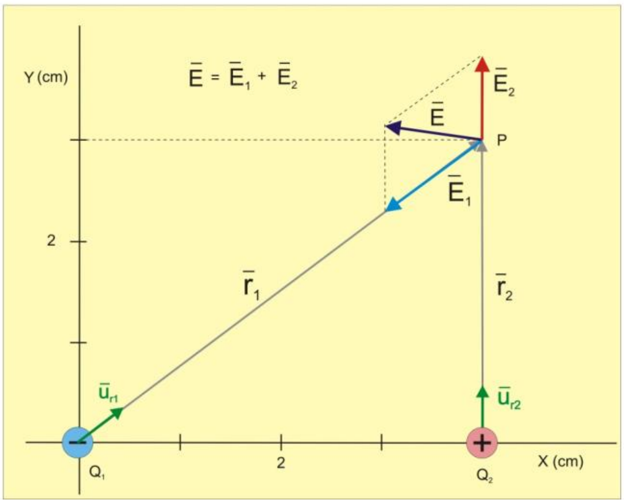
$$r_1 = \frac{d}{1-\sqrt{\dfrac{Q_2}{-Q_1}}} = \frac{4\cdot 10^{-2}}{1-\sqrt{\dfrac{9\cdot 10^{-6}}{-(-36\cdot 10^{-6})}}} = \frac{4\cdot 10^{-2}}{1-\sqrt{0{,}25}} = 8\cdot 10^{-2}\ m$$

También es necesario analizar los valores numéricos obtenidos en los problemas. En este caso, por ejemplo, esos 8 cm es un valor posible, puesto que es mayor que d y no resulta disparatado. Sin embargo un valor inferior a 4 cm, indicaría claramente que nos hemos equivocado en algo, puesto que, como hemos razonado anteriormente, el punto que se busca no puede estar entre las cargas, puesto que en ese caso los vectores $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ irían en el mismo sentido y no podrían anularse.

En este ejercicio nos hemos limitado a considerar casos en los que los puntos manejados se encontraban en la misma recta que pasa por ambas cargas. Podemos ir, ahora, un poco más allá y plantearnos cómo hallar los vectores intensidad de campo y el campo resultante, en un punto fuera de dicha recta.

Determinad el vector intensidad del campo eléctrico resultante en el punto (4 , 3) cm. Del sistema de dos cargas considerado en el apartado b) de este ejercicio.

Si representamos el punto en cuestión en la figura 2a anterior, tendremos:



En la figura se han dibujado los vectores $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ (no a escala) y se ha determinado gráficamente el vector $\vec{E}$ como suma de los anteriores. Para obtener analíticamente el vector $\vec{E}$, debemos expresar primero $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ en función de sus componentes cartesianas y luego sumarlos.

Antes de comenzar, tenemos que conocer el valor de r_1. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo formado por las dos cargas y el punto P, obtenemos que r_1 = 5 cm.

Calculad la intensidad del campo eléctrico generada por cada una de las cargas en el punto P de la figura y, obtened $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

$$\vec{E}_1 = \frac{K \cdot Q_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r1} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-36 \cdot 10^{-6})}{25 \cdot 10^{-4}} \cdot \vec{u}_{r1} = -12'96 \cdot 10^7 \cdot \vec{u}_{r1}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{K \cdot Q_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 9 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 10^{-4}} \cdot \vec{u}_{r2} = 9 \cdot 10^7 \cdot \vec{u}_{r2}$$

La determinación del vector $\vec{u}_{r2}$ es inmediata ya que de la figura anterior se desprende que $\vec{u}_{r2}$ = (0, 1). Sin embargo, la determinación del vector $\vec{u}_{r1}$ es algo más laboriosa:

$$\vec{r}_1 = (4{\cdot}10^{-2}\ ,\ 3{\cdot}10^{-2})\ m; \quad r_1 = \sqrt{(4{\cdot}10^{-2})^2 + (3{\cdot}10^{-2})^2} = 5{\cdot}10^{-2}\ m; \quad \vec{u}_{r1} = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{(4{\cdot}10^{-2}\ ,\ 3{\cdot}10^{-2})}{5{\cdot}10^{-2}}$$

$$\vec{u}_{r1} = (0'8\ ,\ 0'6)$$

Sustituyendo los vectores unitarios en las expresiones que nos dan las intensidades de campo y sumando:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -12'96 \cdot 10^7 \cdot (0'8\ ,\ 0'6) + 9{\cdot}10^7 \cdot (0\ ,\ 1) = (-10'37 \cdot 10^7\ ,\ -7'78 \cdot 10^7) + (0\ ,\ 9 \cdot 10^7)$$

$\vec{E} = (-10'37 \cdot 10^7\ ,\ 1'22 \cdot 10^7)$ N/C

El resultado coincide (mismo módulo, dirección y sentido) con la fuerza que actuaría sobre la unidad de carga positiva si se colocase en el punto P. Por otra parte, si nos fijamos en las componentes del vector $\vec{E}$, podemos ver que el resultado es coherente con el vector obtenido al realizar la suma gráficamente. En efecto, en la figura anterior, se puede constatar cómo la componente según el eje X del vector $\vec{E}$ es negativa y mayor (en valor absoluto) que su componente según el eje Y (que es positiva).

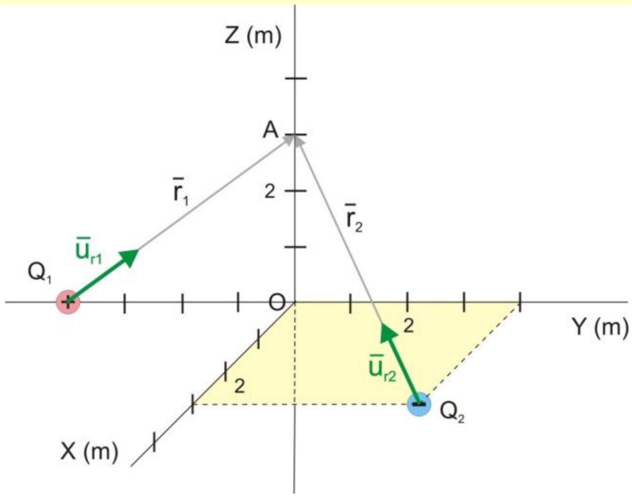
El módulo[4] del vector $\vec{E}$ será: $|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{(-10'37 \cdot 10^{-7})^2 + (1'22 \cdot 10^{-7})^2} \rightarrow$

$|\vec{E}|$ = 10’44·10^{-7} N/C

Hasta ahora nos hemos limitado a calcular el campo eléctrico generado por una o dos cargas consideradas puntuales y situadas en un mismo plano. Veremos a continuación un ejemplo en el que intervienen más cargas y se piden otras magnitudes además de la intensidad del campo eléctrico resultante.

[4] En este documento, utilizaremos para designar el módulo de un vector, indistintamente las barras verticales como simplemente el símbolo (letra) de la magnitud sin la flechita arriba.

4. En el sistema de dos cargas puntuales representado en la figura, Q_1 = 3·10^{-5} C y Q_2 = - 2·10^{-5} C. Se pide:



a) Intensidad del campo eléctrico resultante en el punto A (0, 0, 3) m.
b) Fuerza que sufriría una carga q = -10^{-8} C si se colocase en A.
d) Trabajo realizado por el campo cuando q se desplace desde A hasta el origen O de coordenadas.

a) Hasta ahora hemos trabajado con cargas distribuidas en un plano. En este tipo de problemas podríamos haber calculado la intensidad $\vec{E}$ del campo eléctrico resultante sin apoyarnos en el vector unitario $\vec{u}_r$, obteniendo las componentes escalares de $\vec{E}$ por consideraciones trigonométricas. Sin embargo, no lo hemos hecho porque este procedimiento <u>no es útil</u> en problemas como el que aquí se plantea, donde se tiene una distribución espacial y hay que trabajar en tres dimensiones.

Calculad $\vec{E}$ como la suma de los vectores $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ que crean en dicho punto las cargas Q_1 y Q_2 respectivamente, aplicando el procedimiento general que venimos utilizando.

Teniendo en cuenta el signo de las cargas, antes de realizar ningún cálculo sabemos que $\vec{E}_1$ tendrá el mismo sentido que $\vec{r}_1$ y que $\vec{E}_2$ tendrá sentido contrario a $\vec{r}_2$. Procederemos primero a calcular dichos vectores y, luego a realizar su suma analítica y gráficamente, para obtener el vector $\vec{E}$ resultante.

Para poder calcular los vectores $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ necesitamos conocer antes los módulos de los vectores $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$.

El módulo de $\vec{r}_1$ es inmediato puesto que corresponde a la hipotenusa del triángulo con vértices en Q_1, O y A, con lo que si aplicamos el teorema de Pitágoras se obtiene fácilmente: r_1 = 5 m.

Para el módulo del vector $\vec{r}_2$ podemos obtener primero el vector restando a las coordenadas de su extremo las coordenadas de su origen con lo que:

$\vec{r}_2$ = (0 , 0 , 3) – (3 , 4 , 0) = (-3 , - 4 , 3) m

Y luego aplicar: $r_2 = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} = \sqrt{9+16+9} = \sqrt{34}$ = 5’83 m

Por tanto, las intensidades de campo eléctrico resultan:

$$\vec{E}_1 = \frac{K \cdot Q_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r1} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (3 \cdot 10^{-5})}{25} \cdot \vec{u}_{r1} = 10'08 \cdot 10^3 \cdot \vec{u}_{r1}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{K \cdot Q_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-2 \cdot 10^{-5})}{34} \cdot \vec{u}_{r2} = -5'29 \cdot 10^3 \cdot \vec{u}_{r2}$$

Podemos ahora calcular los vectores unitarios:

$$\vec{u}_{r1} = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{(0\ ,\ 4\ ,\ 3)}{5} = (0\ ,\ 0'8\ ,\ 0'6)$$

$$\vec{u}_{r2} = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{(-3\ ,\ -4\ ,\ 3)}{5'83} = (-0'51\ ,\ -0'69\ ,\ 0'51)$$

Y, sustituyendo, el campo resultante es:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 10'08 \cdot 10^3 \cdot \vec{u}_{r1} + (-5'29 \cdot 10^3) \cdot \vec{u}_{r2} \rightarrow$$

$$\vec{E} = 10'08 \cdot 10^3 \cdot (0\ ,\ 0'8\ ,\ 0'6) + (-5'29 \cdot 10^3) \cdot (-0'51\ ,\ -0'69\ ,\ 0'51) \rightarrow$$

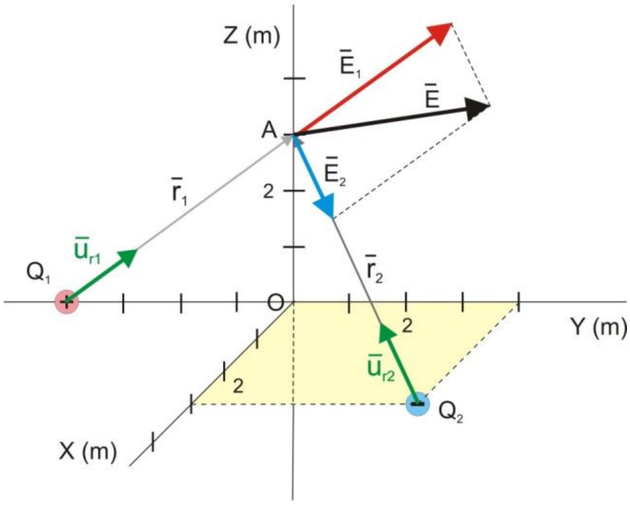
$$\vec{E} = (0\ ,\ 8'06 \cdot 10^3\ ,\ 6'05 \cdot 10^3) + (2'70 \cdot 10^3\ ,\ 3'65 \cdot 10^3\ ,\ -2'70 \cdot 10^3) \rightarrow$$

$$\vec{E} = (2'70 \cdot 10^3\ ,\ 11'71 \cdot 10^3\ ,\ 3'35 \cdot 10^3) \text{ N/C}$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \sqrt{(2'70 \cdot 10^3)^2 + (11'71 \cdot 10^3)^2 + (3'35 \cdot 10^3)^2} \rightarrow E = \sqrt{155'64 \cdot 10^6}$$

E = 12’48· 10^3 N/C

Podemos completar, ahora, la figura del enunciado, dibujando (con un tamaño relativo aproximado) los vectores $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ *y* $\vec{E}$.



b) Para obtener la fuerza que actuaría sobre una carga q = -10^{-8} C colocada en A, aplicaremos la expresión: $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$. Dado que q es negativa, el vector fuerza que se obtenga tendrá sentido contrario al vector $\vec{E}$.

$\vec{F} = q \cdot \vec{E} = -10^{-8} \cdot (2'70 \cdot 10^3\ , 11'71 \cdot 10^3\ , 3'35 \cdot 10^3) \rightarrow$

$\vec{F} = (-2'70 \cdot 10^{-5}\ ,\ -11'71 \cdot 10^{-5}\ ,\ -3'35 \cdot 10^{-5})$ N

¿Cómo podríamos calcular el módulo de esta fuerza?

Podría ser directamente, como la raíz cuadrado de la suma de sus componentes al cuadrado:

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{(-2'70 \cdot 10^{-5})^2 + (-11'71 \cdot 10^{-5})^2 + (-3'35 \cdot 10^{-5})^2} \rightarrow F = \sqrt{155'64 \cdot 10^{-10}}$

F = $12'48 \cdot 10^{-5}$ N

O bien aplicando la expresión: F = q·E (colocando q en valor absoluto, para evitar que el módulo salga negativo):

F = q·E = $10^{-8} \cdot 12'48 \cdot 10^3 \cdot 10^{-8} \rightarrow$ F = $12'48 \cdot 10^{-5}$ N

c) *¿Cómo podríamos obtener ahora el trabajo realizado por el campo cuando q se desplace desde A hasta el origen O de coordenadas?*

Dado que el campo eléctrico, al igual que el gravitatorio, es un campo conservativo, el trabajo realizado por la fuerza eléctrica del campo, se podrá determinar mediante la expresión:

$W_{Fe\,A}^{\ O} = -\Delta Ep_A^O = -q \cdot (V_O - V_A)$

Así pues, para calcular el trabajo tendremos que *calcular previamente el potencial del campo creado por las cargas Q_1 y Q_2 en los puntos A y O.*

$V_A = V_{A1} + V_{A2}$

$$V_A = \frac{K\,Q_1}{r_{A1}} + \frac{K\,Q_2}{r_{A2}} = 9\cdot 10^9 \cdot \frac{3\cdot 10^{-5}}{5} + 9\cdot 19^9 \cdot \left(\frac{-2\cdot 10^{-5}}{5'83}\right) = 9\cdot 10^4 \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{5'83}\right) = 23125'2\ V$$

$V_O = V_{O1} + V_{O2}$

$$V_O = \frac{K\,Q_1}{r_{O1}} + \frac{K\,Q_2}{r_{O2}} = 9\cdot 10^9 \cdot \frac{3\cdot 10^{-5}}{4} + 9\cdot 19^9 \cdot \left(\frac{-2\cdot 10^{-5}}{5}\right) = 9\cdot 10^4 \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5}\right) = 31500\ V$$

Sustituyendo:

$$W_{Fe\,A}^{\;\;O} = -\Delta Ep_A^O = -q\cdot(V_O - V_A) = -\,10^{-8}\cdot(31500 - 23125'2) \rightarrow \quad W_{Fe\,A}^{\;\;O} \approx -8'37\cdot 10^{-5}\ \mathrm{J}$$

¿Cómo interpretar que el trabajo realizado por el campo haya salido negativo?

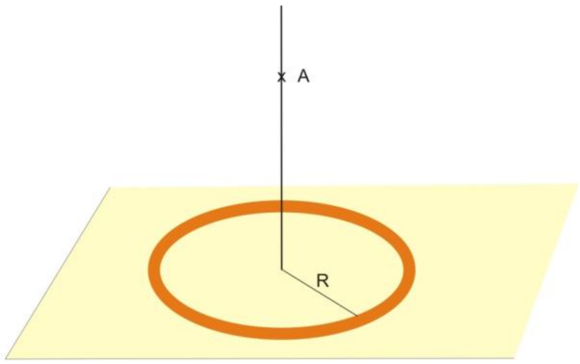
El signo negativo del trabajo indica que la transformación considerada (desplazamiento de q desde su posición inicial A hasta el origen de coordenadas O), no es espontánea, lo que significa que la fuerza electrostática que actúa sobre q se opone al desplazamiento. Por tanto, para que esta transformación se produzca será necesario que disminuya la energía cinética de q en $8'37\cdot 10^{-5}$ J, o bien que actúe una fuerza exterior sobre ella que realice un trabajo (suministre una energía) de, al menos, $8'37\cdot 10^{-5}$ J.

Hasta aquí, hemos calculado la intensidad del campo eléctrico en un punto, en situaciones en las que las cargas creadoras del campo podían ser consideradas como cargas puntuales. Cabe plantearse ahora: *¿Cómo podemos abordar problemas en los que la carga creadora del campo no pueda considerarse como una carga puntual?*

Nota 1:

En los siguientes cuatro ejercicios se abordan situaciones en las que el objeto que genera el campo eléctrico se puede considerar como una distribución contínua de carga. Un objetivo importante va a ser mostrar que en estos casos la determinación de la intensidad del campo eléctrico puede ser un proceso bastante laborioso, y, por ello, conviene plantear alguna otra estrategia más sencilla.

5. Dado un anillo de radio R, cargado con una carga Q uniformemente distribuida: a) Determinad la intensidad del campo eléctrico que crea en un punto A de la recta perpendicular al plano del anillo y que pasa por su centro. b) Hallad también el potencial en dicho punto.



Datos: $Q = 10^{-5}$ C, R = 10 cm, A se encuentra a 40 cm del centro del anillo.

a) Obtención del campo eléctrico

Dado que la carga Q del anillo no es una carga puntual, para resolver el problema podemos descomponerla en infinitas cargas dQ que sí podrán considerarse puntuales, hallar la expresión del campo eléctrico $d\vec{E}$ correspondiente a cada una de dichas cargas infinitesimales (en el punto A considerado), y, finalmente, obtener $\vec{E}$ como la suma (es decir, la integral) de todos los $d\vec{E}$.

Podemos simplificar el problema suponiendo que el grosor del anillo es despreciable frente a su longitud L, lo que permite considerar dicho anillo como una distribución lineal de carga, de longitud $L = 2\pi R$. Entonces, para descomponer la carga Q bastará dividir el anillo en elementos de longitud dL a cada uno de los cuales le corresponderá una carga dQ.

En la figura 1 siguiente, hemos representado la intensidad del campo eléctrico generado en el punto A por uno de tales elementos de carga dQ.

Podemos pensar en cómo sería la contribución del resto de los elementos que conforman el anillo y preguntarnos:

¿Hacia dónde iría dirigida la intensidad del campo eléctrico resultante en A?

En la figura 1, se puede ver que hemos escogido un sistema de referencia con origen en el centro del anillo. Por la simetría que presenta la figura, es fácil darse cuenta de que el vector $\vec{E}$ resultante, se encontrará sobre el eje Z y sentido hacia arriba.

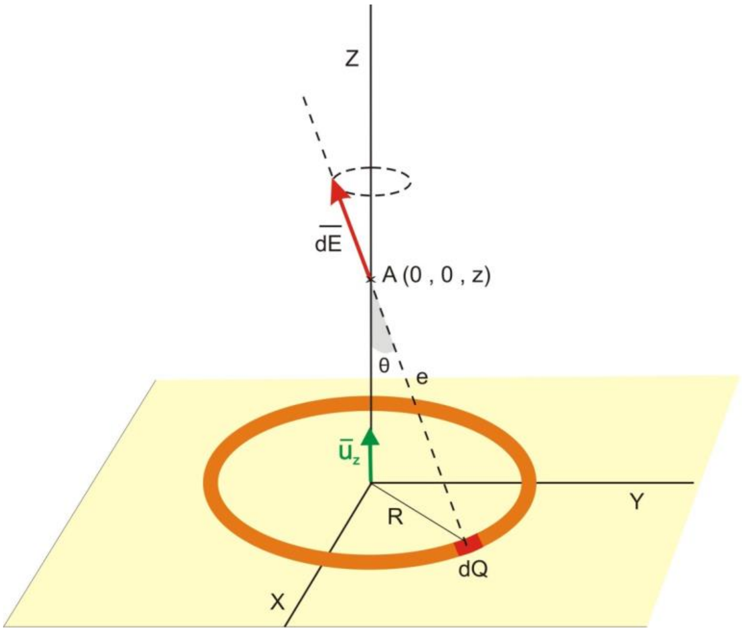


Figura 1

Esto es así, porque para cada elemento de carga dQ del anillo, existe otro igual dQ' en el extremo opuesto del diámetro que los une, tal que las componentes horizontales de los vectores $d\vec{E}$ y $d\vec{E}'$ correspondientes, se anulan entre ellas, por lo que para calcular $\vec{E}$ basta con sumar las componentes verticales sobre el eje Z (todas ellas iguales y con el mismo sentido). En la figura 2 siguiente se muestra esquemáticamente la situación descrita.

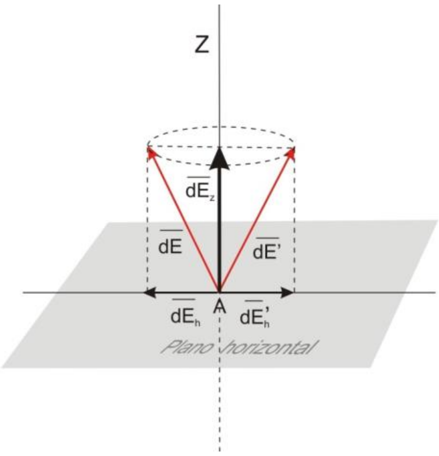


Figura 2

Así pues, el problema será determinar: $\vec{E} = \int d\vec{E}_z$

¿De qué factores cabe pensar que podrá depender $\vec{E}$? ¿Cómo influirá cada uno?

A título de hipótesis, cabe esperar que E dependa del valor de la carga Q, de la distancia z al centro del anillo y del radio R del anillo, además, por supuesto, de la constante K del medio en el que nos encontremos (que habitualmente, si no se especifica otra cosa, se supone es el aire).

En cuanto a la influencia de cada uno (siempre manteniendo constantes los demás), parece lógico pensar que si la carga Q del anillo aumenta, también deberá aumentar E. Por otra parte, si z (distancia vertical al centro del anillo) aumenta, E disminuirá, puesto que un aumento de z implica que nos alejamos del anillo. En cuanto a la influencia del radio R, si analizamos la geometría de la figura, parece claro que un anillo de mayor radio (insistimos, a igualdad de los restantes factores y, por ello, con la misma carga y mismo valor de z), supone que la componente sobre el eje Z de los vectores $d\vec{E}$ sea más pequeña (al estar estos vectores más inclinados) y, por tanto, el valor de su suma , es decir, $\vec{E}$, disminuirá. Finalmente, cuanto mayor sea el valor de la constante eléctrica K del medio, mayor será E.

Sugerid algún caso límite que podamos contemplar

Parece obvio que para z = 0 (centro del anillo), el campo eléctrico resultante en ese punto deberá ser nulo, ya que los vectores $d\vec{E}$ no tendrán componente según el eje Z, y para cada uno de esos infinitos vectores siempre habrá otro igual y de sentido contrario de forma que ambos se anulen, tal y como se muestra en la figura 3 siguiente:

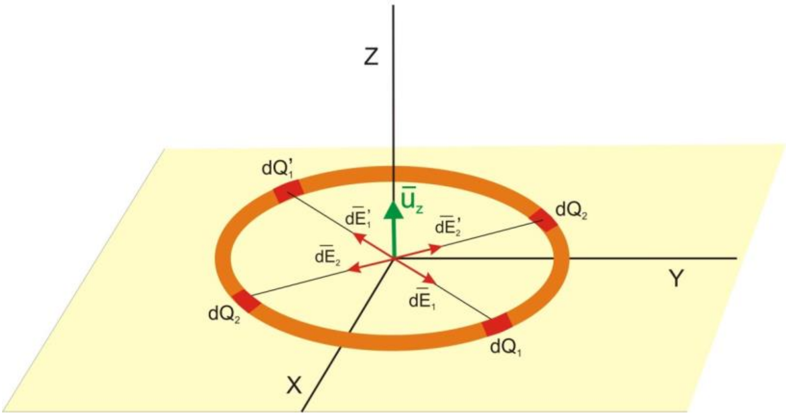


Figura 3

También es lógico pensar que para Q = 0, se cumpla que E = 0, y que cuando z tienda a infinito E tienda a 0.

Sugerid un posible procedimiento para obtener la intensidad del campo eléctrico en A y llevadlo a cabo.

Hemos visto anteriormente que $\vec{E} = \int d\vec{E}_z$, luego, una forma de resolver el problema será tratar de calcular esta integral. Para ello, de la figura 1, podemos ver que:

$dE_z = dE \cdot \cos\theta$

Sustituyendo dE en la igualdad anterior, queda: $dE_z = K \cdot \dfrac{dQ}{e^2} \cdot \cos\theta$

Con lo que: $\vec{E} = \int d\vec{E}_z = \int_0^Q K \cdot \dfrac{dQ}{e^2} \cdot \cos\theta \cdot \vec{u}_z$

Dado que K, e y θ son constantes, obtenemos:

$$\vec{E} = \frac{K}{r^2} \cdot \cos\theta \cdot \vec{u}_z \cdot \int_0^Q dQ \rightarrow \vec{E} = K \cdot \frac{Q}{e^2} \cdot \cos\theta \cdot \vec{u}_z$$

Teniendo ahora en cuenta que $\cos\theta = \dfrac{z}{e}$ y que $e = \sqrt{R^2 + z^2}$ nos queda:

$$\vec{E} = K \cdot \frac{Q}{R^2 + z^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \cdot \vec{u}_z \qquad (1)$$

Y simplificando: $\boxed{\vec{E} = K \cdot \dfrac{Q}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \cdot z \cdot \vec{u}_z}$ (2)

Sustituyendo valores: $\vec{E} = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{10^{-5}}{(0'1^2 + 0'4^2)^{3/2}} \cdot 0'4 \cdot \vec{u}_z \rightarrow$ $\boxed{\vec{E} = 5'14 \cdot 10^5 \cdot \vec{u}_z}$ N/C

Analizad el resultado literal obtenido

Podemos empezar el análisis comprobando que el resultado es dimensionalmente homogéneo (N/C en ambos lados de la ecuación), lo cual, como sabemos, es una condición necesaria (aunque no suficiente) para que dicho resultado sea correcto.

En segundo lugar, vemos que se cumplen todas las hipótesis enunciadas anteriormente. Así, por ejemplo: E aumenta si Q aumenta y si R disminuye. En principio, la influencia de z no es tan sencilla de ver al encontrarse en numerador y denominador. Sin embargo, si nos fijamos en el denominador de la ecuación (1) o de la (2), nos damos cuenta de que la influencia del valor de z en el denominador es mayor que en el numerador y, por tanto, que, de acuerdo con nuestra hipótesis, si z aumenta, E disminuirá.

El resultado, también contempla los casos límite que habíamos considerado. Vemos, por ejemplo, que si hacemos Q = 0 entonces E = 0 y que lo mismo ocurre si hacemos z = 0.

Además de todo esto, es importante comprobar que el resultado es coherente con lo que cabría esperar que ocurriese cuando el anillo (siempre con la misma carga) se va haciendo cada vez más y más pequeño ya que, en el límite, ese pequeñisimo anillo se podría asimilar a una hipotética carga puntual Q situada en su centro. En efecto:

En la expresión (2) si R ⟶ 0 se cumple que: $\vec{E} \to K \cdot \frac{Q}{z^2}\vec{u}_z$ (3)

Obsérvese que este efecto se da no solo cuando R disminuye (siempre manteniendo constantes el resto de los factores), sino que también ocurre conforme nos vamos alejando del anillo, ya que para distancias grandes se cumple que z >> R, con lo que, en ese caso, se puede despreciar R^2 frente a z^2 y de nuevo, el anillo se podrá considerar como una carga puntual, y aplicar la expresión (3) con tanta mayor exactitud cuanto más alejado se halle A del centro del anillo.

b) Obtención del potencial eléctrico

Para determinar el potencial que crea el anillo cargado, en el mismo punto A, basta con seguir la misma estrategia que para obtener dE, solo que ahora, el ser el potencial una magnitud escalar, el cálculo es más sencillo.

El potencial correspondiente a cada dQ vendrá dado por: dV = K·dQ/e

De modo que el potencial en A debido a todo el anillo de carga se podrá obtener como:

$$V = \int dV = \int_0^Q K \cdot \frac{dQ}{e} = K \cdot \frac{Q}{e}$$

Sustituyendo e en el resultado anterior: $V = K \cdot \frac{Q}{\sqrt{z^2 + R^2}}$ (4)

Para los valores de Q, R y z, que plantea el enunciado, se obtiene: V =2’18·10^5 V.

Naturalmente, el resultado anterior también se convierte en el correspondiente a una carga Q puntual, para el caso límite antes contemplado de que R pueda despreciarse frente a z, o, simplemente, cuando R tienda a 0. En efecto:

En la expresión (4) si R ⟶ 0 se cumple que: $V \to K \cdot \frac{Q}{z}$ (5)

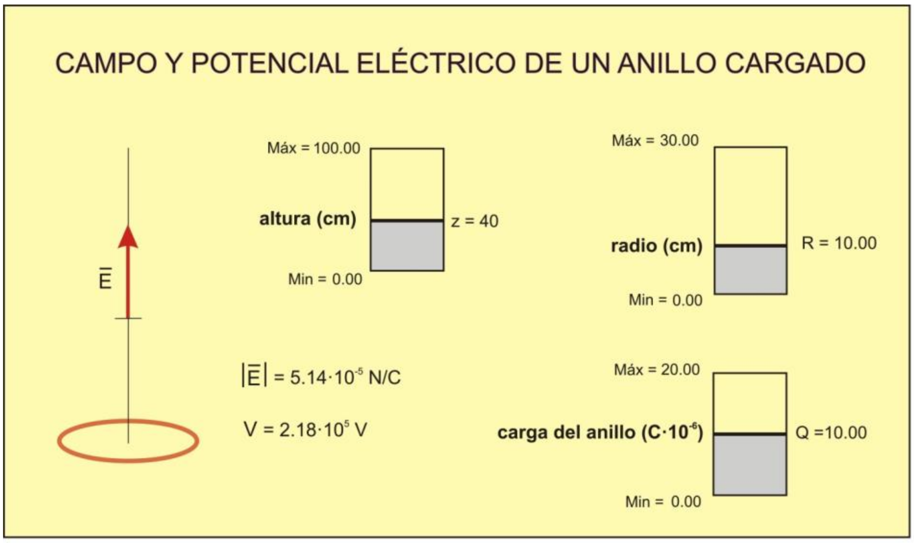
Justificad de nuevo la orientación que tiene el campo eléctrico en cualquier punto del eje z, teniendo en cuenta la expresión literal del potencial eléctrico y su relación con el campo.

Ya hemos visto antes que, simplemente sumando en el punto A los vectores que representan al campo eléctrico generado por cada elemento de carga del anillo, se deduce que la resultante de dicha suma ha de ser un vector de dirección vertical y con orientación positiva sobre el eje z si la carga del anillo es positiva. A la misma conclusión se puede llegar, teniendo en cuenta la relación entre el campo eléctrico y el potencial[5]. En efecto: Al analizar el resultado literal de V (ecuación 4, anterior), vemos que para todo valor de R (es decir, con independencia del tamaño

[5] $\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\vec{u}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\vec{u}_y - \frac{\partial V}{\partial z}\cdot\vec{u}_z$ y, como V no depende más que de z: $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \to \vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial z}\cdot\vec{u}_z$

que pueda tener el anillo), cuando la carga del anillo es positiva, el valor de V disminuye al aumentar z. Por tanto, E_z ha de ser positiva, lo que implica que el vector $\vec{E}$ resultante (que solo tiene esta componente z) se ha de orientar en sentido positivo de ese eje z, es decir, yendo de mayor a menor potencial.

Para posible refuerzo de este problema, hemos diseñado una animación *Modellus* que lo resuelve. En la pantalla se dispone de tres controladores manuales con los que se pueden modificar los parámetros z, R y Q, y ver así cómo influye cada uno de ellos en el valor de campo y del potencial eléctrico generados por el anillo. Los estudiantes pueden usarlos para contrastar sus hipótesis y casos límite, así como para analizar el resultado del problema.



La animación está disponible en la web de la Sección Local de Alicante de la Real Sociedad Española de Física (http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm).

Considerad, qué nuevos problemas podríamos abordar, partiendo del resultado obtenido para el caso del anillo.

Una estrategia muy útil en el abordaje de problemas de Física consiste en resolver inicialmente situaciones sencillas o simplificadas, con objeto de que las soluciones que se obtienen puedan ser un punto de partida para afrontar seguidamente problemas más complejos. En este sentido, la obtención del campo y el potencial eléctricos generados por un anillo cargado nos va a servir, como veremos en los dos siguientes problemas, para estudiar el campo generado por otros objetos, que podremos considerar como si estuvieran compuestos de anillos elementales. Veremos así el caso de un disco de carga, al que trataremos como infinitos anillos concentricos de radio "r" que se extienden entre r = 0 y r = R siendo R el radio del disco, y también el caso de una superficie esférica, a la que trataremos como infinitos anillos situados uno encima de otro, cuyo radio va aumentando desde 0 hasta un valor máximo R, para luego ir disminuyendo desde R hasta 0, siendo R el radio de la esfera.

6. Dado un disco de radio R, cargado con una carga Q (positiva) uniformemente distribuida, se pide:

a) Determinad la intensidad del campo eléctrico que genera en un punto A de la recta perpendicular al plano del disco y que pasa por su centro.

b) Hallad el potencial eléctrico en ese mismo punto A.

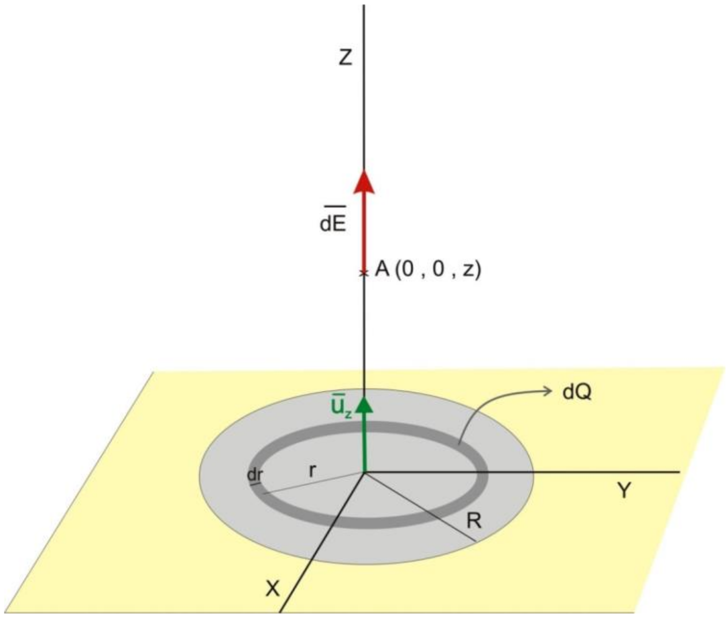
a) Determinación de la intensidad de campo eléctrico.

Como acabamos de comentar en el problema anterior, para afrontar la situación aquí planteada, vamos a descomponer la carga Q del disco en infinitas cargas dQ correspondientes a las cargas de otros tantos anillos concéntricos, de anchura infinitesimal dr, cuyos radios van variando entre r = 0 y r = R. Esta estrategia es la más conveniente para aprovechar el resultado del problema anterior e, igual que antes, para aplicarla, simplificaremos el problema, considerando el grosor del disco despreciable.

En este caso, pues, la contribución de cada uno de esos anillos (ved resultado problema anterior) al campo en el punto A del eje del disco vendrá dada por:

$$d\vec{E} = K \cdot \frac{dQ}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \cdot z \cdot \vec{u}_z$$

En la figura siguiente podemos ver la intensidad del campo eléctrico generado en el punto A por uno de tales anillos de carga dQ radio r y espesor dr.



El campo resultante en A, será la suma de las contribuciones de todos los anillos en que consideremos descompuesto el disco, suma que debermos obtener integrando la expresión anterior, es decir:

$$\vec{E} = \int d\vec{E}$$

Sustituyendo la expresión correspondiente a $d\vec{E}$ en la igualdad anterior:

$$\vec{E} = \int K \cdot \frac{dQ}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \cdot z \cdot \vec{u}_z \quad (1)$$

En la ecuación anterior, z es constante, pero sigue habiendo dos variables. Para poder resolver la integral, necesitamos reducirlas a una sola. ¿Cómo podríamos hacerlo?

Dado que el disco está uniformemente cargado, podemos expresar la carga dQ de cada anillo elemental, en función de la densidad superficial de carga σ (que será constante). En efecto:

La densidad de carga del disco completo (considerado como una superficie plana) vendrá dada por: $\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$ (2)

Dicha densidad, como acabamos de razonar, será la misma que la de cada uno de los infinitos anillos que lo forman. Si escogemos uno cualquiera de ellos, de radio r y espesor dr, podemos considerar que su superficie equivale a la de un un rectángulo de lados 2πr y dr y que, por tanto, la densidad de carga en este caso, vendrá dada por:

$$\sigma = \frac{dQ}{2\pi r \cdot dr} \quad (3)$$

Y despejando: dQ = σ·2πr·dr

Sustituyendo ahora en (1):

$$\vec{E} = \int_0^R K \cdot \frac{\sigma \cdot 2\pi r \cdot dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \cdot z \cdot \vec{u}_z = K \cdot \sigma \cdot \pi \cdot z \cdot \int_0^R (r^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2r \cdot dr \cdot \vec{u}_z$$

Resolviendo la integral anterior:

$$\vec{E} = K \cdot \sigma \cdot \pi \cdot z \cdot \vec{u}_z \cdot \left[\frac{-2}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \right]_0^R = K \cdot \sigma \cdot \pi \cdot z \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right) \cdot \vec{u}_z$$

Y simplificando: $\vec{E} == K \cdot \sigma \cdot 2\pi \cdot \left(1 - \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right) \cdot \vec{u}_z$ (4a)

Podemos simplificar aun más el resultado (4a) anterior, si expresamos la constante K en función de la constante dieléctrica del medio (que supondremos el vacío). En ese caso, el resultado se transforma en:

$$\vec{E} == \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sigma \cdot 2\pi \cdot \left(1 - \frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right) \cdot \vec{u}_z \;\longrightarrow\; \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right) \cdot \vec{u}_z \quad \text{(4b)}$$

O, también, podríamos simplemente sustituir σ en (4a), con lo que obtendríamos:

$$\vec{E} == K \cdot \frac{Q}{\pi \cdot R^2} \cdot 2\pi \cdot \left(1 - \frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right) \cdot \vec{u}_z \;\longrightarrow\; \vec{E} == K \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot 2 \cdot \left(1 - \frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right) \cdot \vec{u}_z \quad \text{(4c)}$$

Analizad el resultado obtenido

Una vez comprobado que el resultado es dimensionalmente homogéneo (N/C en ambos lados), vale la pena *analizar detenidamente lo que ocurre en el caso particular de que R sea mucho más grande que la distancia z* (es decir: R >> z para cualquier valor de z, o bien, lo que es equivalente, que z → 0 para cualquier valor de R). En este caso límite, el disco se comporta como una lámina plana uniformemente cargada y de extensión infinita. Para determinar la intensidad del campo eléctrico, hemos de tener en cuenta que, en las conciciones límite expresadas, el segundo término de la diferencia que figura en el paréntesis del resultado 4b, tiende a 0, con lo que el resultado quedaría como:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \vec{u}_z \quad \text{(5)}$$

¿Qué ocurriría en el caso particular de que z fuese mucho mayor que el radio R del disco?

En ese caso, opuesto al anterior, el disco se iría aproximando hacia una carga puntual Q a medida que aumentara la distancia z en comparación con R, por lo que la expresión 4c, si es correcta, debería contemplar también este hecho. Para comprobarlo, dado que al intentar obtener el límite en la expresión 4c correspondiente al caso R → 0, se obtiene de entrada una indeterminación (∞·0), recurrimos a desarrollar la expresión:

Comentado [U1]: La indeterminación es del tipo 0/0. DISCUTIR

$$(R^2+z^2)^{1/2} = z \cdot \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{1/2}$$

Aplicando el Teorema del Binomio:

$$(R^2+z^2)^{1/2} = z \cdot \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{1/2} = z \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{z^2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{R^4}{z^4} + \frac{1}{16} \cdot \frac{R^6}{z^6} + \ldots\right)$$

Para valores de z muy grandes con respecto a R, podemos despreciar todos los sumandos del paréntesis anterior frente a los dos primeros (dado que z figura siempre en el denominador y elevada a exponentes cada vez más grandes). En ese caso, podemos escribir que:

$$(R^2+z^2)^{1/2} \approx z + \frac{R^2}{2z}$$

Con lo que el término entre paréntesis de (4c) quedaría como:

$$\left(1-\frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right) \approx \left((1-\frac{z}{z+\frac{R^2}{2z}}\right)=\left(1-\frac{2z^2}{2z^2+R^2}\right)=\left(\frac{R^2}{2z^2+R^2}\right)$$

Sustituyendo ahora en (4c):

$$\vec{E} == K\cdot\frac{Q}{R^2}\cdot 2\cdot\left(\frac{R^2}{2z^2+R^2}\right)\cdot\vec{u}_z$$

Finalmente, simplificando y despreciando R^2 frente a $2z^2$, obtenemos que:

$$\vec{E} == K\cdot\frac{Q}{z^2}\cdot\vec{u}_z \qquad (6)$$

La expresión obtenida, coincide, como habíamos supuesto, con la correspondiente a la intensidad del campo eléctrico generado por una carga puntual a una distancia z de la misma.

b) Determinación del potencial eléctrico.

Para obtener el potencial del campo eléctrico en el mismo punto A, seguiremos la misma estrategia que hemos utilizado con la intensidad del campo eléctrico. De acuerdo con ello, y teniendo en cuenta el resultado obtenido en el problema 5 anterior, tendremos que para cada elemento de carga dQ (anillo), su contribución al potencial en A será:

$$dV = K\cdot\frac{dQ}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

Con lo que el potencial en A debido a todo el disco, se obtendrá integrando para los infinitos anillos en que se divide el disco:

$$V=\int dV = K\cdot\int\frac{dQ}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

Teniendo en cuenta que, como ya se ha visto antes, $dQ = \sigma\cdot 2\pi r\cdot dr$

$$V=\int_0^R K\cdot\frac{\sigma\cdot 2\pi r\cdot dr}{(r^2+z^2)^{1/2}} = K\cdot\sigma\cdot 2\pi\cdot\int_0^R (r^2+z^2)^{-1/2}\cdot r\cdot dr$$

Resolviendo la integral anterior:

$$V = K\cdot\sigma\cdot 2\pi\cdot\left[(r^2+z^2)^{1/2}\right]_0^R \quad\rightarrow\quad V = K\cdot\sigma\cdot 2\pi\cdot(\sqrt{R^2+z^2}-z) \qquad (7)$$

También podemos ahora expresar V en función de la carga total Q sustituyendo σ en (7):

$$V = K \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot 2 \cdot (\sqrt{R^2 + z^2} - z) \quad (8)$$

Comprobad que el resultado (8) obtenido (válido para todos los valores positivos de z), se transforma en el correspondiente a una carga puntual Q, cuando se hace la aproximación de considerar z >> R.

Igual que hemos hecho con el campo, usaremos el teorema del binómio para desarrollar $\sqrt{R^2 + z^2}$ y, para valores de z muy grandes, podemos despreciar todos los sumandos frente a los dos primeros, quedando:

$$(R^2 + z^2)^{1/2} \approx z + \frac{R^2}{2z}$$

Y, sustituyendo en (8):

$$V = K \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot 2 \cdot (z + \frac{R^2}{2z} - z) \quad \rightarrow \quad V = K \cdot \frac{Q}{z} \quad (9)$$

Como esperábamos, (9) coincide con la expresión del potencial eléctrico de una carga puntual Q colocada en el centro del disco.

Después de haber resuelto estos dos problemas (5 y 6) podemos plantearnos hacer una comparación entre ambas situaciones.

Comparad la intensidad de campo y el potencial generados en un mismo punto del eje por un anillo cargado (problema 5), por un disco cargado (problema actual, 6) y por una carga puntual situada en el centro, suponiendo que los dos primeros tengan el mismo radio y que todos acumulen la misma carga total, Q.

Si pensamos que una misma carga Q se puede distribuir toda ella en el anillo, repartirse por toda el área del círculo que conforma el disco o concentrarse en el punto central de ambos, nos damos cuenta inmediatamente de que tanto la intensidad del campo eléctrico como el valor del potencial, han de aumentar a medida que se dispone de más carga cerca de dicho centro, ya que la distancia de esa carga al punto A disminuye a medida que esto ocurre. Por tanto, en la situación planteada (recordemos disco y anillo cargados positivamente) se ha de cumplir que:

Para un mismo valor de la carga total Q (suponiendo que Q > 0) en cualquier punto del eje z (como el punto A), habrá de cumplirse que:

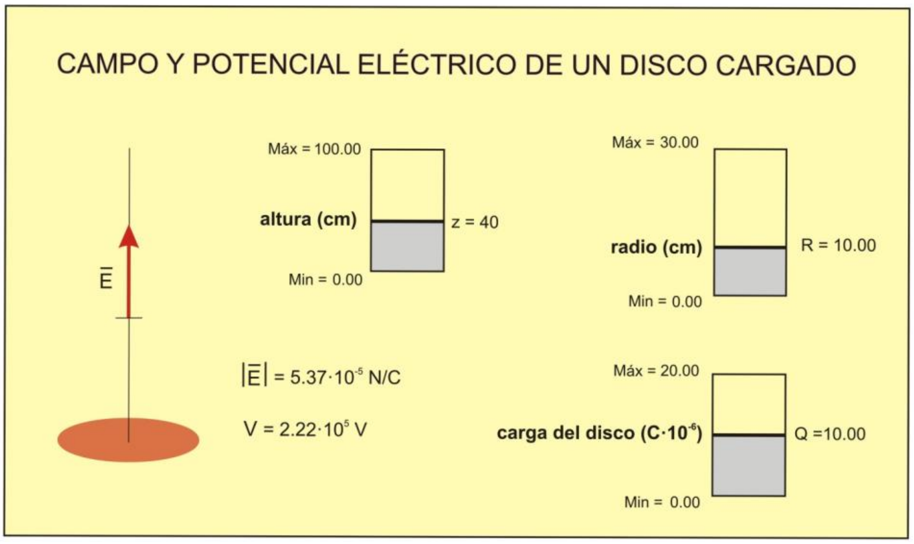
$V_{anillo} < V_{disco} < V_{centro}$

Y, también:

$E_{anillo} < E_{disco} < E_{centro}$

En el caso del campo eléctrico, además de que su intensidad depende de la inversa del cuadrado de la distancia, ocurre que a medida que la carga que crea dicho campo en el eje z se aproxime al centro, el vector que representa al campo en el punto A se inclinará menos en la dirección horizontal, por lo que la resultante (componente vertical) también tendrá que ser mayor.

Hemos elaborado una animación informática para este problema, relativo al disco, semejante a la anterior sobre el problema relativo al anillo.



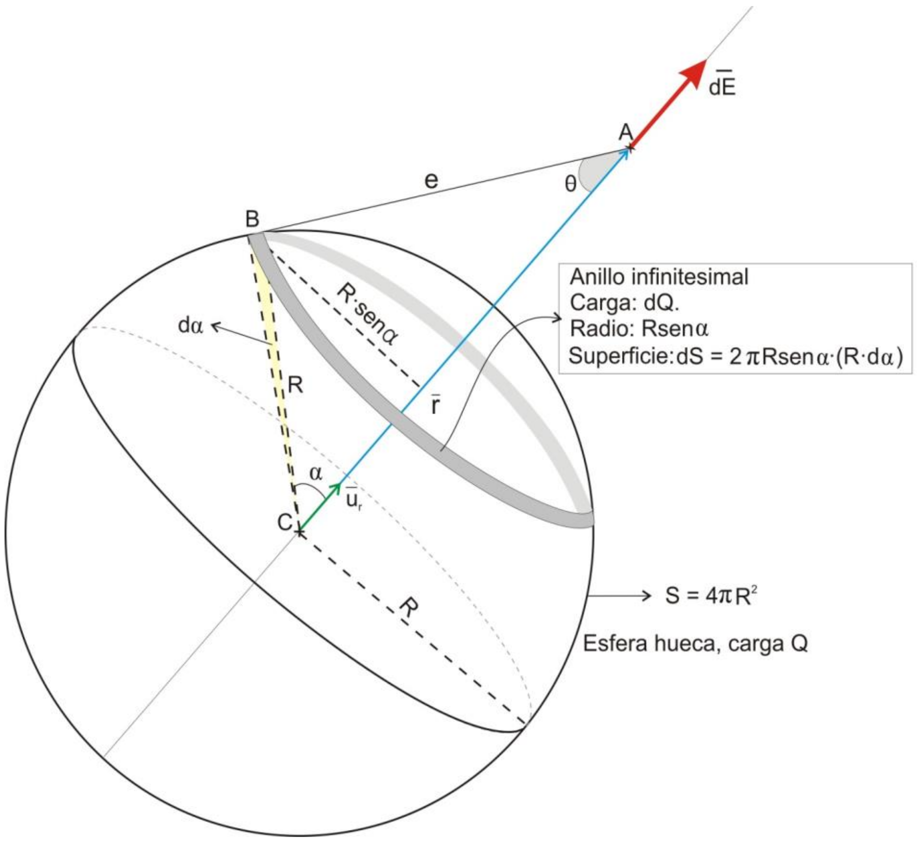
Disponible también en la web de la Sección Local de Alicante de la Real Sociedad Española de Física (http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm).

7. Dada una superficie esférica de radio R, cargada con una carga Q (positiva) uniformemente distribuida por la misma, se pide:

a) Intensidad del campo eléctrico generado por la esfera en un punto A situado a una distancia r de su centro C.
b) Potencial eléctrico en el mismo punto A.

Para resolver este ejercicio podemos imaginar a la esfera hueca cargada homogéneamente con una carga Q positiva, como una serie de infinitos anillos a cada uno de los cuales le corresponderá una carga dQ. Para realizar esta descomposición basta con cortar la capa esférica con planos infinitamente próximos y perpendiculares a la recta que une el centro O de la esfera con el punto A (situado a una distancia r del mismo) en el cual queremos hallar la intensidad del campo eléctrico resultante $\vec{E}$ creado por la esfera. Cada uno de dichos anillos contribuye generando en A una intensidad $d\vec{E}$

Supondremos, para comenzar, que el punto A se halla en el exterior de la esfera, tal y como se indica en la figura siguiente, en la que hemos representado la esfera y uno de esos anillos:



Conviene darse cuenta de que la anchura del anillo representado equivale a la longitud del arco que abarca el ángulo dα (sombreado en amarillo en la figura), es decir: R·dα, y que su longitud viene dada por la longitud de su circunferencia, es decir: 2πRsenα, de manera que para hallar la superficie del anillo, basta imaginar que lo cortamos y formamos con él un rectángulo de lados 2πRsenα y R·dα.

a) De acuerdo con el ejercicio 5 resuelto anteriormente, podremos expresar $d\vec{E}$ como:

$$d\vec{E} = K \cdot \frac{dQ}{e^2} \cdot \cos\theta \cdot \vec{u}_r$$

Expresando ahora la carga dQ en función de la densidad superficial de carga del anillo (de radio Rsenα y superficie dS = 2 π· Rsenα·R·dα), tendremos que:

$$d\vec{E} = K \cdot \frac{\sigma \cdot dS}{e^2} \cdot \cos\theta \cdot \vec{u}_r = K \cdot \frac{\sigma \cdot (2\pi R sen\alpha) \cdot (R \cdot d\alpha)}{e^2} \cdot \cos\theta \cdot \vec{u}_r = K \cdot \frac{\sigma \cdot 2\pi R^2 sen\alpha}{e^2} \cdot \cos\theta \cdot d\alpha \cdot \vec{u}_r$$

Para obtener la intensidad del campo eléctrico resultante en el punto A, hay que sumar todos los $d\vec{E}$, es decir, hay que integrar la expresión anterior. Así pues:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int K \cdot \frac{\sigma \cdot 2\pi R^2 sen\alpha}{e^2} \cdot \cos\theta \cdot d\alpha \cdot \vec{u}_r \quad (1)$$

En la integral anterior (en la que todavía no hemos puesto los límites), existen tres variables (e, α y θ) que están relacionadas entre sí, por lo que para poder resolverla hemos de expresarla en función de una sola de ellas. Conviene hacerlo en función de “e” cuyos límites de integración corresponden a r-R (para α = 0) y a R + r (para α = π). Cabe plantearse, pues:

¿Cómo podríamos relacionar α y θ con “e”?

Aplicando el teorema del coseno al triángulo de lados **R**, **e** y **r** de la figura anterior, obtenemos dos ecuaciones:

$e^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cdot\cos\alpha$

$R^2 = r^2 + e^2 - 2re\cdot\cos\theta$

Derivando en la primera ecuación: 2e·de = -2rR·(-senα·dα) = 2rRsenα·dα

Y despejando: $sen\alpha \cdot d\alpha = \frac{e}{rR} \cdot de$ (2)

Despejando cosθ en la segunda ecuación: $\cos\theta = \frac{r^2 + e^2 - R^2}{2re}$ (3)

Sustituid las expresiones (2) y (3) en la ecuación (1) anterior y proceded a resolver la integral

$$\vec{E}=\int d\vec{E}=\int K\cdot\frac{\sigma\cdot 2\pi R^2 sen\alpha}{e^2}\cdot\cos\theta\cdot d\alpha\cdot\vec{u}_r=\int_{r-R}^{r+R}K\cdot\frac{\sigma\cdot 2\pi R^2}{e^2}\cdot\left(\frac{e}{rR}\cdot de\right)\cdot\left(\frac{r^2+e^2-R^2}{2re}\right)\cdot\vec{u}_r$$

Podemos ahora sacar fuera de la integral lo que es constante, simplificar y reordenar, con lo que:

$$\vec{E}=\frac{K\cdot\sigma\cdot 2\pi R^2}{2Rr^2}\int_{r-R}^{r+R}\left(\frac{r^2+e^2-R^2}{e^2}\right)\cdot de\cdot\vec{u}_r \quad\rightarrow\quad \vec{E}=\frac{K\cdot\sigma\cdot\pi R}{r^2}\int_{r-R}^{r+R}\left(1+\frac{r^2-R^2}{e^2}\right)\cdot de\cdot\vec{u}_r$$

Resolviendo la integral:

$$\vec{E}=\frac{K\cdot\sigma\cdot\pi R}{r^2}\cdot\vec{u}_r\cdot\left[e-\frac{r^2-R^2}{e}\right]_{r-R}^{r+R} \qquad (4)$$

Operando con los límites: $\vec{E}=\frac{K\cdot\sigma\cdot\pi R}{r^2}\cdot\vec{u}_r\cdot 4R \quad\rightarrow\quad \vec{E}=\frac{K\cdot\sigma\cdot 4\pi R^2}{r^2}\cdot\vec{u}_r$

Sustituyendo ahora σ por $Q/4\pi R^2$ en el resultado anterior, obtenemos finalmente que:

$$\boxed{\vec{E}=K\cdot\frac{Q}{r^2}\cdot\vec{u}_r}$$

Analizad el resultado final obtenido

La expresión final obtenida nos dice que toda superficie esférica cargada de tal forma que esa carga se halle distribuida homogéneamente se comporta, en cuanto a la intensidad del campo eléctrico que genera en un punto exterior a la misma, como si toda esa carga estuviese concentrada en el centro de dicha esfera.

En el caso particular de que el punto estuviese situado sobre la misma superficie la esfera, bastaría sustituir, en la expresión anterior, r por el radio de la misma R.

Este resultado es muy importante, porque nos muestra que podemos tratar a una esfera cargada homogéneamente como una carga puntual (con todas las ventajas que ello tiene). Si lo pensamos un poco, nos podemos dar cuenta de que ello es así como consecuencia de la geometría que tiene la forma esférica, la cual es totalmente simétrica en el espacio tridimensional. Como consecuencia de ello, el campo eléctrico que genera la esfera cargada se dispone radialmente en el espacio circundante a ella y el módulo de la intensidad de dicho campo es igual en todos aquellos puntos, en el espacio exterior a la esfera, que se encuentren a la misma distancia del centro. Puesto que esto se ha de cumplir independientemente de cuál sea el radio R de la esfera cargada, es inevitable concluir que dicha intensidad del campo eléctrico no puede depender del radio de la esfera y sí depende, en cambio, directamente de la distancia entre el punto en cuestión y el centro de la esfera.

Podemos ahora ir un poco más lejos y preguntarnos cuanto valdría el campo eléctrico resultante en cualquier punto situado en el interior de la esfera.

En cualquier punto situado en el interior de la esfera, se cumplirá que r (distancia al centro de la esfera) será menor que R (radio de la esfera). Por tanto, los límites de integración serán ahora, desde R-r hasta R+r.

Para facilitar una visión global de la situación, hemos procedido a hacer un esquema gráfico (figura 2) en el que vemos un plano frontal de la esfera. En dicho esquema se han incluido tres de los infinitos anillos en que consideramos descompuesta la esfera. El anillo 1 está muy cerca de P, de modo que la longitud e será tanto más parecida a R-r cuanto más nos aproximemos a P. Análogamente, en el anillo 3 el valor de e es cercano al valor R+r. Si nos vamos desplazando más hacia Q (anillos cada vez más pequeños) la e correspondiente va aumentando hasta que en un anillo centrado en Q y de radio infinitesimal (no indicado en el esquema), podremos admitir que e = R+r.

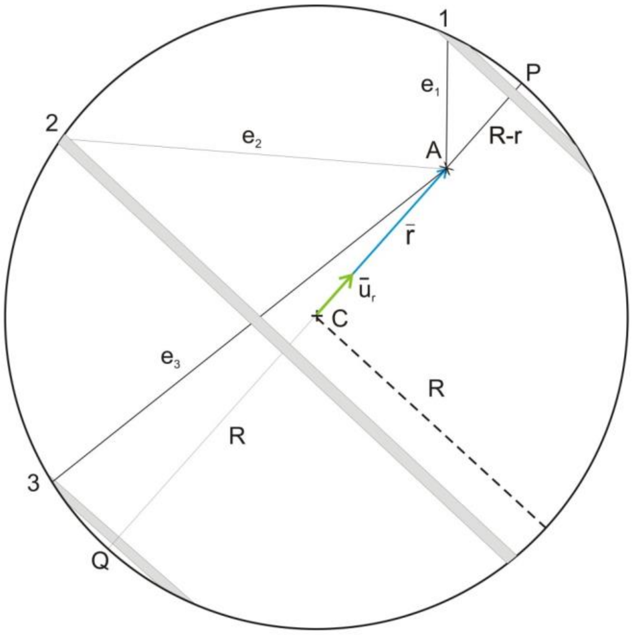


Figura 2

Si sustituimos los límites de la ecuación (4) por estos nuevos límites, obtendremos el resultado buscado. En efecto:

$$\vec{E} = \frac{K \cdot \sigma \cdot \pi R}{r^2} \cdot \vec{u}_r \cdot \left[e - \frac{r^2 - R^2}{e} \right]_{R-r}^{R+r}$$

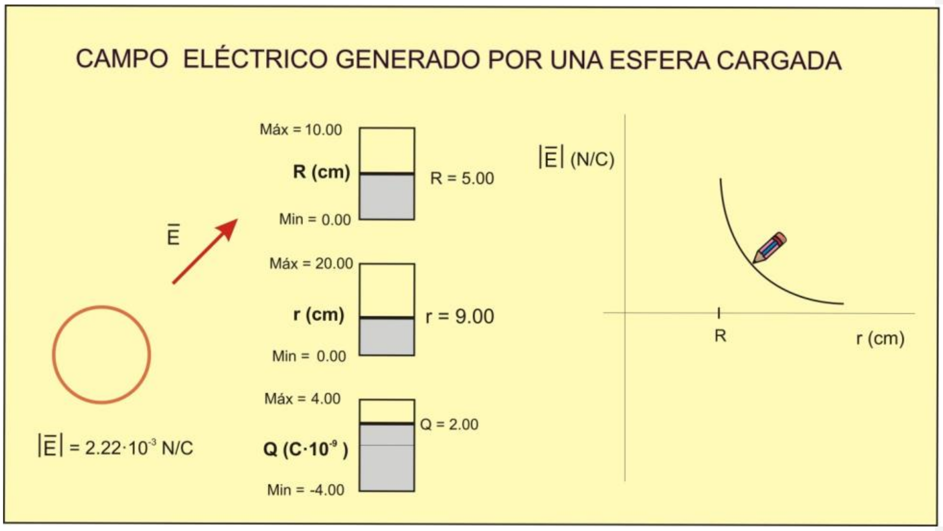
$$\vec{E} = \frac{K \cdot \sigma \cdot \pi R}{r^2} \cdot \vec{u}_r \cdot \left[\left((R+r) - \frac{r^2 - R^2}{(R+r)} \right) - \left((R-r) - \frac{r^2 - R^2}{(R-r)} \right) \right]$$

$$\vec{E} = \frac{K \cdot \sigma \cdot \pi R}{r^2} \cdot \vec{u}_r \cdot (2R - 2R) = 0$$

Se trata de una conclusión muy importante:

El campo eléctrico en el interior de una esfera hueca y cargada es nulo. Esto implica que cualquier pequeña carga de prueba situada en su interior, no se vería sometida a ninguna fuerza eléctrica resultante. La esfera actúa, por tanto, hacia dentro de sí como "aislante" del campo que ella misma crea en el exterior.

Para reforzar estos conceptos se puede usar una animación informática *Modellus*, que calcula y representa en campo eléctrico generado por la esfera cargada. Se pueden modificar todos los parámetros (incluyendo la posibilidad de que la carga sea positiva o negativa, de que r sea mayor o menor que R, etc.) y ver cómo influyen en el resultado. Para un determinado valor del resto de variables, se puede ir modificando poco a poco la distancia r y, entonces, en la pantalla de la animación también se va dibujando la gráfica de la intensidad del campo eléctrico con respecto a esa distancia.



La animación está disponible en la web de la Sección Local de Alicante de la Real Sociedad Española de Física (http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm).

b) *Sugerid y llevad a cabo un procedimiento para calcular el potencial eléctrico en los dos puntos que acabamos de considerar para la intensidad del campo (exterior e interior de la esfera).*

Para obtener el potencial podemos utilizar un procedimiento análogo al que hemos seguido para el campo eléctrico, es decir, consideraremos en primer lugar el potencial en un punto A debido a un anillo de carga infinitesimal y después sumaremos todas las contribuciones debidas a los infinitos anillos de este tipo que forman la capa esférica.

El potencial correspondiente a uno de los anillos de carga dQ en un punto A (ved ejercicio 5) será:

$$dV = K \cdot \frac{dQ}{e}$$

de forma que el que se debe a toda la esfera se podrá obtener como: $V = \int K \cdot \frac{dQ}{e}$

Se trata ahora de *resolver esa integral.*

Para ello, hemos de reducir las dos variables a una sola. Como ya hemos visto, dQ = σ·dS siendo σ = Q/S = Q/4πR^2 y dS = 2π (Rsenα)·R·dα. Con lo que para un punto A exterior a la capa esférica nos quedará:

$$V = \int K \frac{dq}{e} = \int_0^{\pi} \frac{K \cdot \sigma \cdot 2\pi(Rsen\alpha) \cdot R \cdot d\alpha}{e} = K\sigma 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \frac{sen\alpha \cdot d\alpha}{e}$$

Para resolver la integral basta tener en cuenta la ecuación (2) anterior

($sen\alpha \cdot d\alpha = \frac{e}{rR} \cdot de$) y que "e" varia entre r-R y r+R

Con lo que: $V = K\sigma 2\pi R^2 \int_{r-R}^{r+R} \left(\frac{1}{rR}\right) \cdot de$ (5)

Y resolviendo la integral: $\frac{K\sigma 2\pi R^2}{rR} \cdot [e]_{r-R}^{r+R} = \frac{K\sigma 2\pi R}{r} \cdot 2R = \frac{K\sigma 4\pi R^2}{r}$

Sustituyendo ahora σ·4πR^2 por la carga total Q de la esfera, obtenemos finalmente que el potencial en cualquier punto A exterior viene dado por:

$$V = K \cdot \frac{Q}{r}$$

Analizad el resultado final obtenido

La expresión final obtenida nos dice (como no podía ser de otro modo), que toda superficie esférica cargada de tal forma que esa carga se halle uniformemente distribuida, también se comporta, en cuanto al potencial del campo eléctrico que genera en un punto exterior a la misma, como si toda esa carga estuviese concentrada en el centro de dicha esfera.

En el caso de que el punto esté situado sobre la misma superficie de la esfera, bastará sustituir, en la expresión anterior, r por el radio de la misma R.

Calculad V para el caso de un punto situado en el interior de la esfera (r < R).

El procedimiento será el mismo, pero los límites de la integral cambiarán siendo en este caso, como ya hemos visto anteriormente, desde R-r hasta R+r. U*tilizando estos límites en la ecuación (5) anterior*, obtenemos:

$$V = K\sigma 2\pi R^2 \int_{R-r}^{R+r} \left(\frac{1}{rR}\right) \cdot de = \frac{K\sigma 2\pi R^2}{rR} \cdot (2r)$$

Y sustituyendo σ = Q/4πR^2 llegamos finalmente el potencial buscado: $V = K \cdot \frac{Q}{R}$

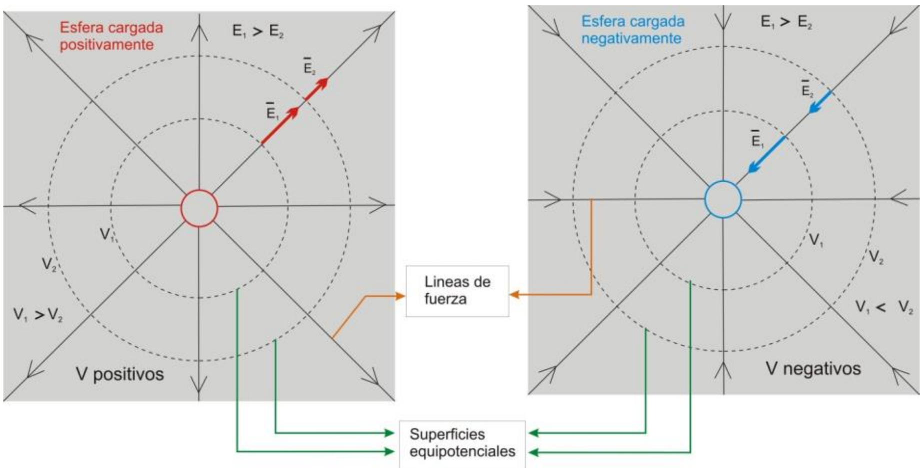
Esta última expresión, se puede aplicar a cualquier punto del interior de la esfera sea cual sea la distancia a que se encuentre del centro.

Los resultados anteriores nos indican que:

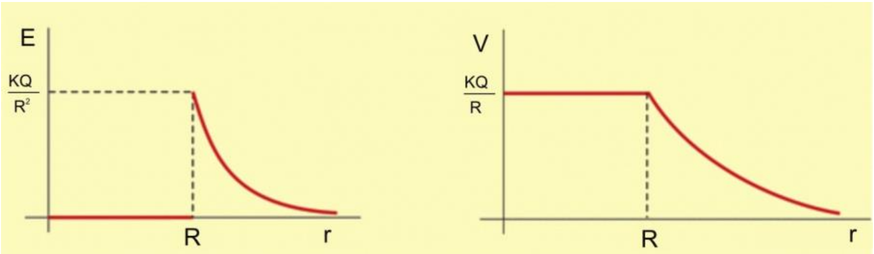
-En todo el volumen interior de la esfera conductora, el potencial es el mismo (constante) y su valor en cualquier punto coincide con el que existe en la superficie de la esfera.

-La superficie de la esfera (homogéneamente cargada) es una superficie equipotencial.

Estas conclusiones tienen una gran importancia y se dan en todos los conductores cargados y en equilibrio, aunque no sean esféricos ni huecos. Se trata, por otra parte, de conclusiones que se pueden explicar de forma cualitativa ya que si en el propio conductor hubiese dos puntos a diferente potencial, las cargas se desplazarían por acción del campo que existiría entre esos puntos. Además, la simetría que presenta esta situación problemática, junto con la consideración de la relación que existe entre el campo eléctrico y el potencial implican que, en este caso, cualquier esfera concéntrica de radio $r > R$ ha de ser una superficie equipotencial. El campo eléctrico que genera la esfera en el exterior ha de atravesar perpendicularmente a estas superficies equipotenciales y orientarse de modo que vaya de mayor a menor potencial (recordemos que, como se indica en el enunciado la esfera está cargada positivamente). Por tanto, la superficie de la esfera no es cualquier superficie equipotencial, sino aquella en la que el potencial eléctrico es máximo. Si la esfera estuviese cargada negativamente las líneas de fuerza que representan el campo eléctrico también atravesarán perpendicularmente a todas esas superficies equipotenciales pero, en este caso, se orientarán de mayor a menor potencial, es decir, hacia el centro de la esfera y el potencial en la superficie será mínimo (máximo en valor absoluto). Así pues, en el primer caso (esfera cargada positivamente) la esfera actúa como "fuente" de líneas de fuerza que salen radialmente de la superficie de la misma (V máximo) y se dirigen hacia el infinito ($V = 0$), mientras que en el segundo caso (esfera cargada negativamente) esta actúa como sumidero de líneas de fuerza, las cuales se dirigen radialmente desde el infinito ($V = 0$) hacia su superficie (V mínimo). En la figura siguiente hemos representado estas dos posibilidades.

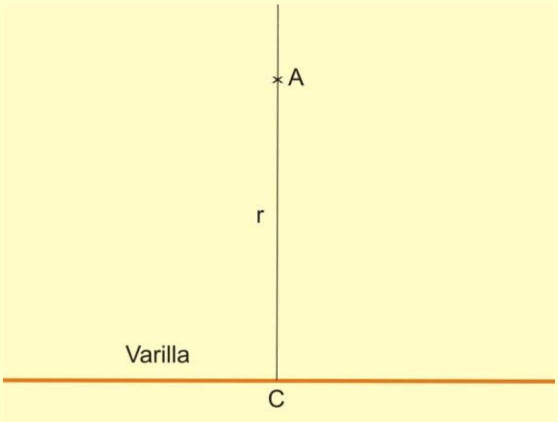


Podemos *"visualizar" las conclusiones anteriores, representando de forma cualitativa las gráficas de la intensidad del campo eléctrico y del potencial, en función de la distancia r desde el centro de la esfera cargada positivamente, hasta el punto donde queramos evaluarlos*:



Para terminar estos cálculos del campo y potencial eléctricos generados por distribuciones continuas de carga, nos plantearemos el caso de que dicha distribución sea rectilínea.

8. Dada una varilla recta de longitud L, cargada con una carga Q (positiva) uniformemente distribuida por la misma, se pide:



Intensidad del campo eléctrico generado por la carga de la barra en un punto A situado en el eje que atraviesa perpendicularmente a la varilla por su centro C.

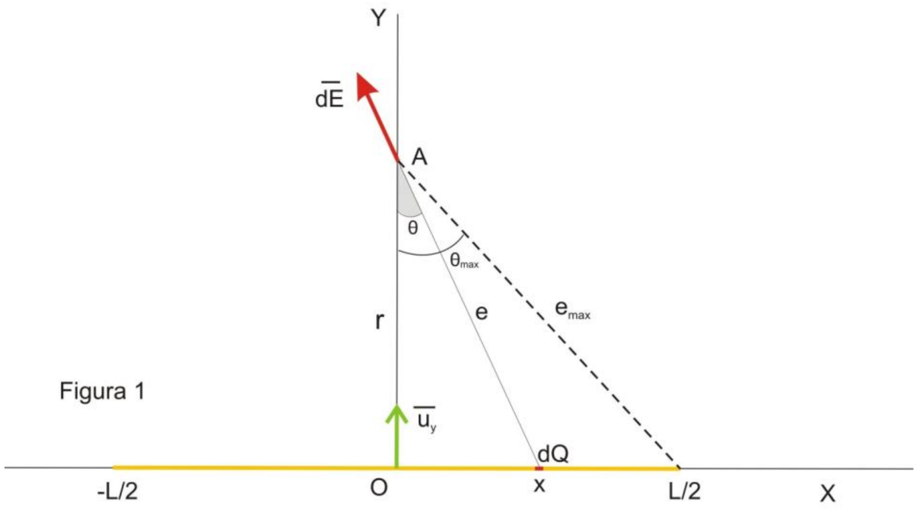
Supondremos el grosor de la varilla despreciable frente a su longitud y que, por tanto, podemos considerarla lineal. Como la carga Q de la varilla no es puntual, podemos realizar las mismas consideraciones que se hicieron para otras distribuciones continuas de carga y considerarla compuesta por segmentos infinitesimales, de longitud dL, tales que en cada uno de ellos habría una carga dQ que sí podría considerarse como puntual. A continuación, se trataría de hallar la expresión del campo eléctrico $d\vec{E}$ correspondiente a cada dQ (en el punto A considerado) y finalmente obtener $\vec{E}$ como la suma (integral) de todos los $d\vec{E}$.

La densidad lineal de carga será:

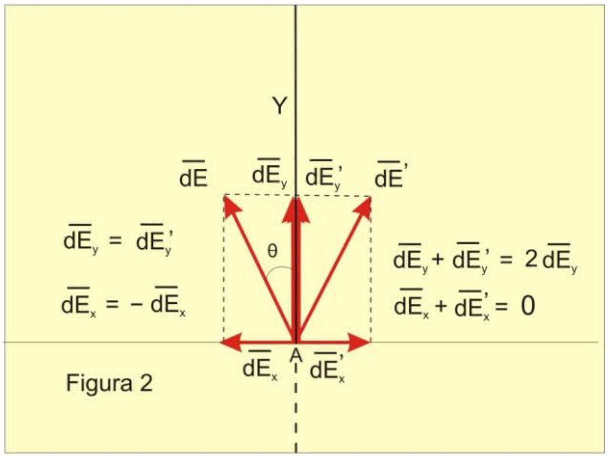
$$\lambda = \frac{Q}{L}$$

Con lo que cada carga dQ se podrá expresar como $dQ = \lambda \cdot dL$

En la figura 1 siguiente podemos ver el vector intensidad del campo eléctrico generado en el punto A por uno de tales elementos de carga dQ. Hemos escogido un sistema de coordenadas cartesianas XY con origen en el centro de la varilla. Supondremos que el punto A, en el que deseamos obtener la intensidad del campo eléctrico generado por la varilla, se halla a una distancia “r” del centro de la misma. La distancia entre el elemento dQ considerado y el punto A, se ha simbolizado (como venimos haciendo en problemas anteriores) por “e”, siendo (x , 0) las coordenadas de dicho elemento de carga.



Por la simetría de la figura 1 es fácil darse cuenta de que el vector $\vec{E}$ resultante en el punto A, se encontrará sobre el eje y se orientará hacia arriba, ya que para cualquier dQ situada a la derecha de O, siempre habrá otra igual situada a la izquierda y a la misma distancia de O, de tal forma que si descomponemos cada $d\vec{E}$ en sus vectores componentes cartesianos, los vectores según el eje X se anularán entre sí, mientras que los situados sobre el eje Y tendrán ambos la misma dirección y sentido, tal y como se muestra en la figura 2 siguiente:



Por tanto: $\vec{E} = \int d\vec{E}_y$

Sugerid un posible procedimiento para obtener la intensidad del campo eléctrico en A y llevadlo a cabo.

Hemos visto anteriormente que $\vec{E} = \int d\vec{E}_y = \int dE_y \cdot \vec{u}_y$

Podemos resolver el problema si somos capaces de calcular esta integral.

Para ello, de la figura 2, podemos ver que: dEy = dE·cosθ

Sustituyendo dE en la igualdad anterior, queda: $dE_y = K \cdot \frac{dQ}{e^2} \cdot \cos\theta$

Con lo que: $\vec{E} = \int d\vec{E}_y = \int K \cdot \frac{dQ}{e^2} \cdot \cos\theta \cdot \vec{u}_y$ (1)

En la integral anterior, existen tres variables (Q, e y θ), por lo que *hay que buscar una forma de reducir todo a una sola variable*.

Podemos expresar dQ en función de la densidad de carga lineal (que es constante): dQ = λ·dL o, lo que es equivalente (dado que la varilla se halla sobre el eje X): dQ = λ·dx

Por otra parte, en la figura 1, vemos que x = r·tgθ → $dx = r \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot d\theta$

También vemos que e = r/cosθ → $e^2 = (r/\cos\theta)^2$

Teniendo todo esto en cuenta, podemos ya resolver la integral de la ecuación (1) poniendo todo en función del ángulo θ. Además, para facilitar el cálculo, en lugar de considerar toda la longitud de la barra, nos limitaremos a integrar desde su centro hasta L/2 y multiplicar por 2 el resultado. Con todo ello:

$$\vec{E} = \int d\vec{E}_y = \int K \cdot \frac{dQ}{e^2} \cdot \cos\theta \cdot \vec{u}_y$$

$$\vec{E} = 2 \cdot \int_0^{\theta_{max}} K \cdot \frac{\lambda \cdot (r/\cos^2\theta)}{r^2/\cos^2\theta} \cdot \cos\theta \cdot d\theta \cdot \vec{u}_y$$

En la ecuación anterior, θ_{max} corresponde al valor de θ cuando dQ coincide con el extremo derecho de la barra.

Simplificando y sacando lo que es constante fuera de la integral, obtenemos:

$$\vec{E} = 2 \cdot \frac{K \cdot \lambda}{r} \int_0^{\theta_{max}} \cos\theta \cdot d\theta \cdot \vec{u}_y = 2 \cdot \frac{K \cdot \lambda}{r} [sen\theta]_0^{\theta_{max}} \cdot \vec{u}_y$$

De la figura 1 vemos que: $sen\theta_{max} = \frac{L/2}{e_{max}} = \frac{L/2}{\sqrt{(L^2/4) + r^2}}$

con lo que:

$$\vec{E} = 2 \cdot \frac{K \cdot \lambda}{r} (sen\theta_{\max} - sen0) \cdot \vec{u}_y = 2 \cdot \frac{K \cdot \lambda}{r} \cdot \left(\frac{L/2}{\sqrt{(L^2/4) + r^2}} \right) \cdot \vec{u}_y$$

o, lo que es equivalente: $$\vec{E} = \frac{2 \cdot K \cdot \lambda}{r} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 4 \cdot (r/L)^2}} \right) \cdot \vec{u}_y \qquad (1)$$

Sustituyendo λ en el resultado anterior, obtenemos finalmente que:

$$\vec{E} = \frac{2 \cdot K \cdot Q}{r \cdot L} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 4 \cdot (r/L)^2}} \right) \cdot \vec{u}_y \qquad (2)$$

El resultado obtenido (en cualquiera de las dos formas en que lo hemos expresado), es, como se puede comprobar, dimensionalmente homogéneo (unidades de N/C en ambos lados de la ecuación). También nos permite ver qué sucedería en algunos casos particulares de especial interés:

Obtened el campo generado por la varilla para el caso en que el punto A esté muy próximo a ella, es decir, para $r << L$.

Para hacerlo, basta considerar que, en ese caso, el término $4 \cdot (r/L)^2$ se podrá despreciar frente a 1. Si hacemos esto en la ecuación (1), el resultado se transforma en:

$$\vec{E} = \frac{2 \cdot K \cdot \lambda}{r} \cdot \vec{u}_y \qquad (3)$$

En muchos casos, se suele expresar la constante K como $K = 1/4\pi\varepsilon_0$, de manera que lo más habitual es encontrar este último resultado en la forma:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r} \cdot \vec{u}_y \qquad (4)$$

El resultado expresado mediante la ecuación (4) es el que figura en la mayor parte de los textos. El vector unitario puede estar representado mediante otro símbolo, pero lo importante es resaltar que el vector campo eléctrico en la situación considerada, es perpendicular a la varilla.

Sugerid otras formas de obtener el resultado (4) anterior y llevadlas a cabo

Vale la pena darse cuenta de que hubiésemos llegado al mismo resultado si, directamente, en la ecuación (2) hubiésemos hecho L = ∞, puesto que una separación infinitamente pequeña entre el punto A y la varilla, equivale en la práctica a una varilla de longitud infinita. En efecto, sustituyendo L por ∞ en la ecuación (1):

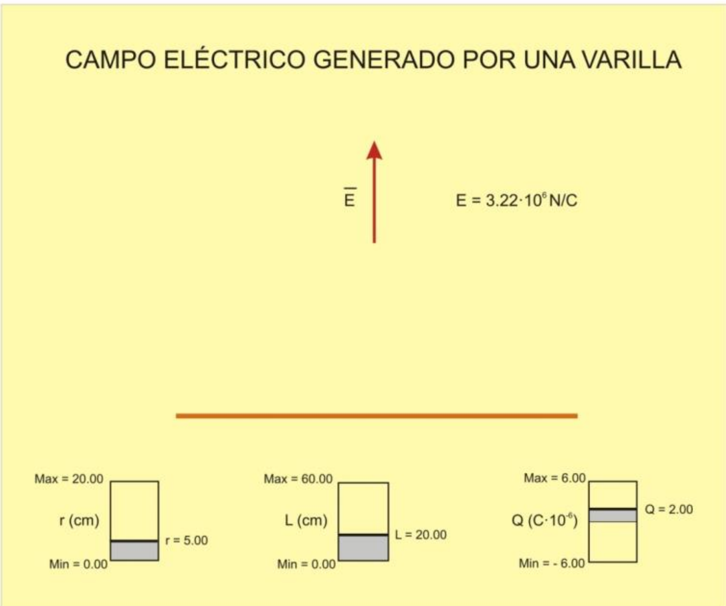
$$\vec{E} = \frac{2 \cdot K \cdot \lambda}{r} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1+0}} \right) \cdot \vec{u}_y = \frac{2 \cdot K \cdot \lambda}{r} \cdot \vec{u}_y$$

Otra forma de llegar a este mismo resultado es cambiando los límites de integración, de forma que θ_{max} sería ahora $\pi/2$, con lo cual, el cálculo se modificaría de la siguiente forma:

$$\vec{E} = 2 \cdot \frac{K \cdot \lambda}{r} (sen \frac{\pi}{2} - sen\ 0) \cdot \vec{u}_y = 2 \cdot \frac{K \cdot \lambda}{r} \cdot \vec{u}_y$$

Y sustituyendo ahora K, obtenemos: $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \cdot r} \cdot \vec{u}_y$

Para este problema también se puede usar una animación informática *Modellus*, que calcula y representa en campo eléctrico generado por la varilla cargada. Se pueden modificar todos los parámetros (incluyendo la posibilidad de que la carga de la varilla sea positiva o negativa.



La animación está disponible en la web de la Sección Local de Alicante de la Real Sociedad Española de Física (http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm).

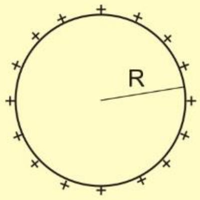
Nota 2:

Los cuatro ejercicios anteriores (problemas 5, 6, 7 y 8) tienen en común el tratarse de distribuciones continuas de carga eléctrica en objetos con elevada simetría (disco, esfera, etc.) y, como se habrá podido apreciar, el cálculo matemático para obtener la intensidad del campo eléctrico en cada caso, es laborioso y presenta una cierta complejidad. Sería, pues, muy útil disponer de un método alternativo más sencillo con el que determinar E. Esto puede hacerse, como veremos a continuación, mediante la aplicación del Teorema de Gauss.

Antes de continuar, conviene, pues, revisar bien el Teorema de Gauss, sabiendo cómo se obtiene y teniendo claro su significado. Para ello, los autores de este trabajo, recomendamos se utilice nuestro libro de texto "Física de 2º de Bachillerato". Concretamente, el tema 6 sobre Campo Eléctrico.

El citado libro de texto puede descargarse libremente en la web: didacticafisicaquimica.es

9. Supongamos una esfera metálica de radio R y cargada positivamente con una carga neta Q.



Aplicad el Teorema de Gauss para obtener el módulo de la intensidad del campo eléctrico en un punto A cualquiera situado a una distancia $r \geq R$ del centro de la esfera.

Por tratarse de una esfera conductora, la carga Q se distribuirá uniformemente por toda su superficie (tanto si se trata de una esfera maciza como si se trata de una esfera hueca), con lo que la densidad superficial de carga será constante y en cualquier punto de dicha superficie valdrá:

$$\sigma = Q/4\pi R^2$$

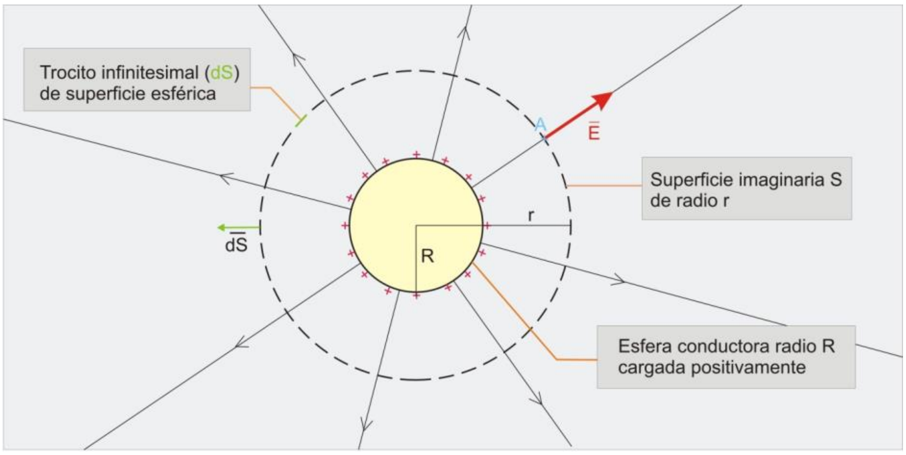
El Teorema de Gauss se puede expresar, en general, mediante la ecuación:

$$\phi = \int d\phi = \int \vec{E} \bullet d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon}$$

En la expresión anterior, ϕ representa el flujo o número (neto) de líneas de fuerza que entran o salen a través de una superficie cerrada que engloba a Q. Dichas líneas corresponden al campo eléctrico creado por la carga Q.

En nuestro caso si el punto A está situado a una distancia $r > R$ del centro de la esfera, para aplicar Gauss, bastará dibujar una superficie esférica imaginaria de radio r concéntrica con la esfera y representar las líneas de fuerza del campo generado por la carga Q uniformemente distribuida en la superficie de la esfera conductora. El vector intensidad del campo eléctrico en A, será entonces un vector tangente a la línea de fuerza que pasa por A y dirigido hacia afuera, tal y como se representa en la figura 1 siguiente.

En la figura 1, la superficie esférica imaginaria (superficie de Gauss) se ha dibujado con línea discontinua. Su superficie total es S y cada uno de los pequeños segmentos que la forman, podría representar una superficie infinitesimal dS. Como sabemos, cada uno de esos elementos dS se puede representar por un vector perpendicular a ella y dirigido de la parte cóncava hacia la convexa. Para mayor claridad en el dibujo, solo hemos dibujado uno de tales vectores (de color verde).



Aplicaremos ahora el teorema de Gauss a la superficie esférica que contiene al punto A, teniendo en cuenta que, debido a la simetría existente, el valor (módulo) de la intensidad del campo en cualquier otro punto de la superficie considerada es el mismo, que su dirección es radial, que su sentido coincide con el de la línea de fuerza, y que $\vec{E}$ y $d\vec{S}$ forman un ángulo de 0º, con lo que:

Comentado [U2]: Sobra un espacio

$$\phi = \int E \cdot dS \cdot \cos 0 = E \cdot \int dS = E \cdot S = E \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{Q}{\varepsilon}$$

Y despejando: $\boxed{E = \dfrac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon}}$

O, lo que es equivalente: $\boxed{E = K \cdot \dfrac{Q}{r^2}}$

¿Cuánto valdrá E en la superficie de la esfera?

Para contestar esta pregunta, podemos imaginar una superficie esférica concéntrica con la esfera metálica, por fuera de ella pero infinitamente próxima, de forma que su radio r sea prácticamente igual a R, con lo que siguiendo los mismos pasos, se llega a que, en ese caso:

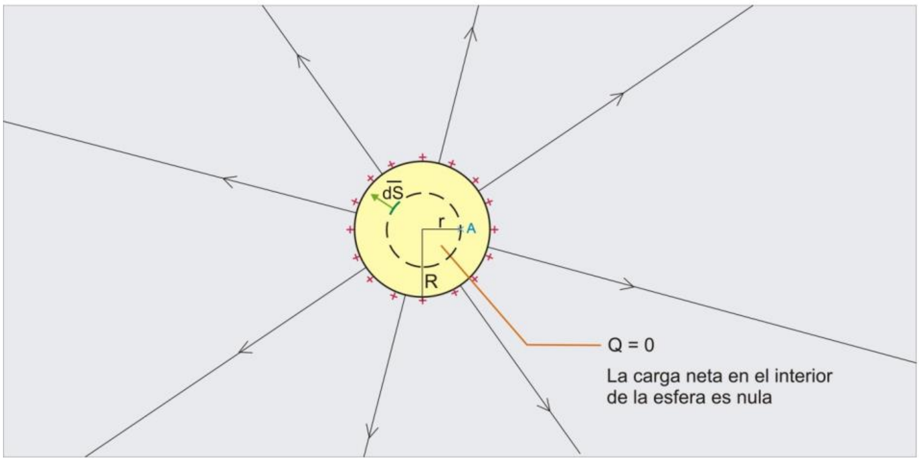
$\boxed{E = \dfrac{Q}{4\pi R^2 \varepsilon}}$ O bien: $\boxed{E = K \cdot \dfrac{Q}{R^2}}$

Como puede verse, los resultados obtenidos son los mismos que los que se obtuvieron en el problema 7, por un procedimiento más largo y complejo e, igual que allí, permiten concluir que:

Una esfera homogéneamente cargada con una carga neta Q, a efectos de campo eléctrico, para distancias iguales o mayores que su radio R, equivale a una carga puntual del mismo valor Q, situada en su centro.

Utilizad también el teorema de Gauss para obtener E en cualquier punto del interior de la esfera

Podemos pensar en una superficie esférica imaginaria concéntrica con la esfera metálica, por dentro de ella, que contenga al punto en el que queremos hallar el campo eléctrico y hemos de tener en cuenta que no existe carga neta alguna en el interior de la esfera, puesto que las cargas eléctricas que conforman la carga extra comunicada, debido a la repulsión eléctrica y al medio (conductor) se distribuyen homogéneamente separándose entre sí lo más posible hasta que se alcanza una situación de equilibrio electrostático.



El flujo neto que atravesará la superficie esférica punteada será 0, puesto que la carga neta que encierra, también lo es. Por tanto, si aplicamos Gauss, tendremos que:

$$\phi = \int E \cdot dS \cdot \cos 0 = E \cdot \int dS = E \cdot S = E \cdot 4\pi \cdot r^2 = 0 \rightarrow E = 0$$

Es decir, como ya sabíamos (problema 7):

El campo eléctrico en el interior de una esfera conductora homogéneamente cargada es nulo

10. Supongamos una lámina metálica plana e infinita cargada homogéneamente con una carga neta Q positiva y en equilibrio electrostático.

Aplicad el Teorema de Gauss para obtener el módulo de la intensidad del campo eléctrico en un punto próximo a su superficie.

Al tratarse de una lámina conductora, la carga Q se distribuirá uniformemente por toda la superficie con lo que la densidad superficial de carga positiva σ será constante.

El hecho de existir un equilibrio electrostático, indica que toda la carga neta Q se halla uniformemente distribuida en la lámina y en reposo. Por tanto, la intensidad del campo eléctrico será en todo momento, perpendicular a la superficie de dicha lámina, puesto que si no lo fuera, implicaría la existencia de una fuerza eléctrica con una componente paralela a la lámina conductora que provocaría un movimiento de cargas incompatible con la situación de equilibrio.

En la figura 1 siguiente, se ha dibujado una porción de la lámina y unas cuantas líneas de fuerza del campo eléctrico generado por la distribución de carga que existe en ella. Como puede observarse, esas líneas de fuerza son paralelas entre sí y perpendiculares al plano que contiene a la lámina. Cómo es lógico existirá campo eléctrico tanto arriba como debajo de dicho plano. Puesto que las líneas de fuerza son paralelas, la intensidad del campo eléctrico, en la situación descrita, ha de ser constante y no depender de la distancia del punto considerado a la lámina[6].

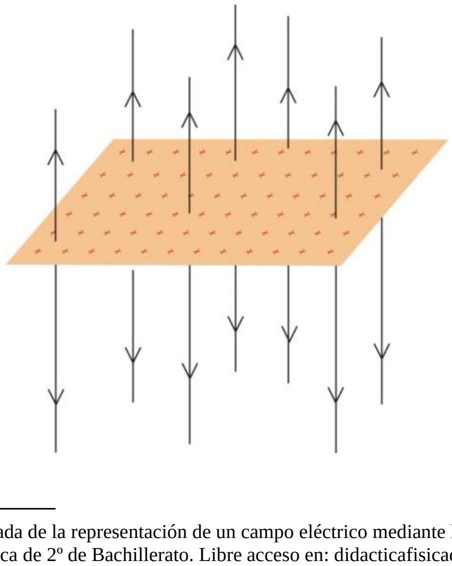


Figura 1

[6] Para una descripción detallada de la representación de un campo eléctrico mediante líneas de fuerza, ved págs. 220-228 de nuestro libro Física de 2º de Bachillerato. Libre acceso en: didacticafisicaquimica.es

Para calcular el valor (módulo) del campo eléctrico, aplicando el teorema de Gauss, dibujamos una superficie cilíndrica infinitesimal, perpendicular a la lámina, tal y como se muestra en la figura 2 siguiente, donde para simplificar se ha representado un corte transversal de la lámina. La superficie gaussiana considerada (sombreada en gris) intersecta a una pequeña porción de la lámina (coloreada en rojo)

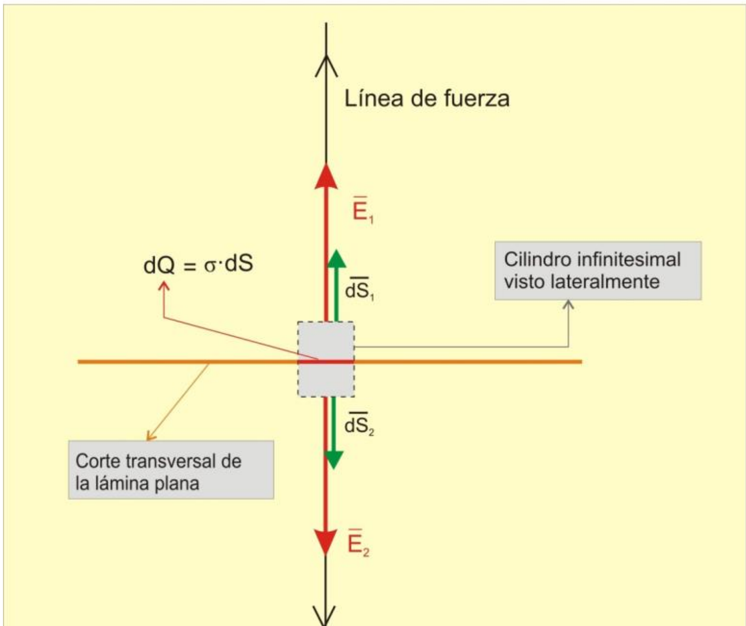


Figura 2

De la simetría de la figura, podemos concluir que $E_1 = E_2 = E$ y que el flujo que atraviesa la superficie lateral del cilindro ($d\phi_L$) es nulo, de modo que solo contribuyen al flujo (y por igual), las bases de dicho cilindro ($dS_1 = dS_2 = dS$).

Aplicando el teorema de Gauss, el flujo electrostático a través de la superficie cilíndrica infinitesimal, vendrá dado por:

$$d\phi = d\phi_1 + d\phi_2 + d\phi_L = \vec{E}_1 \bullet d\vec{S}_1 + \vec{E}_2 \bullet d\vec{S}_2 + 0 = 2E \cdot dS = dQ/\varepsilon$$

Teniendo en cuenta que $dQ = \sigma \cdot dS$ y despejando, obtenemos finalmente que: $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon}$

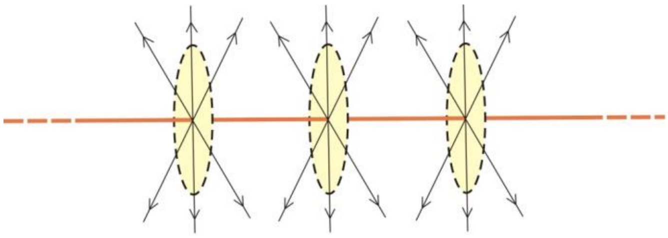
Obsérvese que en el problema 6 se obtuvo el mismo resultado para el caso particular del campo eléctrico generado por un disco plano cuando el punto considerado estaba infinitamente próximo a la superficie del mismo (lo cual es equivalente a una lámina de extensión infinita).

11. Supongamos un hilo conductor rectilíneo e infinito y cargado positivamente con una carga Q uniformemente distribuida a lo largo del mismo. Aplicando el teorema de Gauss, determinad el valor (módulo) de la intensidad del campo eléctrico generado en las proximidades del hilo.

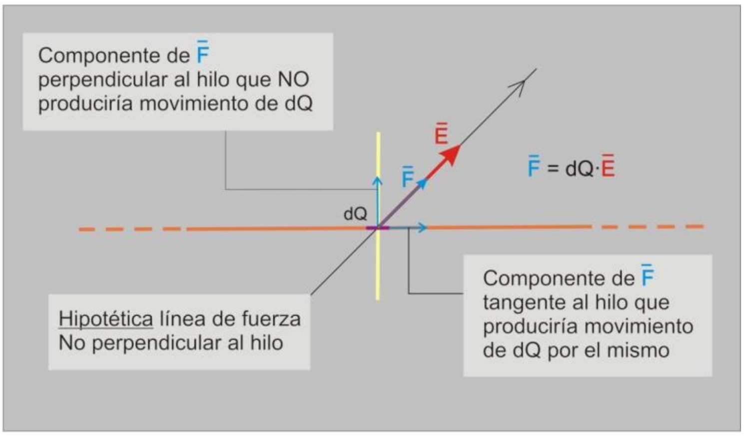
Este problema es similar al planteado en el problema 8, solo que aquí utilizaremos el teorema de Gauss para obtener de forma rápida el valor de E.

Con objeto de poder ignorar el papel de sus extremos, supondremos que el hilo es indefinido, y que se encuentra aislado y en equilibrio electrostático.

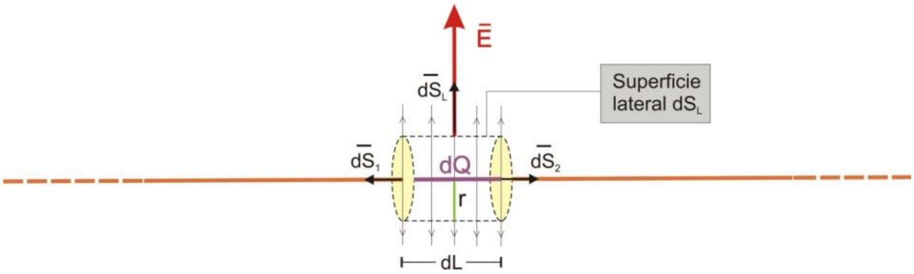
En la situación descrita, las líneas de fuerza han de ser, necesariamente, perpendiculares al hilo y en todas direcciones, tal y como se muestra en la figura adjunta:



Observemos que si las líneas de fuerza no fuesen perpendiculares, ello sería incompatible con la situación de equilibrio electrostático descrita, ya que entonces, sobre cada elemento de carga infinitesimal dQ que se considerase, se ejercería una fuerza tal que una parte de la misma (la componente tangente al hilo), produciría el movimiento de dQ a lo largo del hilo conductor:



Para determinar E, escogemos un trozo infinitesimal del hilo (longitud dL), donde habrá una carga neta dQ y lo rodearemos con una superficie gaussiana apropiada (en este caso, cilíndrica), tal y como se indica en la figura 3 siguiente. En ella, para simplificar, solo hemos dibujado las líneas de fuerza coincidentes con el plano del papel.



El objetivo es utilizar el teorema de Gauss para determinar E a una distancia "r" del hilo.

Analizando la figura anterior, queda claro que en el cilindro infinitesimal considerado como superficie de Gauss (de radio r y longitud dL), el flujo electrostático que atraviesa sus bases es nulo, de manera que solo existe flujo a través de su superficie lateral. Así pues:

$d\phi = d\phi_1 + d\phi_2 + d\phi_L = 0 + 0 + E \cdot dS_L \cdot \cos 0^\circ = dQ/\varepsilon$

Teniendo en cuenta que $dS_L = 2\pi r \cdot dL$ y que $dQ = \lambda \cdot dL$ (siendo λ la densidad de carga lineal en el hilo):

$E \cdot 2\pi r \cdot dL = \lambda \cdot dL/\varepsilon$

Y despejando: $$E = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \varepsilon \cdot r}.$$

Vemos que el resultado coincide con el que se obtuvo en el problema 8 para el caso de una varilla conductora de longitud infinita. Para terminar esta serie de problemas, vale la pena reflexionar sobre esta simplificación en particular.

¿Qué utilidad pueden tener estas suposiciones de varillas y de superficies planas infinitas, si en la realidad no existe tal cosa?

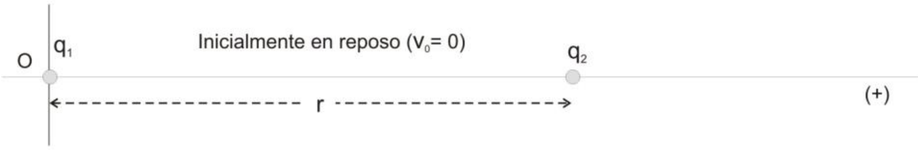
La respuesta a la cuestión anterior es que no solo es útil sino que, además, es un ejemplo claro de cómo se construye el conocimiento científico, partiendo en muchos casos de situaciones ideales en las que se simplifica la realidad para hacer el problema más abordable, y si bien es cierto que no existen láminas con una superficie infinita ni varillas de longitud infinita, también lo es que si nos aproximamos lo suficiente, a una lámina delgada o a un hilo conductor, la situación es equivalente, de modo que, en ese caso, son perfectamente válidas las expresiones obtenidas.

12. Supongamos un sistema formado por dos cargas eléctricas puntuales (q_1 fija, y q_2, que puede moverse), separadas entre sí por una cierta distancia, r.

a) Explicad por qué el sistema tiene energía potencial y razonad cómo cambiará dicha energía potencial cuando se le deje evolucionar, pudiendo moverse libremente la carga q_2.

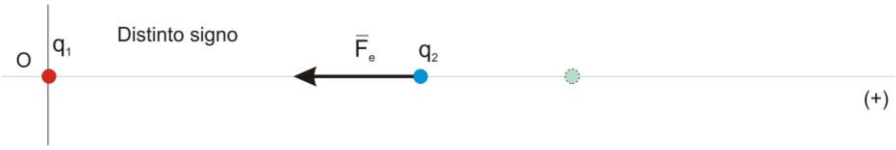
b) A partir de la relación entre trabajo realizado por el campo y energía potencial, obtened la expresión de la variación de energía potencial eléctrica producida cuando q_2 se deja en libertad y se traslada desde un cierto punto A hasta otro punto B.

a) Adoptaremos un Sistema de Referencia con origen en la carga q_1 y supondremos que únicamente interviene la fuerza eléctrica de interacción entre las dos cargas. Consideraremos, bajo estas condiciones, el sistema formado por las dos cargas y por dicha fuerza de interacción eléctrica.



Tal fuerza eléctrica es de atracción entre las cargas si son de signos opuestos y de repulsión si son del mismo signo. Puesto que q_1 está fija, en los dos casos posibles, al dejar en libertad al sistema la fuerza eléctrica producirá una aceleración de la carga q_2, la cual, partiendo del reposo (situación inicial), se moverá en la dirección de la recta que une a ambas cargas.

La carga q_2, se moverá aproximándose con velocidad creciente a la carga q_1 si las dos cargas son de signos opuestos:



Por el contrario, la carga q_2, se moverá alejándose con velocidad creciente de la carga q_1 si las dos cargas son del mismo signo:

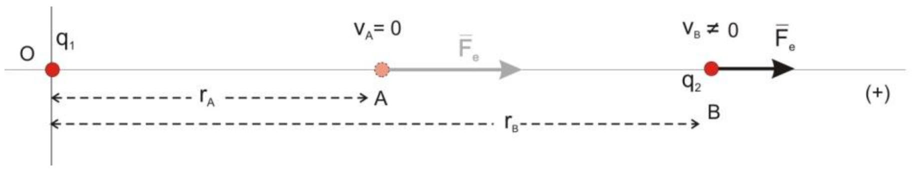
En ambos casos la transformación es espontánea (la provoca la fuerza eléctrica del sistema) e implica un aumento de energía cinética, ya que la carga q_2 va adquiriendo una velocidad cada vez mayor. Como no actúa ninguna fuerza exterior, la energía total del sistema ha de permanecer constante y, por tanto, ese aumento de su energía cinética se ha de producir a costa de una disminución idéntica de energía potencial eléctrica. Es pues evidente, que el sistema tiene energía potencial eléctrica en el estado inicial, ya que, si no fuese así, no podría adquirir energía cinética en esta transformación.

De manera más general, podemos decir que el sistema descrito posee energía potencial, porque a distintos valores de la distancia (r) que separa a las cargas, corresponden distintas "capacidades de realizar trabajo". Esto se pone de manifiesto cuando, al liberar una de las cargas (o las dos), se desencadena un proceso en el que se genera energía cinética (la cual es capaz de producir diversos cambios en otros sistemas). La situación descrita es una transformación espontánea, similar a la que ocurre cuando se libera un resorte inicialmente extendido o inicialmente comprimido. En ambos casos, siempre que no haya fuerzas no conservativas, como las de fricción, el trabajo realizado por la fuerza del sistema produce una disminución de su energía potencial igual al aumento de la energía cinética, lo que, operativamente, indica la siguiente expresión:

$$W = -\Delta Ep$$

Siendo W el trabajo realizado por la fuerza interna conservativa del sistema y Ep su energía potencial.

b) Para comenzar, vamos a suponer que ambas cargas son del mismo signo. En la figura siguiente se ha representado una transformación espontánea en la que la carga q_2 pasa desde un punto A a otro punto B en el seno del campo eléctrico creado por la carga fija q_1.



Queremos saber cuánto cambia la energía potencial del sistema en la transformación considerada.

El trabajo realizado por la fuerza eléctrica se podrá obtener como:

$$W = \int_A^B dW = \int_A^B F_t \cdot dr = \int_A^B K\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot dr = \left[-K\frac{q_1 \cdot q_2}{r}\right]_A^B = \left(K\frac{q_1 \cdot q_2}{r_A}\right) - \left(K\frac{q_1 \cdot q_2}{r_B}\right) \quad (1)$$

Por otra parte, al tratarse de una fuerza conservativa, dicho trabajo estará relacionado con la variación de energía potencial eléctrica, en la forma:

$$W = -\Delta Ep_A^B = -(Ep_B - Ep_A) = (Ep_A - Ep_B) \quad (2)$$

De las expresiones (1) y (2), concluimos que:

$$Ep_A - Ep_B = \left(K \frac{q_1 \cdot q_2}{r_A}\right) - \left(K \frac{q_1 \cdot q_2}{r_B}\right)$$

Y también que, en general, a cada distancia r de separación entre las cargas, le corresponderá una energía potencial eléctrica dada por:

$$Ep = K \frac{q_1 \cdot q_2}{r} + C \quad (3)$$

En la expresión (3) que acabamos de obtener, C es una constante que puede tomar infinitos valores. Por tanto, la Ep, en principio, puede tomar también infinitos valores (tantos como pueda tener C). No obstante, no ocurre lo mismo con ΔEp (al restar $Ep_B - Ep_A$, la constante C, valga lo que valga, se elimina).

Si adoptamos el acuerdo de tomar 0 como el valor de la Ep correspondiente a una separación infinita de cargas, entonces, C = 0, ya que, en ese caso:

$$0 = K \frac{q_1 \cdot q_2}{\infty} + C \rightarrow C = 0$$

Por tanto, con este acuerdo, la energía potencial electrostática del sistema considerado, para cualquier valor de la distancia de separación r vendrá dada por:

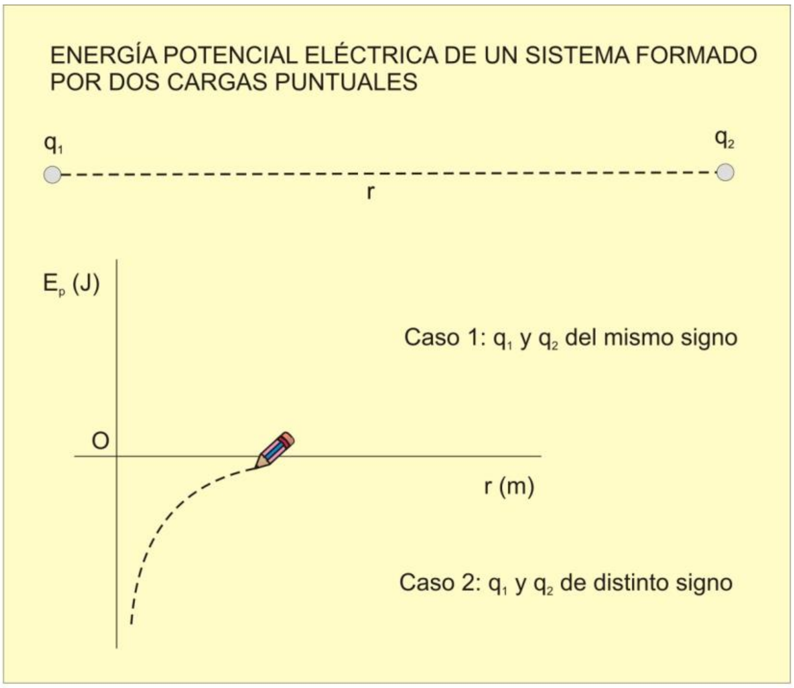
$$\boxed{Ep = K \frac{q_1 \cdot q_2}{r}} \quad (4)$$

La expresión obtenida (para dos cargas del mismo signo), nos informa de que, en ese caso, la energía potencial eléctrica es positiva. Ello es coherente con el hecho de que, partiendo del reposo, el sistema, al dejarlo en libertad, evolucione espontáneamente aumentando la distancia r entre las cargas, disminuyendo la energía potencial, que cada vez será "menos positiva" y llegaría a valer 0 para $r = \infty$.

¿Cuál sería la expresión de Ep para el caso de que las dos cargas tuviesen distinto signo?

Podemos utilizar la misma expresión anterior (4) siempre que al valor de cada carga le coloquemos el signo correspondiente. En ese caso, para dos cargas de distinto signo, la energía potencial electrostática seria negativa. Ello es coherente con el hecho de que partiendo del reposo, el sistema, al dejarlo en libertad, evolucione espontáneamente disminuyendo la energía potencial, que cada vez será "más negativa" conforme r vaya disminuyendo al acercarse las cargas.

Se pueden reforzar estos desarrollos con una animación informática *Modellus* que hemos elaborado para este problema y está disponible en la "Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física", de la Sección Local de Alicante de la Real Sociedad Española de Física (http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm).



Como puede verse en la imagen anterior, dicha animación permite mover a la carga q_2 (colocando el cursor encima de ella) y va representando la gráfica de la energía potencial del sistema que forman las dos cargas eléctricas q_1 y q_2 con respecto a la distancia entre ellas, r. Se puede hacer correr la animación considerando dos casos (cargas de igual signo y cargas de distinto signo). La figura corresponde a lo que se ve en la pantalla para el caso de dos cargas de distinto signo.

Podemos ahora ir un poco más allá y plantear nuevas cuestiones, como las que, a título de ejemplo, se proponen a continuación:

Teniendo en cuenta que, según se ha definido, la Ep para una separación infinita de dos cargas es 0, ¿qué significa la afirmación siguiente?:

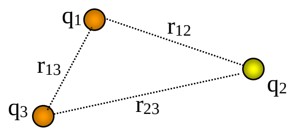
"La energía potencial de una carga q situada en un punto A del campo eléctrico creado por otra carga Q vale 10 J".

En primer lugar, al ser positiva la energía potencial, ambas cargas q y Q son de igual signo. En segundo lugar, si en la expresión $W_F = -\Delta Ep_A^B = -(Ep_B - Ep_A)$ hacemos que B corresponda a una separación infinita de la carga q respecto de la carga Q, sucede que $Ep_B = 0$ con lo que el valor de la Ep_A coincidirá con el del trabajo que realizaría el campo eléctrico cuando esa carga "q" se trasladase desde el punto A hasta el infinito (en este caso 10 J).

También podría razonarse al revés y decir que Ep_A nos informa del trabajo exterior que sería necesario realizar para trasladar q a velocidad constante desde el infinito hasta el punto A (dado que para ello habría que realizar una fuerza exterior igual y de sentido contrario a la fuerza del campo).

En este ejercicio nos hemos limitado a un sistema formado por dos cargas. ¿Cómo se calcularía la Ep correspondiente a un sistema formado por más de dos cargas puntuales?

Supongamos que tenemos un sistema formado por tres cargas puntuales tal y como el que se especifica en la figura adjunta:



La energía potencial del sistema puede obtenerse simplemente sumando las energías potenciales de todas las parejas de cargas distintas que conformen el sistema considerado. En el ejemplo sería:

$Ep_{sis} = Ep_{12} + Ep_{13} + Ep_{23}$

y sustituyendo:

$$Ep_{sis} = K\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + K\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + K\frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

13. Al colocar una pequeña carga q = 10^{-8} C en un punto P dado de un campo eléctrico, se comprueba que el potencial eléctrico del campo en dicho punto es de $3·10^4$ V.

Si en lugar de q se colocase una carga doble ($2·10^{-8}$ C), el valor del potencial eléctrico en ese mismo punto sería de:

a) $3·10^4$ V
b) $1'5·10^4$ V
c) $6·10^4$ V

La respuesta científicamente correcta corresponde a la opción "a", pero es frecuente caer en el error de suponer que lo es la opción "c". Ocurre esto a pesar de que se sabe que, por ejemplo, para el caso más sencillo (campo eléctrico creado por una carga Q que se pueda considerar como puntual), el valor del potencial V que dicha carga genera en un punto situado a una distancia "r", viene dado por la expresión:

$$V = K \cdot \frac{Q}{r}$$

Esta expresión pone en evidencia que el valor de V es independiente de que en el punto P haya o no carga alguna y, a la misma conclusión, se puede llegar también directamente sin más que analizar la definición de potencial del campo eléctrico en un punto:

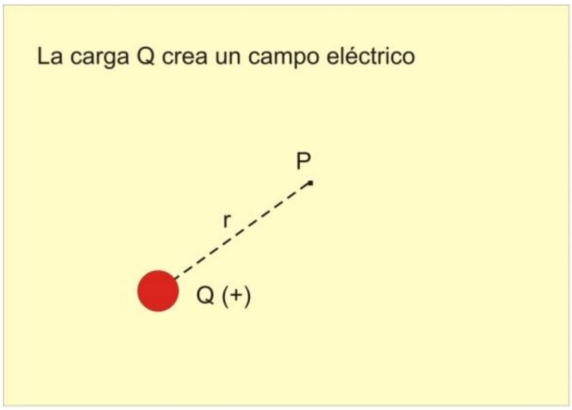
"Una magnitud cuyo valor coincide con el de la energía potencial del sistema si en ese punto se colocase la unidad de carga positiva (q = 1C)".

Es decir: el potencial del campo en un punto dado del mismo es el que es, aunque en dicho punto no exista carga alguna. Si queremos evaluar su valor, basta con colocar una carga testigo q positiva de cualquier valor en ese punto, medir la energía potencial eléctrica Ep y finalmente determinar V como:

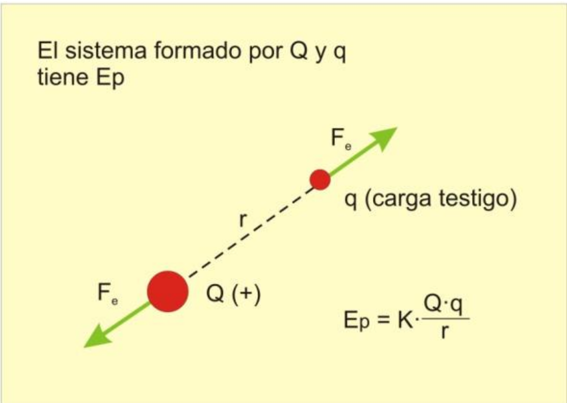
$$V = \frac{Ep}{q}$$

Además de las disquisiciones anteriores, para fijar mejor el concepto de potencial podemos recrear el procedimiento que lleva a obtener dicha magnitud y está implícito en su definición. Aplicando dicha definición al caso que nos ocupa del potencial generado por una carga Q, seguiríamos los siguientes pasos:

1º) Queremos obtener el potencial eléctrico, V, que genera una carga, Q, en un cierto punto P, separado una distancia r de ella. Dicha carga Q creadora del campo, puede tener cualquier valor y signo (en este caso supondremos, arbitrariamente, que se trata de una carga positiva).



2º) Colocamos en el punto P a una carga testigo q (que por definición, es positiva). A partir de ese instante, entre Q y q se ejerce una fuerza eléctrica Fe (en este caso de repulsión), y el sistema que forman Q y q tiene una energía potencial eléctrica:



3º) Una vez expresada la energía potencial eléctrica, Ep, del sistema que forman Q y q, el potencial eléctrico que genera Q en el punto P se obtiene dividiendo dicha energía potencial entre la carga testigo q. Por tanto, V en ese punto P es:

$$V = \frac{Ep}{q} = K \cdot \frac{\frac{Q \cdot q}{r}}{q} = K \cdot \frac{Q}{r}$$

El proceso anterior permite apreciar por qué q no aparece en la expresión de V, cuyo valor únicamente depende de Q, la carga creadora del campo y de la distancia, r, a la que el punto P se encuentra de ella.

Claro está, que si se coloca en el punto P cualquier carga q, la energía potencial del sistema formado por ambas cargas podrá expresarse como $E_p = q \cdot V$. Si la carga testigo fuese el doble ($q' = 2q$) la energía potencial se haría el doble, ya que entonces su valor sería: $E'_p = q' \cdot V = 2q \cdot V = 2 \cdot E_p$, pero el potencial V en P seguiría siendo el mismo. Esta conclusión tiene una validez general.

En resumen:

El potencial de un campo eléctrico en un punto dado del mismo no depende del valor de la carga testigo que pueda colocarse en dicho punto, pero sí de la carga o cargas que generan dicho campo.

14. Deducid la expresión que relaciona el trabajo realizado por el campo eléctrico cuando una pequeña carga q de prueba se desplaza entre dos puntos A y B del mismo, con la diferencia de potencial entre ambos puntos. A continuación, utilizad la expresión obtenida para contestar las siguientes cuestiones:

a) ¿Qué significa que la diferencia de potencial entre dos puntos A y B de un campo eléctrico (es decir, $V_B - V_A$) valga 250 V?
b) ¿Qué significa que el potencial del campo eléctrico en un punto A dado del mismo valga 50 V?

Sabemos que el trabajo realizado por la fuerza eléctrica del campo sobre la carga q se relaciona con el cambio de la energía potencial eléctrica del sistema mediante la ecuación:

$W = -\Delta Ep = -(Ep_B - Ep_A)$ (1)

Si denominamos como V_A y V_B a los potenciales del campo eléctrico en A y en B respectivamente y tenemos en cuenta que, de acuerdo con la propia definición de potencial eléctrico:

V = Ep/q (2)

La expresión (1) se puede escribir también como: $W = -q \cdot (V_B - V_A)$ (3)

Se trata ahora de analizar con atención el resultado obtenido:

-En primer lugar, vemos que si q es negativa, para que W sea positivo, es decir, para que la fuerza eléctrica favorezca el desplazamiento de q, necesariamente debe cumplirse $V_B > V_A$. De donde se deduce que:

Las cargas negativas se mueven espontáneamente de menor a mayor potencial, es decir, hacia potenciales crecientes.

-Análogamente, vemos que si q es positiva para que W será positivo, es decir, para que la fuerza eléctrica favorezca el desplazamiento de q, necesariamente debe cumplirse $V_B < V_A$. De donde se deduce que:

Las cargas positivas se mueven espontáneamente de mayor a menor potencial, es decir, hacia potenciales decrecientes.

-Por otra parte, si en la expresión (3) hacemos q = 1 C, obtenemos que: $V_B - V_A = -W$

-Y, en el hipotético caso de que V_B fuese 0, nos quedaría que: $V_A = W$

Por tanto:

ΔV coincide numéricamente con el valor (cambiado de signo) del trabajo realizado por el campo cuando la unidad de carga positiva pasa desde un punto A a otro punto B del mismo.

V o potencial del campo eléctrico en un punto A dado del mismo, coincide numéricamente con el trabajo realizado por el campo cuando la unidad de carga positiva se traslade desde ese punto hasta otro B en donde el potencial valga 0.

De acuerdo con las consideraciones anteriores:

a) En este caso concreto, el que $V_B - V_A$ = 250 V nos indica, pues, que cuando la unidad positiva de carga se traslade desde A hasta B, el campo realizará un trabajo de -250 J.

b) Sabemos que a una distancia infinita, el potencial ha de ser nulo. Por tanto, si, arbitrariamente designamos el infinito como posición B la ecuación (3) quedaría como:

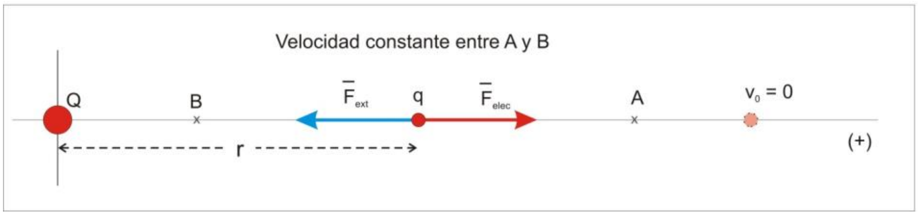
$$W = -q \cdot (V_B - V_A) = -1 \cdot (0 - 50) = 50\ J$$

Así pues, V_A = 50 V indica que cuando la unidad positiva de carga se trasladase desde A hasta el infinito, el campo eléctrico realizaría un trabajo de 50 J (positivo).

Podemos ahora ir más allá y tratar de relacionar la diferencia de potencial y el potencial con el trabajo realizado por posibles fuerzas exteriores al sistema.

Como es lógico, una carga positiva en el seno de un campo eléctrico puede moverse hacia potenciales crecientes (y una negativa hacia potenciales decrecientes), pero para que ello ocurra (suponiendo que parten del reposo), es necesaria la acción de una fuerza exterior opuesta a la fuerza que ejerce el propio campo eléctrico.

En la figura siguiente, se ha representado la situación para el caso de una carga q en el seno del campo eléctrico creado por una carga Q del mismo signo (ambas consideradas puntuales) que se mueve con velocidad constante pasando (sucesivamente) por los puntos A y B del mismo.



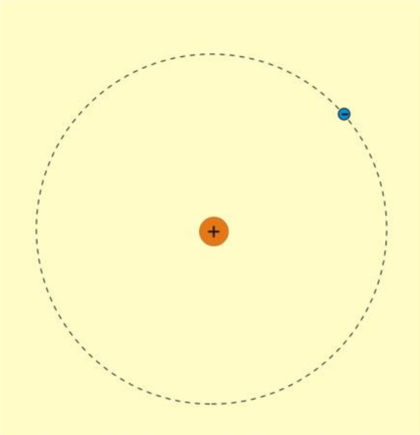
Como puede verse, existe una fuerza externa en sentido contrario a la de repulsión eléctrica (y del mismo módulo). Si no hay otras fuerzas no conservativas, se cumplirá que:

$W_{ext} = \Delta Ec + \Delta Ep = (Ec_B - Ec_A) + q \cdot (V_B - V_A) = 0 + q \cdot (V_B - V_A) \rightarrow V_B - V_A = W_{ext}/q$

Por tanto, una diferencia de potencial ΔV = 250 V, también puede interpretarse diciendo que coincide numéricamente con el trabajo exterior **mínimo** que habría que realizar cuando la unidad de carga positiva pasa de A a B (250 J).

Análogamente que en un cierto punto "P" el potencial sea, por ejemplo, V_P = 50 V se puede interpretar diciendo que para trasladar la unidad positiva de carga desde el infinito hasta dicho punto el trabajo exterior **mínimo** necesario sería de 50 J.

15. De acuerdo con el modelo atómico de Bohr, el átomo de hidrógeno se puede representar como un núcleo positivo (debido a la carga del protón que contiene) y un electrón que gira a su alrededor con movimiento circular y uniforme.



En esta situación, se pide:

a) Potencial eléctrico generado por el núcleo en cualquier punto de la órbita
b) Energía potencial eléctrica del átomo.
c) Energía de ionización del átomo.

Datos: carga del protón: 1'6·10^{-19} C, radio de la órbita: 5'29·10^{-11} m. Resolved el problema ignorando posibles efectos relativistas.

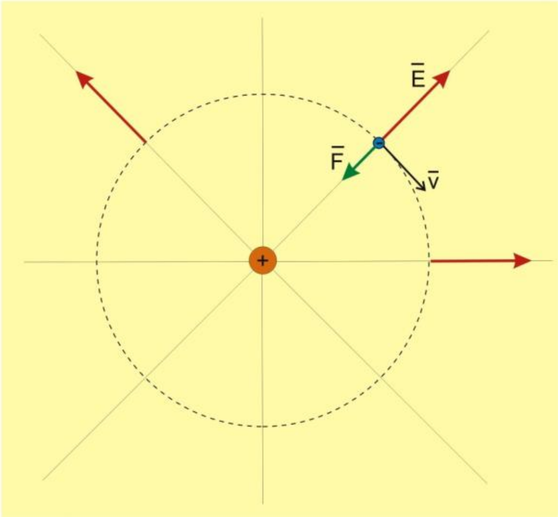
a) En la situación descrita en el enunciado, en la que el núcleo del átomo de hidrógeno se puede considerar como una carga q puntual y positiva, si llamamos R al radio de la órbita, el potencial en cualquier punto de la misma vendrá dado por:

$$V = K \cdot \frac{q}{R} \quad (1)$$

Donde q es la carga del protón y R la distancia de cualquier punto de la órbita al núcleo. Para calcular el potencial buscado, bastará sustituir directamente los valores numéricos en la ecuación anterior, con lo que:

$$V = K \cdot \frac{q}{R} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1'6 \cdot 10^{-19}}{5'29 \cdot 10^{-11}} \rightarrow \text{V} = 27'2 \text{ V}$$

b) La esfera que contiene a la órbita del electrón será una superficie equipotencial (ved problema siguiente). En la figura siguiente se ha representado la órbita descrita por el electrón, algunas líneas de fuerza que la atraviesan, el vector intensidad del campo eléctrico en algunos puntos de la misma y también el electrón y la fuerza eléctrica de atracción que lo mantiene ligado al núcleo.



Sugerid posibles procedimientos para evaluar la energía potencial eléctrica del átomo

Podemos pensar en aplicar directamente la expresión correspondiente a la energía potencial del sistema formado por dos cargas puntuales (en este caso el protón y el electrón), separadas una cierta distancia entre sí (en este caso el radio del átomo), con lo cual:

$$E_p = K \cdot \frac{q_p \cdot q_e}{R} \quad (2)$$

Sustituyendo: $E_p = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{1'6 \cdot 10^{-19} \cdot (-1'6 \cdot 10^{-19})}{5'29 \cdot 10^{-11}}$ = - 4’4·10^{-18} J

Otra estrategia posible es aplicar directamente la relación entre energía potencial y potencial:

Ep = q·V (3)

Sustituyendo: Ep = - 1’6·10^{-19} · 27’2 = - 4’4·10^{-18} J

c) La energía de ionización del átomo, puede entenderse como la mínima energía necesaria para trasladar el electrón desde su órbita inicial hasta el infinito. *Sugerid una forma de hallar dicha energía.*

Como se trata de hallar la energía mínima necesaria, se supone que el electrón llega al infinito con velocidad nula (es decir, sin energía cinética). Por otra parte, al estar el electrón y el protón separados por una distancia infinita, la energía potencial del sistema también será nula. Por tanto, en este caso, la energía mecánica E (suma de la energía cinética y de la energía potencial) en el infinito, ha de ser 0.

Si designamos como A la situación inicial del electrón y como B la situación final podemos evaluar la energía necesaria, simplemente como $\Delta E = E_B - E_A$ donde E es la energía mecánica del sistema formado por el electrón y el protón.

La energía mecánica es la suma de la energía potencial y de la energía cinética, de manera que, en el caso que estamos analizando:

$$E_A = Ep_A + Ec_A = K \cdot \frac{q_p \cdot q_e}{R} + \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v^2$$

$$E_B = Ep_\infty + Ec_\infty = 0$$

Como vemos, no podremos conocer E_A si no sabemos ni la masa del electrón ni la velocidad con que orbita alrededor del núcleo. *¿Cómo podríamos superar este inconveniente?*

Un posible procedimiento es intentar poner la masa y la rapidez del electrón en función de otros datos que sí se conozcan. Para ello, recordemos que, al tratarse de un movimiento circular y uniforme, la aceleración del electrón en su órbita será:

$$a = a_n = \frac{v^2}{R}$$

Si despreciamos la interacción gravitatoria, podemos considerar que esta aceleración se debe a la acción de la fuerza F_{elec} de atracción eléctrica, de modo que $a = F_{elec}/m_e$, con lo que la expresión anterior queda como:

$$\frac{\left|\vec{F}_{elec}\right|}{m_e} = \frac{v^2}{R}$$

Despejando ahora v^2, se obtiene que: $v^2 = \dfrac{\left|\vec{F}_{elec}\right| \cdot R}{m_e} = \dfrac{K \cdot \dfrac{q_p \cdot q_e}{R^2} \cdot R}{m_e} = K \cdot \dfrac{q^2}{R \cdot m_e}$

Sustituyendo v^2 en la expresión de E_A anterior:

$$E_A = Ep_A + Ec_A = K \cdot \frac{q_p \cdot q_e}{R} + \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v^2 = K \cdot \frac{q_p \cdot q_e}{R} + \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot K \cdot \frac{q^2}{R \cdot m_e}$$

En la expresión anterior, la energía potencial eléctrica será una cantidad negativa, al contrario que la energía cinética, que es siempre positiva. Podemos, pues, tener esto en cuenta y simplificar la última expresión obtenida:

$$E_A = -K \cdot \frac{q^2}{R} + \frac{1}{2} \cdot K \cdot \frac{q^2}{R} \;\rightarrow\; E_A = -K \cdot \frac{q^2}{2R} \quad (4)$$

Obsérvese el hecho de que la energía mecánica es negativa, lo que indica que se trata de un sistema ligado.

Así, pues, utilizando como energía mecánica del sistema la expresión (4), podemos evaluar la energía mínima necesaria para ionizar el átomo de hidrógeno, como:

$$\Delta E = E_\infty - E_A = 0 - \left(-K \cdot \frac{q^2}{2R} \right) \rightarrow \Delta E = K \cdot \frac{q^2}{2R}$$

Sustituyendo los valores numéricos correspondientes: $\Delta E = 2'2 \cdot 10^{-18}$ J

Y teniendo en cuenta que 1 eV = $1'6 \cdot 10^{-19}$ J, $\Delta E = 2'2 \cdot 10^{-18} / 1'6 \cdot 10^{-19} = 13'6$ eV

16. Supongamos una carga puntual Q creadora de un campo eléctrico. Se pide:

a) Representad primero el campo eléctrico y luego sus líneas de fuerza suponiendo que Q sea positiva.
b) Haced lo mismo suponiendo que Q sea negativa.
c) Relacionad la densidad de las líneas de fuerza del campo con su intensidad.
d) Dibujad las superficies equipotenciales que rodean a Q, suponiendo que Q sea positiva.
e) Haced los mismo suponiendo que Q sea negativa.
f) Razonad hacia donde se movería espontáneamente una pequeña carga q positiva de prueba abandonada en un punto cualquiera del campo en los casos anteriores.
g) Razonad hacia donde se movería espontáneamente una pequeña carga q negativa de prueba abandonada en un punto cualquiera del campo en los casos anteriores.
h) ¿Cuánto valdría el trabajo realizado por el campo cuando q se desplazase a lo largo de una superficie equipotencial en cualquiera de los casos anteriores?

Cuestiones a), b) y c)

Para representar el campo eléctrico que produce una carga Q considerada como puntual, hemos de colocar en diversos puntos alrededor de ella a una pequeña carga testigo (positiva) q, identificar la fuerza eléctrica $\vec{F}_e$ que se ejerce sobre ella, y, finalmente, representar el campo eléctrico $\vec{E}$ con un vector paralelo a esa fuerza y cuyo módulo sea proporcional a ella ($\vec{E} = \vec{F}_e / q$)

Además de hacer esta representación usando papel y lápiz, se puede utilizar, si se desea, una animación informática *Modellus* que permite al usuario mover a la carga testigo (colocando el cursor encima de ella) alrededor de la carga Q y va dibujando los vectores intensidad de campo.

Las dos imágenes anteriores muestran el resultado que se obtiene con esta animación cuando la carga Q es positiva (dibujo situado a la izquierda) y cuando Q es negativa (dibujo situado a la derecha) La totalidad de los vectores que vemos es una representación del campo eléctrico en la región alrededor de la carga. La animación y el programa para hacerla correr en cualquier ordenador están disponibles en la página "Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física", de la Sección Local de Alicante de la RSEF:
http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm.

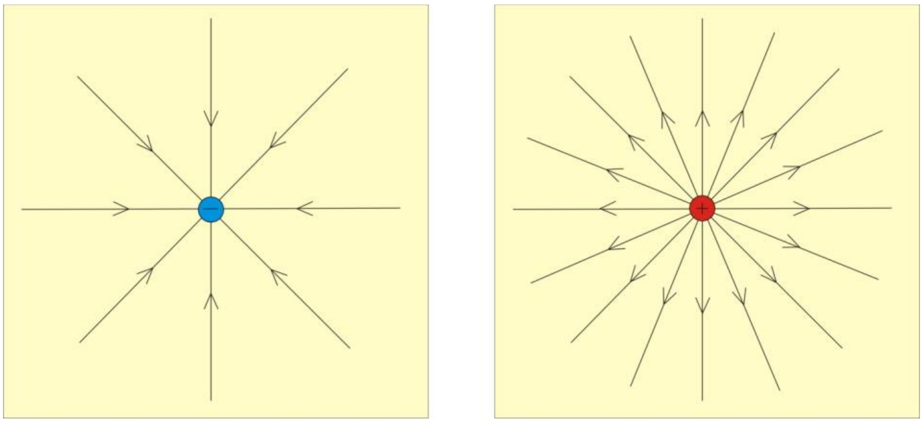
A partir de los vectores representativos del campo eléctrico pueden dibujarse las líneas de fuerza de dicho campo, que son líneas tangentes a esos vectores intensidad de campo y orientadas como ellos. Al hacer esta representación, vemos que el campo eléctrico producido por una carga puntual es radial, es decir, que sus líneas de fuerza son abiertas y forman un haz centrado en la carga que lo crea, Q. Si Q es positiva las líneas "nacen" de ella y se dirigen hacia el infinito. Si Q es negativa las líneas vienen desde el infinito para "confluir" en ella.

Esta geometría radial que tienen las líneas de fuerza del campo eléctrico creado por una carga puntual muestra también el hecho de que donde la densidad de líneas de fuerza es mayor (líneas más juntas) es también donde la intensidad del campo es mayor (en valor absoluto), ya que, evidentemente las líneas se aproximan cuanto más cerca nos situamos de la carga que produce el campo y se separan cuanto más lejos nos situemos de ella.

Este concepto de que la densidad de líneas de fuerza es mayor cuanto mayor sea la intensidad del campo, es aplicable a toda representación del mismo mediante líneas de fuerza.

Representad las líneas de fuerza del campo eléctrico creado por: a) Una carga Q negativa; b) Una carga 2Q positiva.

Las líneas de fuerza del campo eléctrico creado por una carga Q negativa serán radiales y orientadas hacia dicha carga (ved esquema siguiente situado más a la izquierda). Por su parte, las líneas de fuerza del campo eléctrico producido por una carga positiva, 2Q, también serán radiales, pero orientadas desde la carga hacia el infinito. Ahora bien, como esta carga tiene (en valor absoluto) valor doble que la anterior, también creará a la misma distancia un campo eléctrico de doble intensidad que aquella (también en valor absoluto). Por tanto, comparativamente representamos sus líneas de fuerza el doble de apretadas (esquema situado más a la derecha).



Cuestiones d) y e)

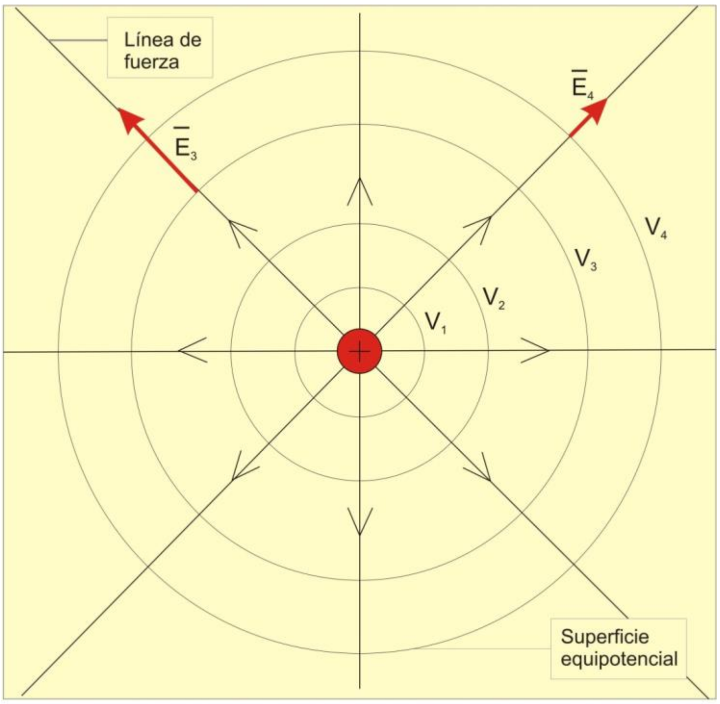
Partimos de la expresión del potencial producido por una carga Q puntual:

$$V = K \cdot \frac{Q}{r}$$

Analizando esta expresión, podemos darnos cuenta de que las superficies equipotenciales del campo eléctrico que genera una carga puntual Q serán esferas concéntricas alrededor de dicha carga. Para ver donde es mayor y donde es menor V, tenemos en cuenta que en valor absoluto V es tanto mayor cuanto menor sea la distancia, r, y también que V puede ser positivo o negativo en función del signo de la carga que genera el campo. En consecuencia, resulta que si la carga Q es positiva, el potencial eléctrico que produce también lo es y disminuye a medida que nos alejamos de dicha carga (hasta hacerse 0 para $r = \infty$), mientras que si la carga Q es negativa, el potencial eléctrico también lo es y aumenta (se hace cada vez "menos negativo") a medida que nos alejamos de la carga (hasta tomar su valor máximo $V = 0$ para $r = \infty$).

En el esquema siguiente se han dibujado arbitrariamente cuatro superficies equipotenciales (serían superficies esféricas) que rodean a una carga Q puntual y positiva. En este caso se cumplirá que:

$V_1 > V_2 > V_3 > V_4 \ldots$

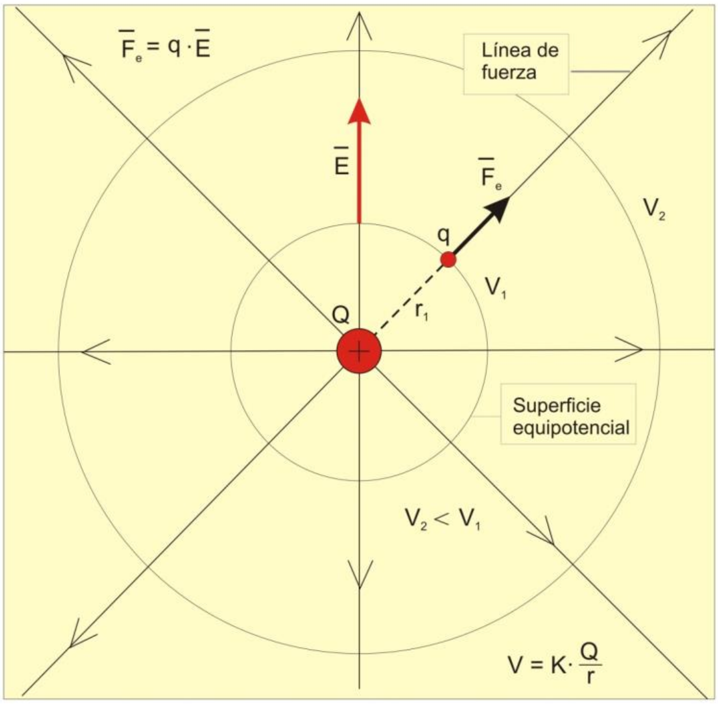


Como podemos ver, las líneas de fuerza del campo son perpendiculares a las superficies equipotenciales. En el esquema, también se ha incluido el vector intensidad del campo eléctrico en dos puntos diferentes del mismo y, como puede observarse, son tangentes a las líneas de fuerza y perpendiculares a las superficies equipotenciales.

Cuestiones f) y g)

Tal y como se ha visto ya anteriormente, al abandonar cualquier carga q en un punto A en el que existe un campo eléctrico, las fuerzas de dicho campo la impulsan de tal modo que la energía potencial del sistema disminuye.

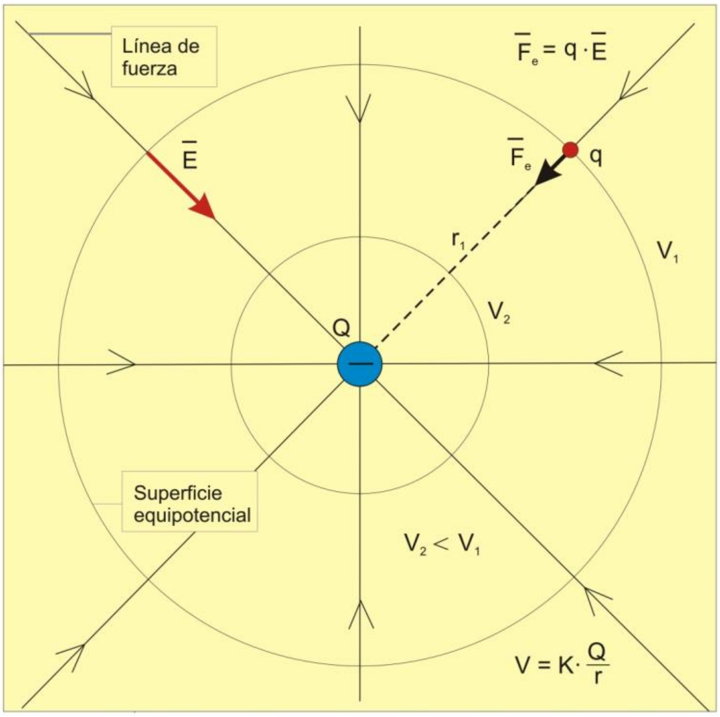
Si suponemos que el campo eléctrico es generado por una carga Q puntual y positiva, y que la carga q que abandonamos en él también lo es, la transformación en la que esa carga q se aleja de Q será espontánea, ya que es evidente que en este caso sobre q se ejerce continuamente una fuerza eléctrica radial y orientada desde Q hacia el infinito. Esta misma orientación tienen las líneas del campo eléctrico que, tal y como hemos visto, son perpendiculares a las superficies equipotenciales y las atraviesan dirigiéndose siempre de mayor a menor potencial.



En resumen, en este caso la carga q se moverá espontáneamente (impulsada por el campo eléctrico que crea Q) en dirección radial y alejándose de Q.

Si la carga que genera el campo, Q, es negativa y la carga que abandonamos en él, q, sigue siendo positiva, será espontánea la transformación opuesta a la considerada en el caso anterior.

Las líneas del campo eléctrico siguen siendo radiales, pero se orientan en el sentido opuesto (desde el infinito hacia la carga Q), que también es el sentido en el que disminuye el potencial V, el cual es, ahora, negativo pero cada vez de mayor valor absoluto.



En resumen, en este segundo caso la carga q se moverá espontáneamente (impulsada por el campo eléctrico que crea Q) en dirección radial, pero acercándose a Q.

Evidentemente, si la pequeña carga q que abandonamos en el campo eléctrico generado por Q fuera negativa, llegaríamos a las conclusiones opuestas a las que acabamos de relatar, probando que las cargas negativas se mueven espontáneamente (partiendo de una situación inicial de reposo) hacia potenciales crecientes.

Cuestión h)

Hemos visto anteriormente que el trabajo realizado por el campo eléctrico cuando una carga q se desplaza en su seno desde un punto dado A hasta otro punto B, se puede expresar como:

$W_{elec} = - q \cdot (V_B - V_A)$

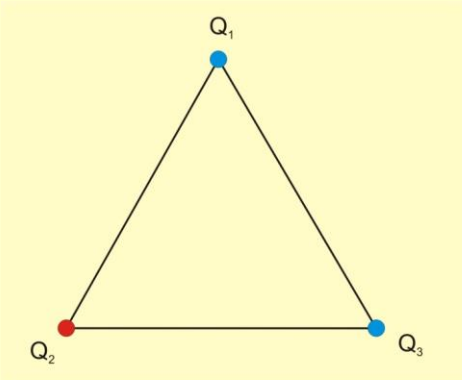
Si desplazamos una carga q a lo largo de una superficie equipotencial y, por tanto, $V_A = V_B$, el trabajo realizado por el campo, será 0:

$W_{elec} = - q\cdot(V_B-V_A) = -q\cdot 0 = 0$

Esta conclusión, también se puede utilizar para demostrar, de nuevo, que las líneas de fuerza y la intensidad del campo eléctrico han de ser perpendiculares a la superficie equipotencial que atraviesen.

En efecto: Si el trabajo eléctrico es nulo y ni la fuerza ni el desplazamiento desde A hasta B lo son, hemos de admitir que la fuerza eléctrica, y con ella el vector intensidad del campo eléctrico, ha de ser perpendicular a dicho desplazamiento

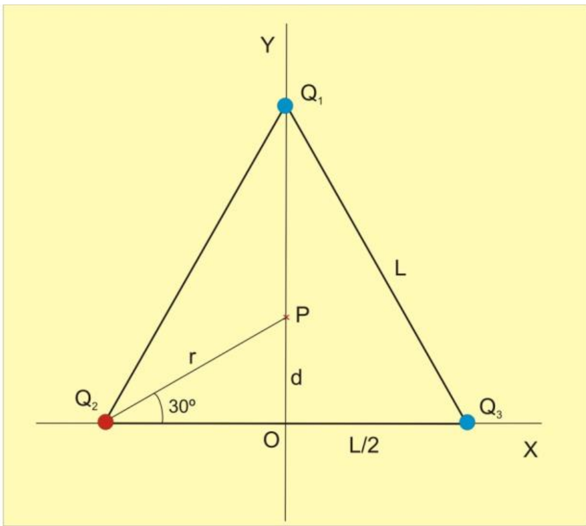
17. Tres cargas puntuales $Q_1 = -2\cdot10^{-5}$ C, $Q_2 = 10^{-5}$ C y $Q_3 = -10^{-5}$ C se hallan en los vértices de un triángulo equilátero de 2 m de lado. Se pide:



a) Vector intensidad del campo eléctrico y potencial en el centro del triángulo.
b) Energía potencial del sistema formado por las tres cargas.
c) Energía potencial de una carga $q = 10^{-8}$ C si se colocase en el centro del triángulo.

Para resolver el problema nos conviene, en primer lugar, *localizar el centro de la figura* que corresponderá al punto en donde se cortan las bisectrices (o baricentro). Si llamamos r a la distancia del centro de la figura a cualquiera de los vértices, d a la distancia entre dicho centro y el punto medio de cualquiera de los lados y L a la longitud del lado, tendremos:

Figura 1



Podemos expresar ahora, tanto r como d (en principio, desconocidas), en función de la longitud L del lado del triángulo. En efecto:

$$\cos 30º = \frac{L/2}{r} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{L}{2r} \;\rightarrow\; r = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$sen 30º = \frac{d}{r} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{d}{L/\sqrt{3}} \;\rightarrow\; d = \frac{L}{2\sqrt{3}}$$

La altura del triángulo formado por las tres cargas se puede obtener aplicando el teorema de Pitágoras o, simplemente, sumando r con d. Si designamos a dicha altura como H, siguiendo la segunda estrategia propuesta, tendremos que:

$$H = r + d = \frac{L}{\sqrt{3}} + \frac{L}{2\sqrt{3}} \;\rightarrow\; H = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

En la figura 1 anterior, hemos incluido también un sistema de referencia sencillo, con origen en el punto medio de la base del triángulo. En dicho sistema de referencia, las posiciones de las tres cargas y la del punto P (baricentro) en donde queremos obtener el campo eléctrico y el potencial son:

Carga Q_1: $\left(0\,,\,\frac{L\sqrt{3}}{2}\right)$

Carga Q_2: $\left(-\frac{L}{2}\,,\,0\right)$

Carga Q_3: $\left(\frac{L}{2}\,,\,0\right)$

Punto P: $\left(0\,,\,\frac{L}{2\sqrt{3}}\right)$

a) Determinación de la intensidad del campo eléctrico y el potencial

Plantead hipótesis acerca de los factores de los que cabe esperar que dependa el campo eléctrico buscado y la forma de dicha dependencia.

Cabe plantear que el campo eléctrico resultante que buscamos obtener en el baricentro del triángulo (tanto su módulo, $|\vec{E}|$, como su orientación) dependa de la longitud, L, del lado de dicho triángulo (ya que L determina, a su vez, las posiciones que ocupan las tres cargas y la del punto P donde queremos obtener el campo eléctrico), de los valores absolutos y de los signos (positivo o negativo) que tengan las cargas, Q_1, Q_2, Q_3, y también de la constante eléctrica del medio, K.

$$\vec{E} = f\,(L, Q_1, Q_2, Q_3, K)$$

En el centro del triángulo (como en cualquier otro punto) los vectores que proporcionan el campo eléctrico de cada una de las tres cargas $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ y $\vec{E}_3$ podrán tener distintas longitudes (dependiendo de su módulo) y distintas orientaciones (dependiendo de que cada una de las cargas que los generan sean positivas o negativas). No podemos, por ello, prever cómo influirá cada carga por separado, pero sí cabe plantear algunos casos límite y algunas hipótesis que las involucre de manera conjunta. Concretamente:

1ª) ¿Qué pasaría con la intensidad del campo eléctrico resultante si las tres cargas fueran idénticas?

Si las tres cargas eléctricas tuviesen el mismo valor y el mismo signo, los tres campos eléctricos que producen en el centro del triángulo equilátero que forman se contrarrestarían y, en consecuencia, el campo eléctrico resultante, tal y como se muestra en la figura 2 siguiente, sería $\vec{E} = 0$.

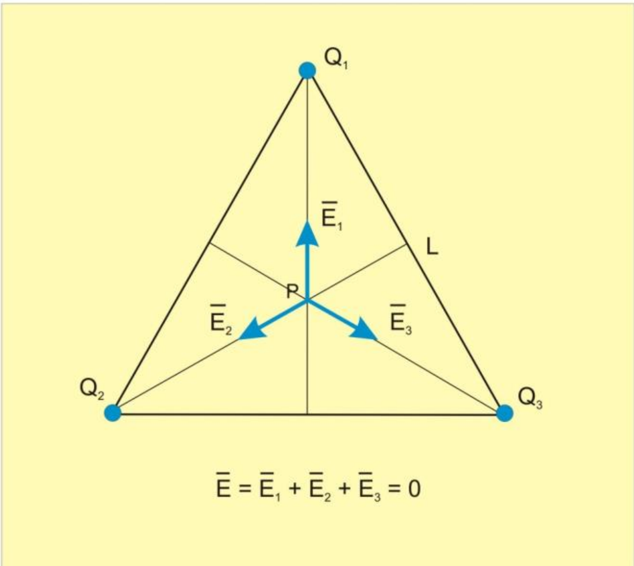


Figura 2

2ª) ¿Qué pasaría con la intensidad del campo eléctrico resultante si dos de las cargas fuesen idénticas?

Si dos de las tres cargas eléctricas, por ejemplo, Q_2 y Q_3, tuviesen el mismo valor y el mismo signo, el vector campo eléctrico resultante buscado, $\vec{E}$, estaría en la mediana del triángulo que pasa por la otra carga, Q_1 (independientemente del signo y valor de esta), porque, en ese caso, tanto la suma de los campos $\vec{E}_2$ y $\vec{E}_3$, como el campo $\vec{E}_1$ creado por la carga Q_1, también lo estarían, tal y como se puede apreciar en la figura 3 siguiente, en la que, arbitrariamente, se ha supuesto que Q_2 y Q_3 son cargas positivas iguales, mientras que Q_1 es negativa y de mayor valor absoluto.

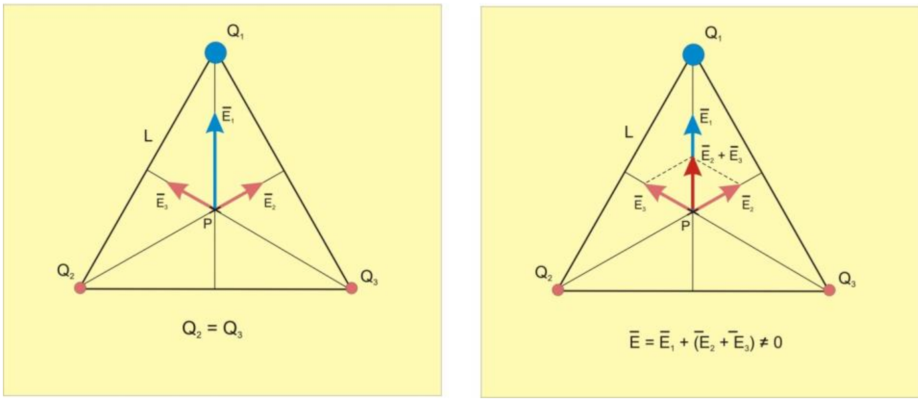


Figura 3

3ª) ¿Qué pasaría con la intensidad del campo eléctrico resultante si todas las cargas aumentasen en valor absoluto?

Para un determinado valor y signo de cada una de las cargas (sean estos los que sean, excepto el caso en el que sean todos iguales y se contrarresten, como ocurre en la figura 2), cabe esperar que si se incrementan (en valor absoluto) las intensidades de las tres cargas, también se incremente el módulo del campo eléctrico resultante. Bajo estas condiciones, dicho campo resultante mantendrá la misma orientación. Por tanto, multiplicar por un determinado factor el valor absoluto cada una de las cargas, ha de implicar también multiplicar los módulos de los campos eléctricos correspondientes que generan en el punto P, y, como consecuencia de ello, también debería aumentar el módulo del campo resultante.

4ª) ¿Cómo influirían en la intensidad del campo eléctrico resultante, hipotéticos cambios en el valor de la longitud L? ¿Y de la constante K?

Para un determinado valor y signo de cada una de las cargas, si la longitud L de cada lado del triángulo equilátero que forman aumentase, la intensidad del campo eléctrico buscado $|\vec{E}|$ debería disminuir, porque, en ese caso, la distancia, r, entre el baricentro P y cada una de las cargas también aumentaría. Evidentemente, en el caso límite en el que $L \to \infty$ el campo eléctrico buscado tendería a anularse ($E \to 0$).

Finalmente, cuanto mayor pueda ser la constante K del medio, mayor deberá ser (a igualdad del resto de factores) la intensidad del campo eléctrico buscado. Si, por ejemplo, K fuera nula, el campo eléctrico también lo sería ($\vec{E} = 0$), ya que, en ese caso, simplemente, no habría fuerza eléctrica alguna sobre ninguna carga de prueba que colocásemos en ese medio.

Elaborad posibles estrategias y desarrollar alguna para obtener el campo eléctrico buscado

Sabemos que la intensidad del campo eléctrico creado por una carga puntual Q a una distancia r de la misma viene dada, por la expresión:

$$\vec{E} = K \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

siendo $\vec{u}_r$ un vector unitario que siempre tiene la misma dirección y sentido que el vector $\vec{r}$ que va desde la carga generadora del campo hasta el punto donde se desea calcular su intensidad.

La intensidad del campo eléctrico en el baricentro P del triángulo será la suma de los vectores intensidad de campo $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ y $\vec{E}_3$ correspondientes a las cargas Q_1, Q_2 y Q_3, respectivamente. Por tanto, para resolver el problema obtendremos primero cada uno de esos vectores. En la figura 4 siguiente se han representado de nuevo, junto con los vectores unitarios correspondientes:

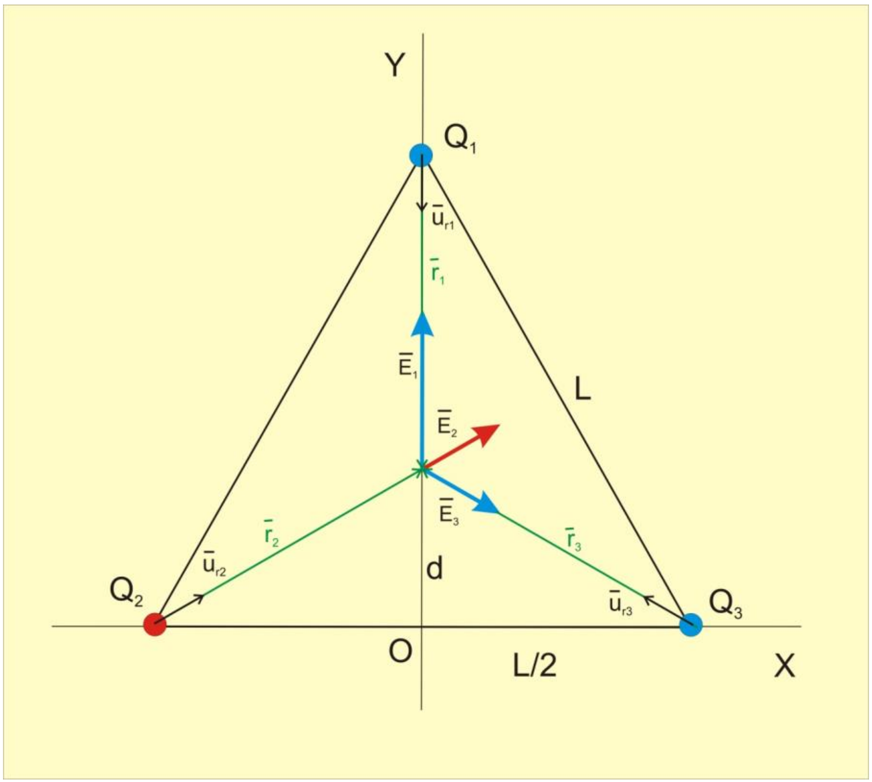


Figura 4

En la figura 4 anterior, se cumple que:

$$\vec{E}_1 = K \cdot \frac{Q_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r1} = K \cdot \frac{Q_1}{(L/\sqrt{3})^2} \cdot (0\,,-1) \;\rightarrow\; \vec{E}_1 = \left(0\,, -K \cdot \frac{3 \cdot Q_1}{L^2}\right)$$

$$\vec{E}_2 = K \cdot \frac{Q_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r2} = K \cdot \frac{Q_2}{(L/\sqrt{3})^2} \cdot \vec{u}_{r2}$$

La expresión de $\vec{u}_{r2}$ en función de sus componentes escalares no es inmediata (como ocurría con $\vec{u}_{r1}$ en el caso anterior). Para obtenerla, dividiremos el vector $\vec{r}_2$ por su módulo r_2. El vector $\vec{r}_2$ podemos hallarlo sin más que restar las coordenadas de su origen a las coordenadas de su extremo, de modo que:

$$\vec{u}_{r2} = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{(0\,, L/2\sqrt{3}) - (-L/2\,, 0)}{L/\sqrt{3}} \;\rightarrow\; \vec{u}_{r2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \frac{1}{2}\right)$$

Sustituyendo ahora en $\vec{E}_2$:

$$\vec{E}_2 = K \cdot \frac{Q_2}{(L/\sqrt{3})^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \frac{1}{2}\right) \rightarrow \vec{E}_2 = \left(K \cdot \frac{3\sqrt{3} \cdot Q_2}{2L^2}\,,\; K \cdot \frac{3 \cdot Q_2}{2L^2}\right)$$

Finalmente: $\vec{E}_3 = K \cdot \dfrac{Q_3}{(L/\sqrt{3})^2} \cdot \vec{u}_{r3}$

Conocido $\vec{u}_{r2}$, resulta muy sencillo, hallar $\vec{u}_{r3}$. En efecto, basta observar la figura 4 para darse cuenta de que la componente según el eje Y de $\vec{u}_{r3}$ es la misma que la de $\vec{u}_{r2}$, mientras que las componentes según el eje X son iguales pero de distinto signo. Teniendo esto en cuenta, podemos escribir que:

$$\vec{E}_3 = \left(-K \cdot \frac{3\sqrt{3} \cdot Q_3}{2L^2}\,,\; K \cdot \frac{3 \cdot Q_3}{2L^2}\right)$$

Sumando ahora los tres vectores: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$

$$\vec{E} = \left(0\,, -K \cdot \frac{3 \cdot Q_1}{L^2}\right) + \left(K \cdot \frac{3\sqrt{3} \cdot Q_2}{2L^2}\,,\; K \cdot \frac{3 \cdot Q_2}{2L^2}\right) + \left(-K \cdot \frac{3\sqrt{3} \cdot Q_3}{2L^2}\,,\; K \cdot \frac{3 \cdot Q_3}{2L^2}\right)$$

De donde obtenemos:

$$\vec{E} = \frac{3K}{L^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (Q_2 - Q_3) \quad , \quad (-Q_1 + \frac{Q_2}{2} + \frac{Q_3}{2} \right) \qquad (1)$$

El módulo del vector anterior, viene dado por: $\left|\vec{E}\right| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$, lo que da lugar a:

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{3 \cdot K}{L^2} \cdot \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 - Q_1Q_2 - Q_1Q_3 - Q_2Q_3} \qquad (2)$$

Sustituyendo valores numéricos y operando en (1), obtenemos: $\vec{\mathrm{E}} = (1'17 \cdot 10^5 \,,\; 1'35 \cdot 10^5)$ N/C

Haciendo lo mismo en (2): $\left|\vec{E}\right| = 1'79 \cdot 10^5$ N/C.

Obtened gráficamente el vector intensidad del campo eléctrico resultante en el punto P

Basta con trasladar los vectores $\vec{E}_2$ y $\vec{E}_3$ sin cambiar nada de ellos (ni módulo, ni dirección ni sentido) a continuación del vector $\vec{E}_1$. El vector suma vendrá representado por una flecha desde el origen de $\vec{E}_1$ hasta el extremo de $\vec{E}_3$, tal y como se muestra en la figura 5 siguiente:

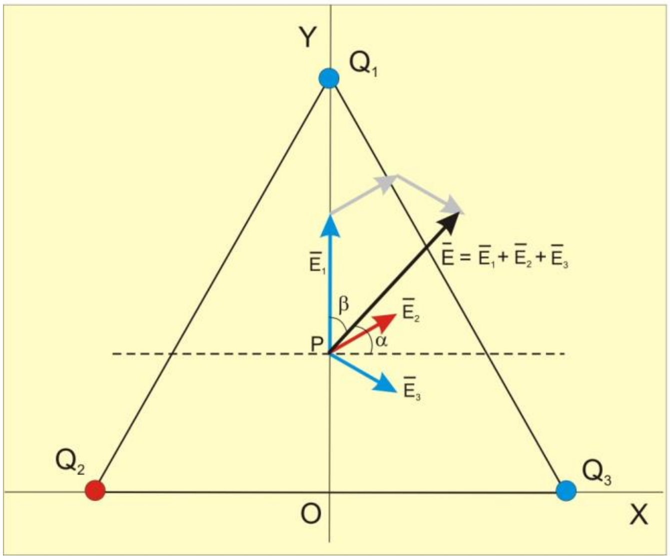


Figura 5

En cuanto a la dirección y sentido del vector, estos, vienen dados por los ángulos directores o ángulos que forma el vector con cada uno de los semiejes positivos:

cos α = 1'17/1'79 = 0'65 $\rightarrow$ α = arccos 0'65 = 49º
cos β = 1'35/1'79 = 0'75 $\rightarrow$ β = arccos 0'75 = 41º

El resultado obtenido se puede leer diciendo que si en el centro del triángulo se colocase una hipotética carga puntual positiva (+ 1 C), sobre ella el campo ejercería una fuerza de $1'79 \cdot 10^5$ N en la misma dirección y sentido que el vector $\vec{E}$.

Analizad el resultado literal obtenido con el fin de constatar si se cumplen o no las hipótesis elaboradas al comienzo

Como puede observarse, el resultado (2) es homogéneo (unidades de N/C en ambos lados) y su expresión es acorde, en la forma, con la de un campo eléctrico, ya que es proporcional a una cierta suma de las cargas y a la constante K, e inversamente proporcional al cuadrado de la variable longitudinal, L.

Podemos fijarnos en la expresión del término en donde aparecen las cargas (dentro de la raíz cuadrada), y comprobar que mediante dicha expresión las tres cargas eléctricas influyen en el resultado de un modo completamente simétrico. Esto es lógico dada la simetría que muestran en el espacio las tres cargas con respecto al punto central en el que estamos calculando el campo que generan.

Conviene también fijarse en los signos de los seis sumandos que involucran a las cargas eléctricas. Lógicamente estos signos son los adecuados para que cuando se sustituyan los valores de cada carga (cada una con su signo), se obtenga un resultado correcto, que ha de tener en cuenta que al calcular el campo se suman tres vectores, cuyas orientaciones dependen precisamente que esos signos que tengan las cargas.

De manera más concreta, podemos ver ahora que se cumplen las diferentes hipótesis que habíamos formulado y los casos límite.

En efecto, el resultado constata que cuanto mayor sea L y/o cuanto menor sea K, menor resulta el módulo del campo eléctrico y viceversa, cumpliéndose los casos límite que habíamos planteado para estas dos variables (por ejemplo, para $L \rightarrow \infty$, o para $K \rightarrow 0$ se cumple que $E \rightarrow 0$).

En cuanto a los casos que habíamos planteado sobre algunos valores posibles de las cargas, podemos empezar comprobando que si las tres son iguales (mismo valor y mismo signo), es decir, si $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$, se obtiene, como cabía esperar, que:

$$|\vec{E}| = \frac{3 \cdot K}{L^2} \sqrt{Q^2 + Q^2 + Q^2 - Q \cdot Q - Q \cdot Q - Q \cdot Q} = 0$$

En segundo lugar, podemos hacer que dos cargas sean iguales, por ejemplo, $Q_2 = Q_3 = Q$ y sustituir esta condición en la ecuación (1):

$$\vec{E} = \frac{3K}{L^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (Q_2 - Q_3) \quad , \quad (-Q_1 + \frac{Q_2}{2} + \frac{Q_3}{2} \right)$$

Si en el resultado anterior Hacemos $Q_2 = Q_3 = Q$, se obtiene:

$$\vec{E} = \frac{3K}{L^2} \cdot (0\,,\, Q - Q_1) \rightarrow \vec{E} = \left[0\,,\, K \cdot \frac{3}{L^2} (Q - Q_1) \right]$$

Es decir, se constata que en este caso el campo resultante es, efectivamente, vertical, lo que significa que está en la línea mediana del triángulo que pasa por la carga Q_1, tal como habíamos planteado en una de las hipótesis (ved figura 3).

Finalmente, podemos también multiplicar a todas las cargas por un determinado factor N (sin alterar sus signos). Entonces se obtiene:

$$\left|\vec{E}\right|' = \frac{3 \cdot K}{L^2} \sqrt{(N \cdot Q_1)^2 + (N \cdot Q_2)^2 + (N \cdot Q_3)^2 - N^2 Q_1 \cdot Q_2 - N^2 Q_1 \cdot Q_3 - N^2 Q_2 \cdot Q_3}$$

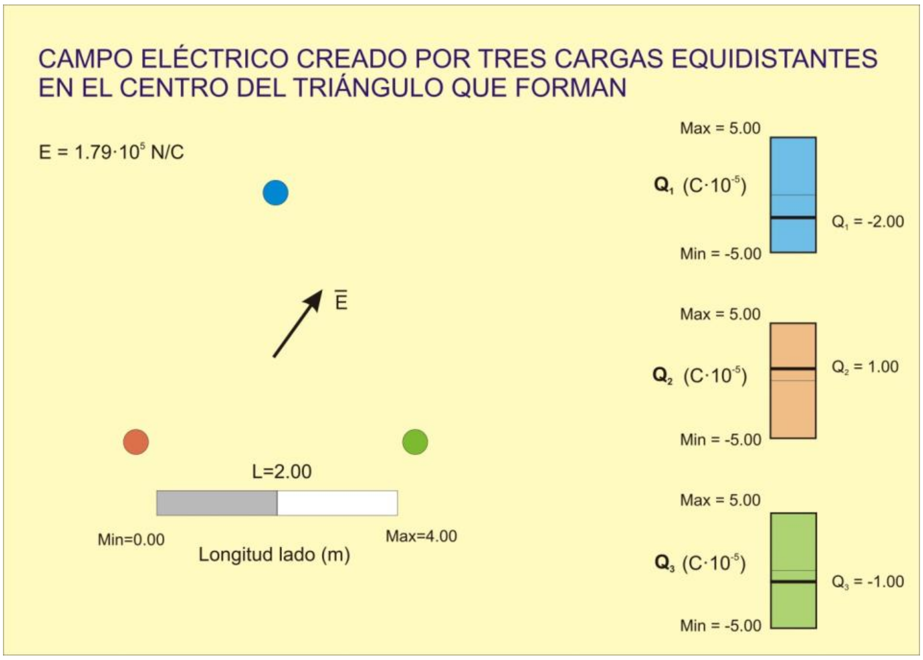
Es decir, se obtiene:

$$\left|\vec{E}\right|' = N \cdot \left|\vec{E}\right|$$

El campo eléctrico resultante se multiplica por ese mismo factor N.

Los desarrollos anteriores se pueden reforzar y visualizar con una animación informática *Modellus* interactiva que hemos creado específicamente con este propósito. En ella, los usuarios pueden modificar cada uno de los parámetros y comprobar cómo afecta cada modificación al resultado, tanto del módulo del campo eléctrico, como del vector que lo representa en el centro del triángulo que forman las cargas. De este modo, se pueden poner a prueba todas las hipótesis y casos límite que hemos visto anteriormente, se pueden estudiar otras situaciones (por ejemplo, qué ocurre si cambia el signo de una o de varias cargas, etc.), se puede analizar con detalle el resultado, evaluar otros órdenes de magnitud, etc.

En la imagen siguiente podemos ver el aspecto que presenta la pantalla cuando los valores de las magnitudes coinciden con los que se han propuesto en el enunciado. La animación y el programa para hacerla correr en cualquier ordenador están disponibles en la página "Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física", de la Sección Local de Alicante de la RSEF: http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm.



Podemos pasar ahora a determinar el potencial eléctrico V también en el centro P del triángulo formado por las tres cargas.

Al igual que el campo, el potencial eléctrico se obtiene sumando los potenciales que crean cada una de las cargas en el punto considerado, pero a diferencia del campo, el potencial es una magnitud escalar, en lugar de vectorial, de modo que su suma es una simple suma algebraica de los valores de los potenciales creados por cada carga Q, cuya expresión es:

$$V = K \cdot \frac{Q}{r}$$

Plantead hipótesis sobre el valor del potencial eléctrico en el centro del triángulo

Teniendo en cuenta la expresión anterior, es evidente que el potencial eléctrico total (obsérvese que decimos “total” y no “resultante”, porque se trata ahora simplemente de sumar números, no de componer vectores) en el baricentro del triángulo (punto P) dependa de la longitud, L, de dicho triángulo (que determina, a su vez, las posiciones que ocupan las tres cargas y la del punto P), de los valores de cargas, Q_1, Q_2, Q_3, y de la constante eléctrica del medio, K.

$$V = f(L, Q_1, Q_2, Q_3, K)$$

A partir de aquí, es fácil darse cuenta de que cuanto mayor sea cualquiera de las cargas (atención, no en valor absoluto, sino simplemente mayor), mayor deberá ser también el valor del potencial eléctrico V.

Analizar lo que ocurrirá al modificar la longitud L del triángulo que forman las cargas, no es una tarea sencilla, puesto que el potencial creado por una carga será positivo o negativo dependiendo del signo que tenga dicha carga. Consecuentemente, aunque al aumentar L disminuye el valor absoluto del potencial generado por cualquiera de las cargas en el centro del triángulo (la distancia r aumenta), esa disminución del valor absoluto del potencial implicará también una disminución del valor del potencial cuando la carga que lo genera sea positiva, pero implicará un aumento del valor de V cuando dicha carga sea negativa.

Lo mismo puede decirse de la constante del medio. Una modificación de su valor implica una modificación en el mismo sentido del valor absoluto del potencial eléctrico, pero para cada carga esa modificación puede suponer un aumento del valor de V o una disminución del mismo según cual sea el signo de dicha carga.

Obtened el valor del potencial total en el centro del triángulo

Los potenciales debido a cada una de las cargas, serán:

$$V_1 = K \cdot \frac{Q_1}{r}$$

$$V_2 = K \cdot \frac{Q_2}{r}$$

$$V_3 = K \cdot \frac{Q_3}{r}$$

Por tanto, el potencial total en P, será:

V = $V_1 + V_2 + V_3$ = $K \cdot \frac{Q_1}{r} + K \cdot \frac{Q_2}{r} + K \cdot \frac{Q_3}{r}$

Si sacamos factor común y tenemos en cuenta que $r = \frac{L}{\sqrt{3}}$, obtenemos finalmente:

$$V = \frac{K \cdot \sqrt{3}}{L} \cdot (Q_1 + Q_2 + Q_3)$$

Este resultado es coherente con las consideraciones que realizamos anteriormente con respecto al valor de V. En el caso particular que nos ocupa, $Q_1 = -2 \cdot 10^{-5}$ C, $Q_2 = 10^{-5}$ C, $Q_3 = -10^{-5}$ C, L = 2 m, se obtiene:

$$V = -1'56 \cdot 10^5 \text{ V}$$

Hemos de observar que el potencial obtenido en este caso resulta negativo porque predomina la contribución al mismo de las dos cargas de signo negativo (Q_1 y Q_3) sobre la carga de signo positivo (Q_2). Esto implica que un posible movimiento de una carga positiva desde un lugar alejado de las tres cargas hasta el punto P, sería una transformación espontánea, es decir, podría estar impulsada por las fuerzas del campo eléctrico que producen las tres cargas.

b) Determinación de la energía potencial eléctrica del sistema formado por las tres cargas

Puesto que cada pareja de cargas que puede considerarse dentro del sistema de las tres cargas tiene energía potencial eléctrica, la energía potencial del sistema se obtendrá sumando las energías potenciales correspondientes a las distintas parejas de carga que se pueden formar en dicho sistema. Por tanto:

$$Ep = Ep_{12} + Ep_{13} + Ep_{23} = K \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}} + K \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_3}{r_{13}} + K \cdot \frac{Q_2 \cdot Q_3}{r_{23}}$$

En la expresión anterior, r_{12} , r_{13} y r_{23}, son las distancias existentes entre las parejas de cargas correspondientes.

Al estar situadas las tres cargas en los vértices del triángulo, de lado L se cumple que:
$r_{12} = r_{13} = r_{23} = L$.

Por tanto, la energía potencial del sistema considerado se puede expresar como:

$$E_p = \frac{K}{L}(Q_1 \cdot Q_2 + Q_1 \cdot Q_3 + Q_2 \cdot Q_3)$$

Sustituyendo valores, se obtiene: E_p = - 0’45J.

c) Energía potencial de una carga q (y del campo) si se colocase en el centro del triángulo

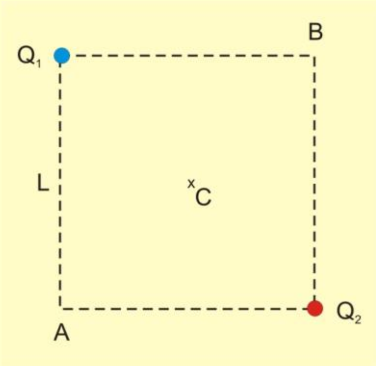
Anteriormente ya hemos obtenido que el potencial V en el centro P del triángulo es:

$V = - 1’56 \cdot 10^5$ V

Por tanto, al colocar en ese punto la carga q, la Energía potencial buscada se podrá obtener como: Ep = q·V, de modo que para calcularla bastara con sustituir los valores correspondientes:

$$Ep = q \cdot V = 10^{-8} \cdot (-1’56 \cdot 10^5) = -1’56 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

18. Supongamos dos cargas eléctricas puntuales Q_1 = -9 µC y Q_2 = 6 µC, situadas en dos de los vértices de un cuadrado de 20 cm de lado tal y como se muestra en la figura adjunta:



Determinad:

a) El trabajo mínimo necesario para trasladar una tercera carga q = 3 µC, inicialmente en reposo, desde el vértice A hasta el vértice B de dicho cuadrado.
b) La energía potencial eléctrica del sistema formado por las tres cargas, cuando q de halle en A, en el centro C del cuadrado y en B

a) Para calcular el trabajo mínimo que se pide, podemos partir de la expresión general:

$$Wres_A^B = \Delta Ec_A^B$$

Dicho trabajo resultante corresponde a la suma del trabajo exterior (Wext) y del trabajo realizado por el campo (Welec), con lo que podemos escribir la expresión anterior como:

$$Wext_A^B + Welec_A^B = \Delta Ec_A^B = Ec_B - Ec_A$$

Si, ahora, tenemos en cuenta ahora que $Ec_A = 0$ y que $Welec_A^B = -\Delta Ep$:

$$Wext_A^B = \Delta Ep_A^B + Ec_B$$

Y, como ΔEp solo depende de los puntos A y B, Wext será mínimo cuando $Ec_B = 0$.

Por tanto: $Wext_{\min} = \Delta Ep_A^B = q \cdot (V_B - V_A)$

Sabemos que el potencial del campo eléctrico creado por una carga puntual, a una distancia r de la misma, viene dado por la expresión:

$$V = K \cdot \frac{Q}{r}$$

En nuestro caso, Como los dos puntos A y B se hallan a la misma distancia L (lado del cuadrado), tanto de Q_1, como de Q_2, el potencial en A y en B será el mismo, de modo que la diferencia de potencial entre ambos, será: V_B-V_A = 0.

Concluimos que: cuando q se traslade desde A hasta B, el trabajo exterior mínimo será 0.

Si quisiéramos calcular el potencial en A y B, bastaría tener en cuenta que:

$$V_A = V_B = V_1 + V_2 = \frac{K}{L}(Q_1 + Q_2)$$

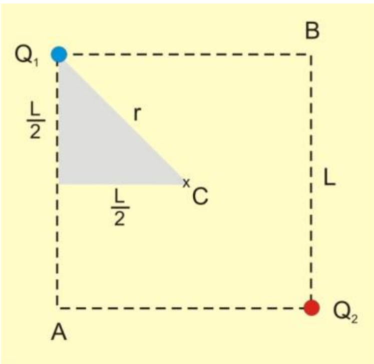
Y sustituyendo valores:

$$V_A = V_B = \frac{9 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^{-1}}(-9 + 6)10^{-6} = -1.35 \cdot 10^5 V$$

Supongamos que se quiere llevar la carga q desde el punto A hasta centro del cuadrado y luego desde dicho centro del cuadrado hasta el punto B (todo ello siguiendo la diagonal del mismo). Determinad el trabajo exterior mínimo necesario en cada uno de estos dos procesos.

Para obtener el trabajo que se nos pide, hemos de obtener antes el potencial total en el centro del cuadrado y para ello necesitamos conocer la distancia r a la que se encuentra C de cualquiera de las dos cargas:

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo sombreado en la figura siguiente:



$$r^{2´} = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{L^2}{2} \to r = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

Por tanto, el potencial en el centro del cuadrado es:

$$V_C = \frac{K \cdot \sqrt{2}}{L}(Q_1 + Q_2) = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot \sqrt{2}}{0'2} \cdot (-9 + 6) \cdot 10^{-6} = -1.91 \cdot 10^5 \ V$$

El trabajo exterior será:

$W_{ext\ (AC)} = q\cdot (V_C - V_A) = 3\cdot 10^{-6} \cdot (-1'91\cdot 10^5 + 1'35\cdot 10^5 +) = -1'68\cdot 10^{-1}$ J

$W_{ext\ (CB)} = q\cdot (V_B - V_C) = 3\cdot 10^{-6} \cdot (-1'35\cdot 10^5 + 1'91\cdot 10^5) = 1'68\cdot 10^{-1}$ J

Así pues: $W_{ext\ (AB)} = W_{ext\ (AC)} + W_{ext\ (CA)} = -1'68\cdot 10^{-1} + 1'68\cdot 10^{-1} = 0$

Podemos plantearnos ahora qué ocurre con la energía potencial de q (y el campo) en los dos pasos anteriores.

Para el tramo AC:

$W_{res\ (AC)} = W_{elec(AC)} + W_{ext(AC)} = \Delta Ec_{(AC)} = 0 \rightarrow W_{ext(AC)} = -W_{elec(AC)} = \Delta Ep_{(AC)} = -1'68\cdot 10^{-1}$ J

Para el tramo CB:

$W_{res\ (CB)} = W_{elec(CB)} + W_{ext(CB)} = \Delta Ec_{(CB)} = 0 \rightarrow W_{ext(CB)} = -W_{elec(CB)} = \Delta Ep_{(CB)} = 1'68\cdot 10^{-1}$ J

Así pues, en la transformación que lleva la carga q de 3 μC desde el vértice A hasta el centro C del cuadrado la energía potencial de q (y el campo) disminuye en $1'68\cdot 10^{-1}$ J, mientras que en la siguiente mitad (desde C hasta B), aumenta en la misma cantidad.

b) *Obtened la energía potencial del sistema cuando la carga q está en las posiciones A, C y B*

Obtenemos:

$Ep_A = q\cdot V_A = 3\cdot 10^{-6} \cdot (-1'35\cdot 10^5) = -4'05\cdot 10^{-1}$ J

$Ep_C = q\cdot V_C = 3\cdot 10^{-6} \cdot (-1'91\cdot 10^5) = -5'73\cdot 10^{-1}$ J

$Ep_B = q\cdot V_B = 3\cdot 10^{-6} \cdot (-1'35\cdot 10^5) = -4'05\cdot 10^{-1}$ J

En el desplazamiento desde A hasta C:

$\Delta Ep_{(AC)} = Ep_C - Ep_A = (-5'73 + 4'05)\cdot 10^{-1} = -1'68\cdot 10^{-1}$ J

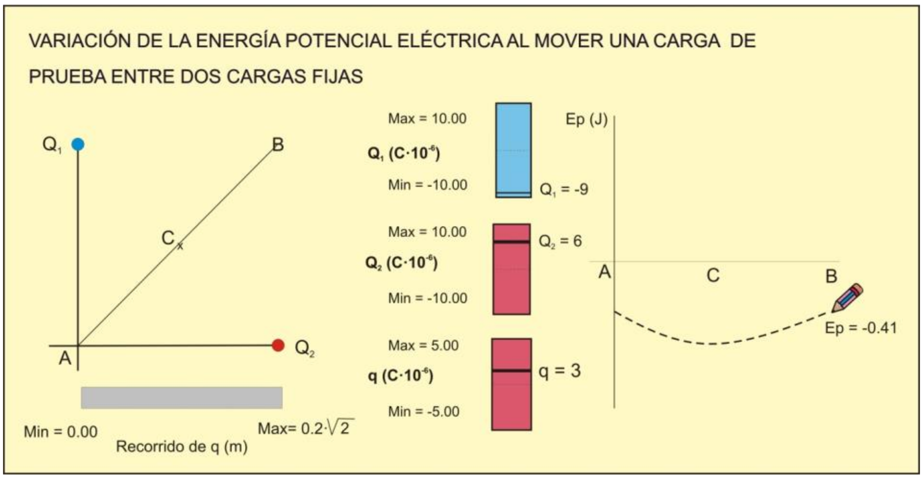
En el desplazamiento desde C hasta B:

$\Delta Ep_{(CB)} = Ep_B - Ep_C = (-4'05 + 5'73)\cdot 10^{-1} = 1'68\cdot 10^{-1}$ J

Como vemos, los resultados anteriores confirman que la energía potencial del sistema que forman las tres cargas es igual cuando la carga q se sitúa en las posiciones A y B (vértices del cuadrado) y menor cuando la carga q ocupa la posición C, intermedia entre A y B. En el desplazamiento de la carga q desde hasta C la energía potencial disminuye (transformación espontánea) y en el desplazamiento desde C hasta B aumenta (transformación forzada)

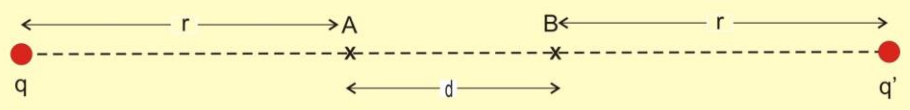
Todas estas cuestiones se pueden visualizar con una animación informática *Modellus* interactiva que, como hemos hecho en este problema, permite desplazar una carga de prueba q por la diagonal de un cuadrado en dos de cuyos vértices se sitúan dos cargas fijas. A medida que lo hacemos, la animación calcula y va representando la gráfica de la evolución de la energía potencial del sistema que forman las tres cargas y también aporta en cada instante el valor del potencial en el punto por donde está pasando la carga q. Se pueden modificar los valores de las tres cargas, así como el lado del cuadrado, para comprobar cómo afectan estas modificaciones a todos los resultados.

En la figura siguiente puede verse el aspecto de la pantalla al final de una transformación en la que se ha desplazado la carga q de prueba desde A hasta B y en la que se han adoptado los valores de las magnitudes que hemos considerado en este problema.



La animación y el programa para poder utilizarla en cualquier ordenador están disponibles en la página “Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física”, de la Sección Local de Alicante de la RSEF: http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm.

19. Para la distribución de cargas puntuales de la figura siguiente, se pide:



a) Razonad previamente (sin ningún tipo de cálculo) qué debería valer $V_A - V_B$ cuando, a igualdad de los restantes factores, se cumplan las siguientes situaciones particulares:

1) q = q'
2) d = 0
3) r = 0

b) Obtened la expresión de $V_A - V_B$ para la situación expuesta en la figura y analizadla comprobando si se contemplan o no en ella todas las predicciones anteriores

Se plantea aquí un ejercicio para manejar el concepto de potencial eléctrico. Se trata de un sistema formado por dos objetos con cargas del mismo signo y que se pueden considerar como puntuales.

Planteamiento cualitativo y emisión de hipótesis

Sabemos que el potencial eléctrico en el punto A, será la suma de las contribuciones de q y de q', y lo mismo ocurrirá en el punto B.

También sabemos que el potencial en un punto cualquiera del campo eléctrico generado por una carga puntual Q, viene dado por la expresión:

$$V = K \cdot \frac{Q}{r}$$

Siendo r la distancia de la carga Q a dicho punto.

El ejercicio está planteado para favorecer la reflexión previa elaborando hipótesis fundadas acerca de la influencia de cada uno de los casos planteados. Después, una vez obtenido el resultado, es cuando se puede analizar y comprobar si en él se contemplan o no dichas hipótesis.

Basándonos en la simetría que presenta la situación propuesta, cabe esperar que si las cargas q y q' fuesen iguales (manteniendo el resto de factores d y r constantes), V_A y V_B deberían valer lo mismo y, por tanto, se cumpliría que $V_A - V_B = 0$.

En cuanto a la influencia de la distancia d, si nos imaginamos que dicha distancia va disminuyendo (sin que cambien q, q' ni r), vemos que A y B se van aproximando, de forma que conforme d se acerque a 0, también se irá acercando a 0 la diferencia V_A-V_B. Cuando, finalmente se cumpla d = 0, A y B coincidirán en un mismo punto del campo eléctrico y, por tanto, **en ese caso**, carecerá de sentido hablar de diferencia de potencial.

Finalmente, si r = 0, nos encontramos con una situación particular, en la que la carga q estará en A y la carga q' en B. En dicha situación, dado que las cargas se consideran como puntuales, el potencial en A será únicamente el debido a q' y, análogamente, el potencial en B se deberá únicamente a q. Por tanto, en este caso:

$$V_A - V_B = K \cdot \frac{q'}{d} - K \cdot \frac{q}{d} = K \cdot \left(\frac{q' - q}{d}\right) \quad (1)$$

Resolución

A continuación, obtendremos la expresión general $V_A - V_B$ para la situación planteada en la figura. Para ello, deberemos sumar primero las contribuciones de cada carga al potencial eléctrico en cada uno de los puntos:

Potencial eléctrico en A: $V_A = K \cdot \frac{q}{r} + K \cdot \frac{q'}{(r+d)}$ (3)

Potencial eléctrico en B: $V_B = K \cdot \frac{q'}{r} + K \cdot \frac{q}{(r+d)}$ (4)

Diferencia de potencial: $V_A - V_B = K \cdot \frac{q}{r} + K \cdot \frac{q'}{(r+d)} - K \cdot \frac{q'}{r} - K \cdot \frac{q}{(r+d)}$

Que podemos escribir finalmente como:

$$V_A - V_B = K \cdot (q - q') \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+d}\right) \quad (5)$$

Análisis del resultado

Si en el resultado anterior, hacemos q = q' (manteniendo lo demás constante), comprobamos que, tal y como habíamos pensado, se cumple que $V_A - V_B = 0$.

Si hacemos que d disminuya (manteniendo cargas y r constantes), la resta de las dos fracciones situadas dentro del paréntesis disminuirá, con lo que $V_A - V_B$, también lo hará. Y si hacemos d

= 0, vemos que V_A-V_B = 0, lo cual es coherente con que, en ese caso, no tiene sentido hablar de diferencia de potencial, puesto que se trataría de un único punto..

Finalmente, veamos qué ocurre si hacemos r = 0.

Si en la expresión (5) hacemos r = 0 (manteniendo cargas y d constantes), no se obtiene (como, en principio, cabría esperar) la expresión (1), sino que resulta V_A-V_B = ∞. Por otra parte, si restamos las expresiones (3) y (4) correspondientes, respectivamente, a V_A y V_B, se obtiene una indeterminación (∞ - ∞). *¿Qué explicación podemos dar a esto?*

En ciencias como la Física o la Química, las expresiones que se manejan suelen tener un determinado campo de validez, fuera del cual no pueden aplicarse. En este problema, para determinar el valor del potencial del campo eléctrico a una distancia r de una carga Q (considerada como puntual) generadora de dicho campo, hemos utilizado la expresión:

$$V = K \cdot \frac{Q}{r}$$

Esta expresión **solo puede aplicarse para valores de r mayores que 0**, puesto que no tiene ningún sentido hablar del potencial que una carga puntual crea sobre sí misma. Por tanto, el resultado (5) solo es válido para r > 0.

20. Una esfera metálica (1) de 10 cm de radio, aislada, se carga a una tensión de $5 \cdot 10^3$ V. ¿Cuál es su carga en culombios? A continuación se une a otra esfera también metálica (2) descargada y aislada, de 8 cm de radio. ¿Cuál es la carga que adquiere (2)? ¿Cuánto vale el potencial de cada una después del contacto? Datos: K = $9 \cdot 10^9$ U.I.

Planteamiento cualitativo

En este problema el fenómeno implicado es una transferencia de carga de una esfera a otra. Podemos generalizarlo imaginando que antes de que se pongan en contacto cada esfera pueda tener una determinada carga: Q_1 la esfera (1) y Q_2 la esfera (2). Sabemos que para que se produzca esa transferencia de carga de una a otra al conectarse entre sí, debe haber una diferencia de potencial inicial entre las dos esferas. Entonces, se producirá una transferencia de carga positiva desde la que está a mayor potencial a la otra cuyo potencial es menor, hasta que ambos potenciales se igualen.[7]

También sabemos que el potencial a que se encuentre cada esfera, depende de la carga neta que tenga y de su radio. Podemos decir que potencial eléctrico mide de alguna forma "la densidad de carga neta", ya que cuanto mayor sea la carga neta por unidad de superficie, mayor será el potencial de la esfera (en valor absoluto).

Para simplificar el problema, supondremos que el medio es el vacío y que no existe ninguna influencia de las esferas entre ellas que no sea el conductor con el que las unimos. También supondremos que no hay ninguna pérdida de carga al exterior.

El problema, se puede, pues, reformular, con un enunciado más abierto y más general, como:

Dos esferas conductoras cargadas y convenientemente alejadas, se conectan mediante un hilo conductor. ¿Qué carga pasa de una a otra?

Hipótesis

De acuerdo con las consideraciones anteriores, podemos pensar que, la carga Q transferida dependerá de los valores iniciales de carga de cada esfera Q_1 y Q_2, así como de los radios respectivos R_1 y R_2:

$Q = f(Q_1, Q_2, R_1, R_2)$

Concretamente, cabe suponer que, cuando se mantienen constantes los restantes factores:

Q aumente cuanto mayor sea la diferencia de carga entre ambas esferas
Q aumente cuanto mayor sea la diferencia entre los radios de ambas esferas

Podemos imaginar algunos supuestos de fácil interpretación. Por ejemplo: si las dos esferas tuviesen el mismo tamaño ($R_1 = R_2$), la esfera (2) estuviese inicialmente descargada y la esfera

[7] En realidad, son los electrones (cargas negativas) quienes se mueven y se trasladan desde la esfera a menor potencial hacia la esfera a mayor potencial, aunque el resultado es totalmente equivalente a un movimiento de carga positiva en sentido contrario.

(1) cargada con Q_1 (positiva), la carga positiva transferida Q, valdría justamente $Q_1/2$ e iría de (1) a (2). Si se repitiese la misma situación pero siendo ahora la carga de la esfera (1) negativa, entonces la carga Q transferida valdría justamente $-Q_1/2$.

Por supuesto, si las dos esferas fueran del mismo tamaño ($R_1 = R_2$) y tuviesen inicialmente la misma carga ($Q_1 = Q_2$), entonces no habría ninguna transferencia de carga, es decir, sería Q = 0.

Ahora bien, este resultado (Q = 0) también se podría dar aunque las dos esferas no tuvieran el mismo tamaño ($R_1 \neq R_2$), ya que una diferencia de tamaño entre ellas no impide que ambas puedan cargarse aplicándoles el mismo potencial ($V_1 = V_2$). Este proceso llevaría a la esfera de mayor radio a adquirir una carga inicial también mayor que la de menor radio ($Q_1 \neq Q_2$). Este caso posible nos recuerda que lo que es determinante para que haya una transferencia de carga entre las esferas, no es que haya más carga en una que en otra sino que el potencial de una sea mayor que el de la otra.

Otro caso particular de este tipo que podemos plantear es lo que ocurrirá cuando ambas esferas posean inicialmente la misma carga neta ($Q_1 = Q_2$) pero sean de distinto tamaño ($R_1 \neq R_2$). Evidentemente, en este caso también se ha de producir una transferencia de carga, ya que el potencial de la de menor radio será mayor que el potencial de la otra, y pasará carga positiva de la primera a la segunda[8].

Estrategias de resolución y resolución

Una vez producido el contacto y efectuada la transferencia de carga desde la esfera a mayor potencial a la otra, el potencial final de ambas esferas deberá ser el mismo. Por tanto, una forma de resolver el problema, será expresar el potencial final de cada esfera $V_1^{'}$ y $V_2^{'}$ en función de su carga final y el radio e igualarlos, teniendo en cuenta que no hay ninguna pérdida de carga y que, por tanto, la carga perdida por una ha de ser justo la ganada por la otra. Así, en el caso que el potencial inicial de la esfera (1), sea mayor que el potencial inicial a que se halla la esfera (2), el transvase de carga positiva se producirá de (1) hacia (2), de modo que:

Situación inicial (esferas aisladas, separadas y sin influencia mutua):

Esfera (1): $V_1 = K \cdot \dfrac{Q_1}{R_1}$

Esfera (2): $V_2 = K \cdot \dfrac{Q_2}{R_2}$

Transferencia de carga Q de (1) a (2), de modo que la carga final en la primera esfera será Q_1-Q y en la segunda Q_2+Q

Situación final (después de conectar ambas esferas):

[8] Es algo parecido a lo que ocurre cuando se ponen en contacto dos recipientes que contienen la misma cantidad de agua pero en uno el nivel del agua es mayor que en el otro. Habrá un transvase de agua desde donde hay más nivel al otro, hasta que se igualen los niveles (situación de equilibrio)

Esfera (1): $V_1^{'} = K \cdot \dfrac{Q_1 - Q}{R_1}$

Esfera (2): $V_2^{'} = K \cdot \dfrac{Q_2 + Q}{R_2}$

Igualando los potenciales finales:

$$V_1^{'} = V_2^{'} \rightarrow K \cdot \frac{Q_1 - Q}{R_1} = K \cdot \frac{Q_2 + Q}{R_2}$$

Y despejando Q, obtenemos finalmente: $Q = \dfrac{Q_1 R_2 - Q_2 R_1}{R_1 + R_2}$

Podemos ahora sustituir numéricamente para obtener el valor pedido de acuerdo con los datos concretos que se nos dan en el enunciado:

Para conocer Q, necesitamos conocer Q_1, ya que $Q_2 = 0$.

De $V_1 = K \cdot \dfrac{Q_1}{R_1}$ se obtiene el valor inicial de la carga neta de la esfera (1):

$$Q_1 = \frac{V_1 \cdot R_1}{K} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-1}}{9 \cdot 10^9} = 5'56 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C}$$

Sustituyendo valores en el resultado literal:

$$Q = \frac{Q_1 R_2 - Q_2 R_1}{R_1 + R_2} = \frac{5'56 \cdot 10^{-8} \cdot 8 \cdot 10^{-2}}{18 \cdot 10^{-2}} = 2'47 \cdot 10^{-8}\ C$$

Análisis de resultados y perspectivas

Como es lógico, el resultado obtenido es válido mientras se cumplan las condiciones impuestas, es decir, que la influencia mutua entre las esferas separadas sea despreciable y que V_1 sea mayor que V_2.

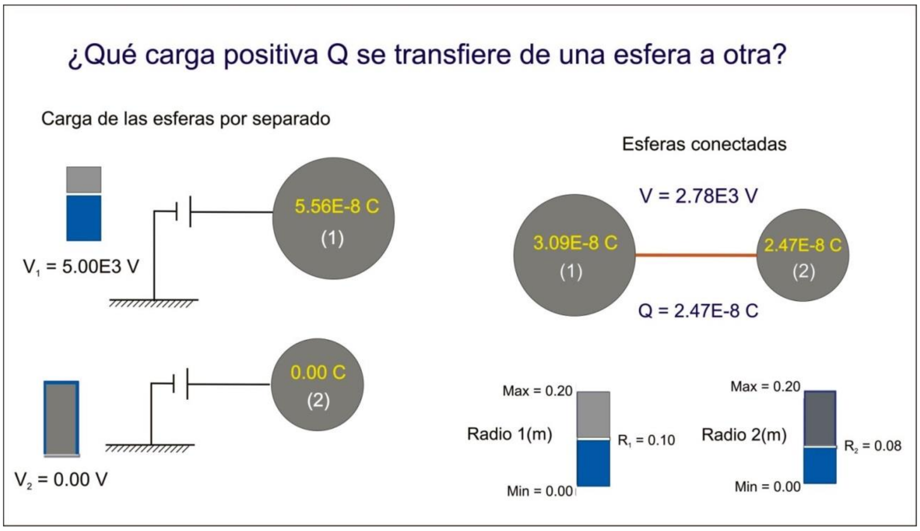
Si nos fijamos en el resultado literal obtenido, podemos ver en primer lugar que es dimensionalmente homogéneo (Q en ambos lados de la igualdad) y que, además, contempla todas las hipótesis y casos particulares considerados al comienzo. Así, por ejemplo, vemos que, efectivamente, si $R_1 = R_2$ y $Q_2 = 0$, ocurre que $Q = Q_1/2$. Este resultado concreto, permite ir más allá y plantearse que este procedimiento se podría utilizar para obtener, a partir de una carga dada otras que valiesen la mitad, la cuarta parte, etc.

Finalmente, también podríamos plantearnos por lo que ocurriría en caso de no despreciar la influencia mutua entre dos esferas cargadas separadas una cierta distancia entre ellas. Concretamente: ¿Cómo calcular en ese caso el potencial de cada una, conocidas las cargas y los radios? ¿Es posible que un objeto esté cargado eléctricamente y el potencial a que se encuentre sea 0?

Refuerzo:

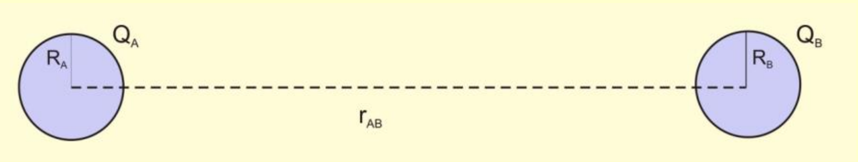
Para reforzar los conceptos involucrados en este problema hemos creado una animación *Modellus*, en la que se representa a las esferas durante su carga previa y la situación que resulta después de que se pongan en contacto. En la pantalla se dispone de cuatro controladores manuales con los que los alumnos pueden modificar los potenciales que se aplican a cada una de las esferas para cargarlas inicialmente, así como los radios de cada una de ellas. Modificando estos parámetros pueden poner a prueba las hipótesis y probar concretamente cualquiera de los casos particulares que hemos comentado aquí (cargas iguales con el mismo o diferente tamaño, potenciales iguales, potencial mayor de una o de otra esfera,…) La animación resuelve el problema mostrando la carga final de las dos esferas, la carga que se transfiere entre ellas y el potencial común después de la conexión.

La imagen siguiente corresponde al caso en el que los valores de todas las magnitudes coinciden con los que hemos adoptado en esta resolución literal.



La animación y el programa para hacerla correr están disponibles en la página "Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física", de la Sección Local de Alicante de la RSEF. http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm

21. Supongamos que tenemos dos pequeñas esferas idénticas A y B conductoras, cargadas eléctricamente, aisladas y separadas una cierta distancia la una de la otra. Se pide:



a) Razonad qué condiciones deberían darse para que el potencial eléctrico en la superficie de una de ellas sea nulo.

b) Inventad valores numéricos adecuados (radios, cargas, distancia entre esferas), tales que el potencial de una de las esferas resulte 0, sin que ninguna de las dos esté descargada.

a) Supondremos que se trata de dos esferas conductoras y aisladas.

Si no existe influencia de una en la otra, la carga de cada una se repartirá homogéneamente por su superficie y el potencial en su superficie (y también en el interior) sería constante, valiendo en cada caso:

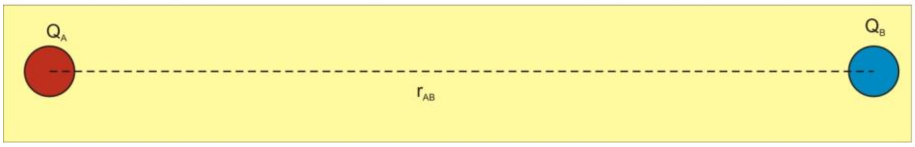
Esfera A: $V_A = K \cdot \dfrac{Q_A}{R_A}$, Esfera B: $V_B = K \cdot \dfrac{Q_B}{R_B}$

Así pues, en la situación expuesta, el potencial eléctrico no podría ser nulo en ninguna de las dos esferas.

Pensad en una situación diferente a la expuesta en la que pudiera darse que el potencial en la superficie de una de las esferas fuese nulo.

Una situación como la que se acaba de exponer, podemos resolverla dentro del nivel educativo en que nos encontramos, siempre que la distancia existente entre ambas esferas sea lo suficientemente grande (comparada con el radio) como para permitir que se puedan despreciar los efectos de la polarización debida a la inducción. En ese caso, podríamos suponer que cada esfera se comporta como una carga puntual y el problema se simplifica.

En la figura siguiente se ha intentado representar la situación, suponiendo que Q_B es negativa y que Q_A es positiva.



En esas condiciones, el potencial en la superficie de cada esfera será:

Esfera A: $V_A = K \cdot \frac{Q_A}{R_A} + K \cdot \frac{Q_B}{r_{AB}}$

Esfera B: $V_B = K \cdot \frac{Q_B}{R_B} + K \cdot \frac{Q_A}{r_{AB}}$

b) Para que el potencial en la superficie de una de las esferas (por ejemplo, la A) fuese nulo, debería cumplirse que:

$$K \cdot \frac{Q_A}{R_A} + K \cdot \frac{Q_B}{r_{AB}} = 0$$

Supongamos, por ejemplo, que: $Q_A = 3 \cdot 10^{-8}$ C, R =10 cm y $r_{AB} = 2$ m. ¿Para qué valor de Q_B se obtendría $V_A = 0$?

Basta con utilizar la ecuación anterior para obtener que, ello se produciría para $Q_B = -60 \cdot 10^{-8}$ C

En efecto, en ese caso:

$$K \cdot \frac{Q_A}{R_A} + K \cdot \frac{Q_B}{r_{AB}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{3 \cdot 10^{-8}}{0'1} - \frac{60 \cdot 10^{-8}}{2} \right) = 0$$

La resolución de este ejercicio, permite imaginar y responder nuevas preguntas. Por ejemplo:

En un sistema aislado formado por dos pequeñas esferas separadas una cierta distancia la una de la otra, ¿qué condiciones deberían darse para que el potencial eléctrico en la superficie de una de ellas no fuese 0, aunque estuviese descargada?

Una respuesta aceptable a esta pregunta sería que en la situación que acabamos de exponer, si, por ejemplo $Q_B = 0$ y $Q_A \neq 0$, el potencial en la superficie de B no sería nulo, sino que valdría:

$$V_B = K \cdot \frac{Q_A}{r_{AB}} \neq 0$$

Dicho potencial, se debería al campo eléctrico creado por la carga Q_A

22. Teniendo en cuenta la expresión que relaciona el trabajo realizado por el campo eléctrico con la diferencia de potencial entre dos puntos del mismo, así como la proporcionalidad existente entre fuerza e intensidad de campo, obtened una expresión que relacione la intensidad del campo con la diferencia de potencial.

Sabemos que el trabajo realizado por las fuerzas del campo eléctrico cuando se traslada una carga testigo desde un punto A hasta otro punto B, se relaciona con la diferencia de potencial entre esos dos puntos, de acuerdo la ecuación siguiente:

W = -q (V_B - V_A) o lo que es equivalente: $W = -q\int_A^B dV$ (1)

Ese mismo trabajo se puede expresar también como:

$$W = \int_A^B F_t \cdot de = \int_A^B qE_t \cdot de = q\int_A^B E_t \cdot de \quad (2)$$

En la expresión (2) anterior, “F_t” es la componente escalar tangencial del vector fuerza eléctrica que actúa sobre una pequeña carga “q” que se mueve en el seno de un campo eléctrico siguiendo una trayectoria que se conoce de antemano, y “de” un cambio de posición infinitesimal experimentado por dicha carga (también se suele designar como “dr”).

Haciendo (1) = (2) obtenemos que: $-\int_A^B dV = \int_A^B E_t \cdot de$ y por tanto:

-ΔV = $\int_A^B E_t \cdot de$ o bien para un desplazamiento infinitesimal: -dV = E_t · de

La última expresión obtenida también suele escribirse como $E_t = -\dfrac{dV}{de}$ (3)

Cuando se escribe de esta forma es fácil comprender el hecho de que en un desplazamiento infinitesimal, la variación de V con la posición sobre la trayectoria "e", nos indica (cambiado de signo) el valor de la componente tangencial del vector intensidad de campo eléctrico en el punto considerado.

Utilizad la expresión (3) para:

a) *Comprobar que la intensidad del campo eléctrico en un punto ha de ser perpendicular a la superficie equipotencial que contiene a dicho punto.*

En efecto, al ser equipotencial, la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera contenidos en dicha superficie ha de ser nula. Ello implica que dado un punto cualquiera de una superficie equipotencial, al desplazarnos un “de” sobre dicha superficie, se cumplirá que dV = 0, con lo que, de acuerdo con (3), E_t también será 0. Por tanto, el vector campo eléctrico $\vec{E}$ en esos puntos, solo tiene componente normal, o, lo que es equivalente, el vector intensidad de campo eléctrico en cualquier punto de una superficie equipotencial ha de ser perpendicular a dicha superficie. En consecuencia, dado que las líneas de fuerza son siempre tangentes a la intensidad del campo eléctrico, también podemos concluir que las líneas de fuerza de cualquier campo eléctrico atraviesan siempre perpendicularmente a cualquier superficie equipotencial.

b) *Deducir la relación existente entre la variación de energía potencial y la fuerza eléctrica realizada por el campo en un desplazamiento infinitesimal.*

A partir de $E_t = -\frac{dV}{de}$ y multiplicando por "q": $q \cdot E_t = -\frac{q \cdot dV}{de} \rightarrow F_t = -\frac{dE_p}{de}$

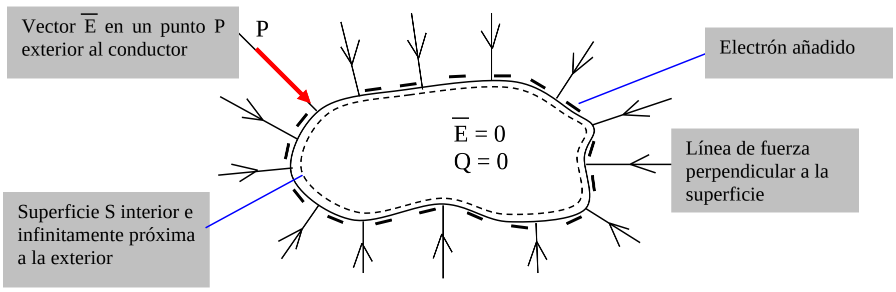
c) Demostrar que en el interior de un conductor cargado y en equilibrio electrostático, el potencial V es constante.

En efecto, cargar eléctricamente un conductor inicialmente neutro, supone descompensar su carga neta nula añadiendo o extrayendo electrones. Partiendo de esta situación, es lógico pensar que el exceso "Q" de carga añadido (sea esta positiva o negativa), al tratarse de un material conductor por el que las cargas libres se pueden mover con gran facilidad, se distribuirá por toda la superficie exterior, del conductor, ya que entre las cargas libres que suman la carga Q añadida, se ejercerán fuerzas de repulsión y, consecuentemente, se separarán lo más posible unas de otras hasta que al llegar a la superficie exterior, se alcanza una situación de "equilibrio electrostático". Todo este proceso puede durar apenas una pequeña fracción de segundo.

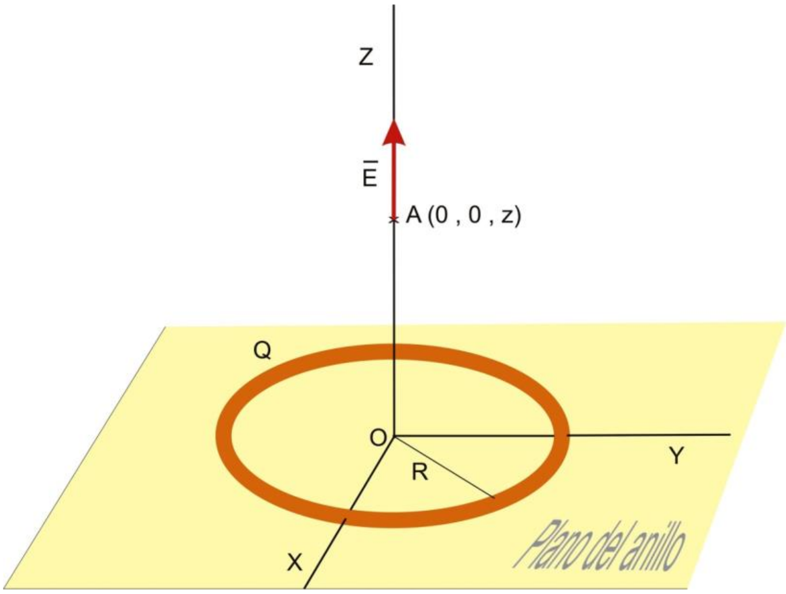
De acuerdo con las consideraciones anteriores, se puede comprender que, en cualquier punto del interior del conductor, una vez alcanzado el estado de equilibrio, no existirá campo eléctrico alguno, puesto que si lo hubiese, ello provocaría inmediatamente un movimiento de carga (electrones) por el interior del material conductor, incompatible con el hecho experimental observado de equilibrio electrostático.

Por tanto, si en el interior del conductor E = 0 y no hay desplazamiento de cargas, de acuerdo con la expresión (3) anterior, se cumplirá que:

El potencial V en el interior del conductor cargado y en equilibrio electrostático, ha de ser constante e igual al existente en la superficie.



Este ejercicio también se puede extender comprobando cómo la expresión obtenida, también sirve para resolver de forma más sencilla, otros problemas que ya se abordaron anteriormente. Este sería el caso, por ejemplo, del problema 5 en el que se planteaba la determinación de la intensidad del campo eléctrico creado por un anillo cargado en un punto del eje perpendicular al plano del anillo y que pasa por su centro (ved figura siguiente).



En el problema 5 obtuvimos (laboriosamente) que los valores de E y de V que caracterizan el campo eléctrico generado por la carga neta Q del anillo de la figura, en el punto A, eran respectivamente:

$$E = K \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot 2 \cdot \left(1 - \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right) \quad (5)$$

$$V = K \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot 2 \cdot (\sqrt{R^2 + z^2} - z) \quad (6)$$

Otro método alternativo de obtener E hubiese sido obtener primero el valor de V y después aplicar la expresión (3) para determinar E. Comprobadlo.

La variable para indicar la posición sobre la trayectoria, sería ahora la coordenada “z”. Por tanto, se trata, simplemente de aplicar la expresión E_t = -dV/dz a la ecuación (6) y simplificar, con lo que se obtiene rápidamente, el valor de E.

$$E_t = -\frac{dV}{dz} = K \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot 2 \cdot \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)$$

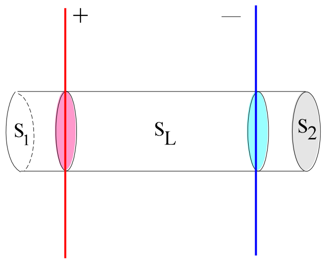
Esto mismo, se puede hacer en el caso de un disco cargado (problema 6).

La relación entre la intensidad del campo eléctrico y el potencial (E_t = -dV/de), también se puede utilizar para obtener la intensidad del campo eléctrico existente entre las placas de un condensador. Esto es lo que se aborda en el ejercicio siguiente.

23. Determinad la intensidad del campo eléctrico creado por dos placas conductoras paralelas y de superficies planas, con cargas iguales pero de distinto signo, en un punto situado entre las mismas.

Entre las placas existirá un campo eléctrico debido a una y otra distribución de cargas, por lo que en primer lugar conviene que nos planteemos *qué características tendrá ese campo.*

En principio, cabe pensar que la dirección del vector $\vec{E}$ en la superficie de cualquiera de las placas tendrá que ser perpendicular (de otra forma las cargas no estarían en equilibrio). Para comprobar si esta hipótesis es cierta, podemos utilizar el teorema de Gauss aplicándolo al cilindro de la figura, cuyas bases quedan en el interior de cada una de las placas[9]:



$\phi_T = 4\pi K q$ siendo q la carga total encerrada en el cilindro.

Y como la carga existente en la intersección del cilindro con cada placa es la misma pero de signo contrario, q = 0. Por tanto, $\phi_T = 0$ y si descomponemos este flujo, considerando las bases del cilindro y la superficie lateral:

$\phi_T = \phi_1 + \phi_2 + \phi_L = 0$

Como ϕ_1 y ϕ_2 son nulos porque se hallan en el interior del conductor y allí la intensidad del campo es 0, hemos de concluir que:

$$\phi_L = \oint \vec{E} \bullet d\vec{S} = 0$$

Y como ni $\vec{E}$ ni tampoco $d\vec{S}$ son nulos, necesariamente han de ser perpendiculares en todos los puntos de la superficie S_L y, por tanto, el vector intensidad del campo eléctrico tendrá que ser perpendicular a las láminas y dirigido de la positiva hacia la negativa.

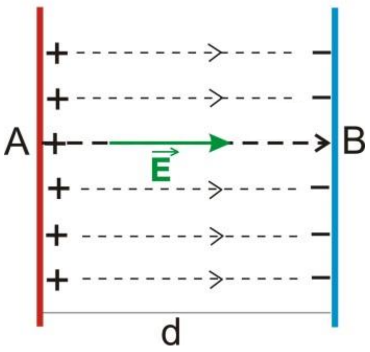
En estas condiciones, las líneas del campo entre las placas serán paralelas, lo que, como ya vimos, significa que en todos los puntos el módulo de $\vec{E}$ será el mismo, es decir, se trata de un campo eléctrico uniforme.

¿De qué factores dependerá E? ¿Cómo podríamos hallarlo?

---

[9] Atención, las superficies de las placas son planas, pero las propias placas tienen un cierto grosor, de forma que tanto S_1 como S_2 figura que se hallan en el interior de cada placa. Las líneas roja y azul del dibujo, representan solo las caras enfrentadas de cada placa (vistas de canto).

Si llamamos V_{AB} a la diferencia de potencial existente entre las placas positiva (A) y negativa (B), de forma que $V_{AB} = V_A - V_B > 0$ y d a la distancia a que se encuentran separadas, podemos pensar que cuanto mayor sea V_{AB} y menor la distancia que las separa, más intenso deberá ser el campo existente entre dichas placas.



Para determinar E podemos utilizar la expresión, ya conocida:

$\int_A^B E_t \cdot de = -\int_A^B dV$ aplicándola al trayecto rectilíneo representado en la figura anterior.

$\int_A^B E_t \cdot de = -\int_A^B dV \rightarrow E_t \cdot d = -(V_B - V_A)$

Y como, en este caso, $E = E_t$, obtenemos finalmente:

$$E = \frac{V_A - V_B}{d}$$

como módulo de la intensidad del campo eléctrico existente en cualquier punto situado entre dos placas conductoras (alejado de los extremos) como las representadas en la figura.

24. Sea un condensador plano vertical cargado a una diferencia de potencial de 5000 V. Entre sus placas, separadas 20 cm, se sitúa un péndulo eléctrico cuya esfera metálica tiene 1 mm de radio y una densidad de 5 g/cm³. Determinad el ángulo que formará el péndulo en situación de equilibrio, si la esfera del mismo se cargó a 2000 V.

Un condensador es un dispositivo formado por dos partes metálicas (llamadas armaduras) que están separadas por un aislante. En nuestro caso, las partes metálicas son dos placas de superficies planas y paralelas y el aislante será el aire.

¿Qué es lo que sucede cuando dos láminas conductoras, iguales, descargadas y paralelas, se conectan a los extremos de un generador?

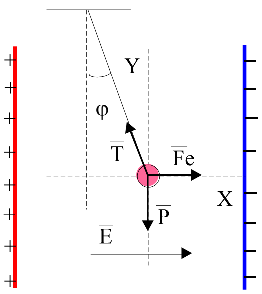
Al estar las láminas inicialmente descargadas, el potencial en ellas será nulo, de modo que por los hilos conductores circularán cargas hasta que el potencial de la placa conectada al polo positivo se iguale al de este, y la placa conectada al polo negativo también se iguale al potencial de dicho polo. Es decir, habrá flujo de cargas hasta que la diferencia de potencial entre las láminas sea la misma que entre los polos del generador, siendo la carga adquirida por una lámina, igual y de signo contrario a la adquirida por la otra. Las cargas suministradas por el generador a cada lámina se distribuirán por su superficie alejándose lo más posible unas de otras (ya que se repelen y las láminas son conductoras) hasta alcanzar una situación de equilibrio (reposo).

Entre las láminas del condensador cargado se establece un campo eléctrico uniforme creado por las distribuciones de carga existentes en ellas. Dicho campo es perpendicular a las láminas (sentido desde la positiva a la negativa) y su módulo vale $E = V_{AD}/d$ (ved problema anterior), siendo V_{AD} la diferencia de potencial existente entre las láminas (igual a la suministrada por el generador V_{BC}) y d la distancia a que se hallan separadas.

En el problema se nos dice que entre las láminas de un condensador plano se introduce un péndulo cuya esfera se halla cargada eléctricamente.

¿Qué le ocurrirá a la esfera?

Para comprender lo que le sucede, conviene comenzar viendo qué fuerzas actúan sobre ella. Al encontrarse en el seno de un campo eléctrico y estar cargada, sobre la esfera, además del peso $\vec{P}$ y de la tensión $\vec{T}$ del hilo, actuará una tercera fuerza que será la fuerza electrostática $\vec{F}_e$ ejercida por el campo, lo que da lugar al estado de equilibrio representado en la figura de la derecha, en el que la esferita se halla en reposo y donde se cumplirá que:



$$\vec{F}_e + \vec{P} + \vec{T} = 0$$

Como podemos ver en la figura, el hilo del péndulo forma un cierto ángulo φ respecto de la vertical. Podemos plantearnos ahora:

¿De qué dependerá dicho ángulo y cómo lo hará?

Cabe esperar que el ángulo φ dependa de la carga del péndulo, q, de la diferencia de potencial entre las placas, V_{AD}, del peso (masa, m, y gravedad, g) de la bolita y de la distancia entre las placas, d:

$$\varphi = f\,(q, V_{AD}, m, g, d)$$

Concretamente, cabe esperar que cuanto mayor sea la diferencia de potencial entre las láminas, V_{AD}, mayor sea el ángulo buscado, puesto que una diferencia de potencial mayor implica que sea mayor la intensidad del campo eléctrico establecido entre las placas y, por tanto, F_e (puesto que $F_e = q\cdot E$). Análogamente ocurrirá con la carga q, puesto que a mayor valor de q (a igualdad siempre de los restantes factores), también será mayor la fuerza eléctrica sobre la bolita y, consecuentemente, mayor será φ. En cuanto a la influencia del peso de la bolita, cuanto mayor sean tanto m, como g, cabe esperar que sea menor el ángulo buscado, porque la fuerza peso actúa sobre el péndulo eléctrico en dirección vertical y descendente. Finalmente, con respecto a la influencia de la distancia d entre las placas, cabe esperar que cuanto mayor sea esta, menor sea el valor del ángulo φ, porque menor será F_e ya que la intensidad del campo eléctrico que se establece entre las placas es inversamente proporcional a d ($E=V_{AD}/d$).

Es posible también imaginar algunos casos límite evidentes como, por ejemplo, que si la diferencia de potencial fuese nula, φ valdría 0; o que si el peso fuese nulo (por ejemplo, si no hubiese gravedad), el ángulo debería ser 90º.

Estrategias de resolución y resolución

Una posible estrategia para obtener, φ, es empezar aplicando la condición de equilibrio:

$$\vec{F}_e + \vec{P} + \vec{T} = 0$$

Seguidamente habrá que expresar cada uno de los vectores en función de sus componentes escalares y despejar φ.

De esta forma tenemos:

$\vec{F}_e = q\cdot \vec{E} = q\cdot (E, 0) = (qE\ , 0)$

$\vec{P} = (0\ , -P) = (0\ , -mg)$

$\vec{T} = (T_x\ , T_y) = \left[T\cdot\cos(90+\varphi)\ , \ T\cos\varphi\right] = (-T\text{sen}\ \varphi\ , T\cos\ \varphi)$

Sustituyendo en: $\vec{F}_e + \vec{P} + \vec{T} = 0 \rightarrow (qE\ , 0) + (0\ , -mg) + (-T\text{sen}\ \varphi\ , T\cos\ \varphi) = 0$

La ecuación vectorial obtenida puede descomponerse en dos escalares:

$qE - T\text{sen}\ \varphi = 0 \ \rightarrow T\text{sen}\ \varphi = qE$

$T\cos\ \varphi - mg = 0 \rightarrow T\cos\ \varphi = mg$

Dividiendo entre si ambas ecuaciones obtenemos: $tg\,\varphi = \dfrac{qE}{mg}$

Y teniendo en cuenta que $E = \frac{V_{AD}}{d}$, obtenemos finalmente: $tg\varphi = \frac{q \cdot V_{AD}}{mg \cdot d}$

Podemos ahora, *analizar este primer resultado*, comprobando que, además de ser dimensionalmente homogéneo, contempla las hipótesis iniciales siendo fácil ver, por ejemplo, que cuanto mayor sea la carga q mayor será el ángulo φ (siempre a igualdad de los restantes factores), o que si el campo gravitatorio fuese nulo tg φ sería ∞, lo cual corresponde a un ángulo de 90º y que si no hubiese diferencia de potencial entre las placas, tg φ sería 0, lo cual corresponde a un ángulo de 0º (hilo en la vertical).

Ahora bien, teniendo en cuenta cuáles son los datos que proporciona el enunciado, para calcular el valor de φ todavía nos queda *averiguar el valor de q y de la masa de la esfera conductora*. Para obtener la carga, q, sabemos que la esferita se cargó a 2000 V.

Por tanto, a partir de V = $K \cdot \frac{q}{R}$, podemos despejar q, con lo que se obtiene:

$$q = \frac{V \cdot R}{K} = \frac{2000 \cdot 10^{-3}}{9 \cdot 10^{9}} = 2'22 \cdot 10^{-10}\ C$$

En cuanto a la masa, como conocemos la densidad basta hacer m = $\rho \cdot V$, siendo V el volumen de la esferita y ρ su densidad, de manera que:

$$m = 5000 \cdot \frac{4}{3}\pi^{3}(10^{-3})^{3} = 2'1 \cdot 10^{-5}\ kg$$

Sustituyendo los valores numéricos hallados en el resultado literal, obtenemos:

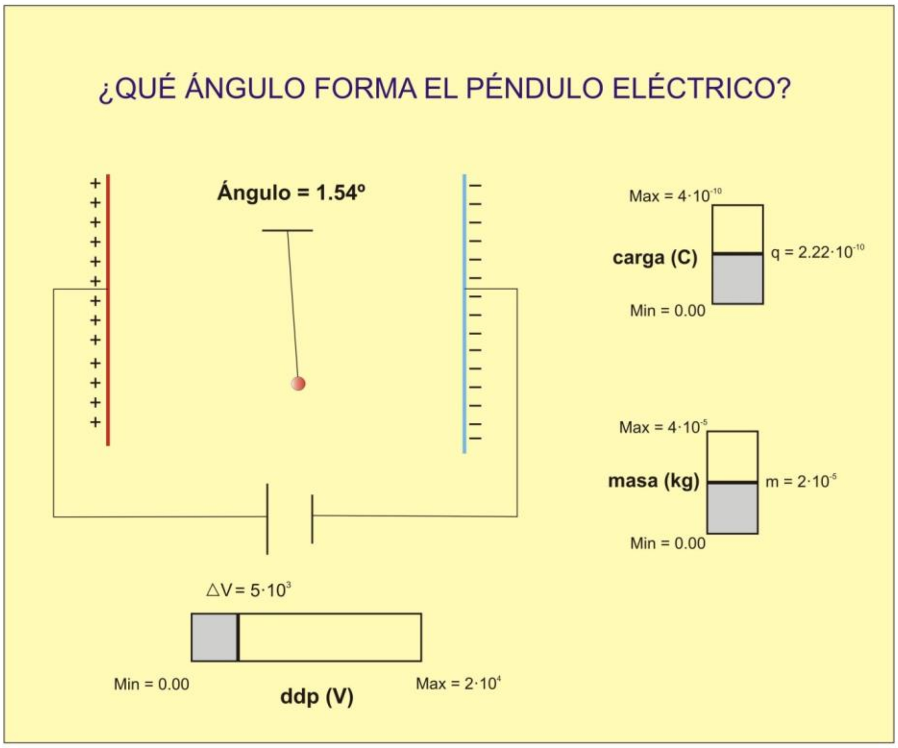
$tg\ \varphi = 2'7 \cdot 10^{-2} \rightarrow \varphi = 1'5º$

Como es lógico este dispositivo se puede utilizar también para, conocido experimentalmente el valor del ángulo que se desvía el péndulo, poder determinar el valor de una carga desconocida.

Refuerzo:

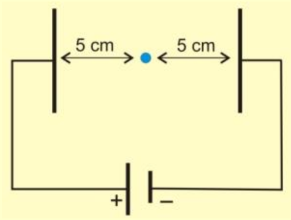
Para reforzar este problema, los alumnos pueden usar una animación *Modellus*, que hemos elaborado sobre él. Con ella, los estudiantes pueden probar diferentes valores del potencial aplicado entre las placas del condensador, así como de la carga y de la masa del pendulito eléctrico.

La figura siguiente muestra el aspecto de la pantalla cuando los valores de todos estos parámetros coinciden con los que hemos adoptado aquí.



La animación y el programa para hacerla correr están disponibles en la página "Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física", de la Sección Local de Alicante de la RSEF. http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm

25. Una pequeña esfera conductora de 10 μg de masa y 1 mm de radio se carga conectándola a un potencial de -9000 V. Si se deja en el punto medio entre dos láminas verticales separadas 10 cm y conectadas a una diferencia de potencial ΔV, determinad:



Valor de ΔV, si sabemos que llega hasta la lámina correspondiente con una rapidez de 10 m/s (se desprecia el efecto de la fuerza peso).

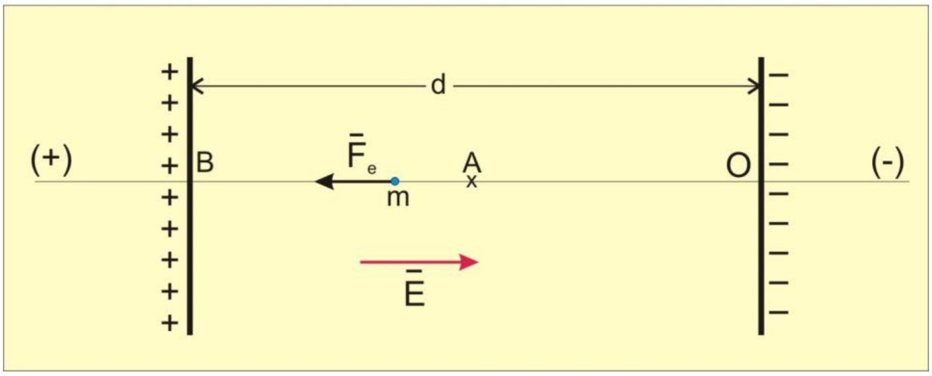
Para comenzar, obtendremos la carga, q, que adquirió la esfera cuando se conectó a un potencial de - 9000 V:

Sabemos que el potencial en la superficie de una esfera cargada viene dado por:

$V = K \cdot q/R$

Bastará, pues, con despejar q y sustituir: $q = V \cdot R/K = -9000 \cdot 10^{-1} / 9 \cdot 10^{9} = -10^{-7}$C

Al tener en cuenta este dato, vemos que sobre la esfera, se ejerce una fuerza eléctrica F_e horizontal, constante y de sentido opuesto al del campo eléctrico establecido entre las placas del condensador (ya que la carga de dicha esfera es negativa). Por tanto, se moverá desde el punto A hasta el B, con movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado.



Si se quiere que llegue a B con una determinada rapidez v_B, es lógico plantear que la diferencia de potencial ΔV necesaria entre las placas, dependerá del valor que se asigne a v_B, de la carga q y la masa m de la esfera, de su posición inicial e_A y de la distancia d entre ambas placas.

$$\Delta V = f\,(v_B, q, m, e_A, d)$$

Más concretamente, a igualdad de los restantes factores, cabe esperar que ΔV sea mayor cuanto mayor sea v_B y también cuanto mayor sea m, (ya que un valor mayor de dicha masa, inercial, implicará una menor aceleración de la esfera) y la distancia d entre las placas (ya que una distancia mayor implica una fuerza eléctrica más débil sobre ella). En cambio, la ΔV deberá ser menor cuanto mayor sea q y también cuanto mayor sea el desplazamiento $e_B - e_A$ ya que, a mayor valor de q, mayor será la fuerza eléctrica sobre la esferita y a mayor desplazamiento (siempre a igualdad de los restantes factores), mayor será la distancia recorrida y, por tanto, durante más tiempo estará actuando la fuerza eléctrica.

¿Cómo podemos resolver el problema?

Podemos plantear, como en el problema anterior sendas estrategias de resolución (cinemático-dinámica o trabajo y energía). Nos decantaremos, en este caso, por la primera:

Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica:

$$Fres_t = m \cdot a_t \rightarrow Fe = m \cdot a_t \rightarrow q \cdot E = m \cdot a_t \rightarrow \quad a_t = \frac{q \cdot E}{m}$$

Teniendo en cuenta que E = ΔV/d y sustituyendo en la ecuación anterior: $a_t = \dfrac{q \cdot \Delta V}{m \cdot d}$

Dado que la aceleración tangencial es constante, se trata, como ya hemos indicado, de un movimiento uniformemente acelerado, cuyas ecuaciones son:

$$v = v_0 + a_t \cdot (t - t_0)$$
$$e = e_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a_t \cdot (t - t_0)^2$$

En nuestro caso, teniendo en cuenta que para $t_0 = 0$, se cumple que: $v_0 = 0$, $e_0 = e_A$, y que, cuando llegue a la placa de enfrente en el instante "t" se cumplirá que: $v = v_B$ y $e = e_B = d$, las ecuaciones anteriores se transforman en:

$$v_B = a_t \cdot t$$
$$d = e_A + \frac{a_t \cdot t^2}{2}$$

Despejando t de la primera y sustituyendo en la segunda: $d - e_A = \dfrac{v_B^2}{2 \cdot a_t}$

Si en la última ecuación sustituimos a_t por su expresión, obtenemos que: $d - e_A = \dfrac{v_B^2 \cdot m \cdot d}{2 \cdot q \cdot \Delta V}$

Finalmente, despejando: $\Delta V = \dfrac{v_B^2 \cdot m \cdot d}{2 \cdot q \cdot (d - e_A)}$ (1)

Sustituyendo ahora los valores numéricos proporcionados en el enunciado:

$$\Delta V = \frac{10^2 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-2}} \rightarrow \Delta V = 10^3 \text{ V}$$

Analizando el resultado literal de la ddp podemos comprobar que es homogéneo (unidades de J/C en ambos lados de la igualdad). También se comprueba que se cumplen las hipótesis previamente planteadas. En efecto, si se observa el resultado literal, se ve fácilmente cómo si se aumenta el valor de la rapidez con la que se quiere que la esferita impacte en la placa, la diferencia de potencial entre ambas placas ha de aumentar, mientras que si aumentamos la carga de la esferita, ΔV disminuye.

Es interesante analizar lo que ocurre con el desplazamiento experimentado por la esferita (dado por d-e_A). Analizando el resultado, vemos que (para una distancia d determinada), cuanto mayor sea dicho desplazamiento, menor será la diferencia de potencial ΔV necesaria.

Vale la pena tener en cuenta también que la posición inicial e_A de la esferita, en el sistema de referencia escogido, siempre ha de estar comprendido entre 0 y d.

Analizad qué ocurre con ΔV en el caso particular de que $e_A = 0$ y en el caso de que $e_A \rightarrow d$

Haciendo $e_A = 0$ en el resultado literal:

$$\Delta V = \frac{v_B^2 \cdot m \cdot d}{2q \cdot (d - 0)} \rightarrow \Delta V = \frac{v_B^2 \cdot m}{2q} \qquad (2)$$

Vemos que, en este caso particular la diferencia de potencial requerida (para conseguir una v_B determinada), no depende de la distancia d que separa ambas placas.

En el segundo caso, si imaginamos que e_A va aumentando, vemos que, en el límite, cuando $e_A \rightarrow d$ ocurre que $\Delta V \rightarrow \infty$, lo cual es lógico, puesto que si el punto A de partida (esferita inicialmente en reposo), estuviese muy próximo a la placa positiva donde se ha de llegar con una determinada velocidad, haría falta una gran diferencia de potencial para conseguir una fuerza eléctrica lo bastante grande como para permitir alcanzar dicha velocidad en tan corto espacio, partiendo del reposo.

Conviene aclarar, por otra parte, que en la expresión que calcula ΔV hemos obviado el signo de la carga, de tal modo que realmente hemos obtenido un valor absoluto de dicha diferencia de potencial. El signo de ΔV será positivo siempre que $V_{final} > V_{inicial}$ y será negativo en el caso contrario. En este caso, la fuerza eléctrica desplaza a una carga negativa en sentido opuesto al del campo eléctrico establecido entre las placas del condensador. Podemos recordar que el campo eléctrico se orienta siempre en el sentido en el que decrece el potencial (de mayor a menor potencial eléctrico) y concluir que en este caso la diferencia de potencial obtenida es positiva.

Una vez resuelto el problema, podemos detenernos a comprobar en qué grado la simplificación realizada al inicio de haber despreciado la fuerza gravitatoria está justificada.

En unidades del Sistema Internacional, el módulo de dicha fuerza gravitatoria es:

$F_g = m\cdot g = 10\cdot 10^{-9}\cdot 9'8 = 9'8\cdot 10^{-8}$ N.

Y el de la fuerza eléctrica es:

$Fe = q\cdot E = q\cdot \Delta V/d = 10^{-7}\cdot 1000/0.5 = 2\cdot 10^{-4}$ N

Dividiendo Fe/ Fg, resulta:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{2\cdot 10^{-4}}{9.8\cdot 10^{-8}} = 2041$$

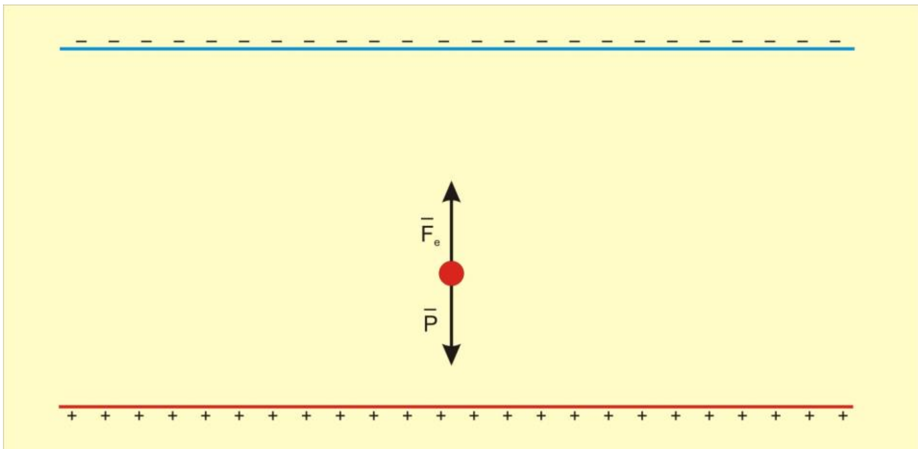
Es decir, la fuerza eléctrica es 2041 veces mayor que la fuerza gravitatoria y, por tanto, es adecuado haber despreciado la segunda. Cabe plantearse, pues, qué es lo que ocurre cuando no podamos hacer esta simplificación y haya que considerar como un factor a tener en cuenta, el peso de la partícula. Esto es lo que haremos en el problema siguiente

26. Supongamos dos láminas metálicas planas y paralelas dispuestas horizontalmente, homogéneamente cargadas con cargas iguales y de distinto signo, y separadas 20 cm entre sí. Se pide:

a) ¿Qué diferencia de potencial sería necesario aplicar entre las placas para que una partícula de 1 mg de masa y cargada positivamente con 10 nC, quede en suspensión cuando se abandona entre ellas?
b) Una vez que la partícula está en suspensión, calculad la velocidad con que llegaría a la placa superior si, de repente, se duplicase la diferencia de potencial

Planteamiento cualitativo de la situación

Al dejar una partícula cargada entre las láminas se ejercen sobre ella dos fuerzas: la fuerza electrostática, $\vec{F}_e$, y la gravitatoria $\vec{P}$. Para que la partícula quede en equilibrio, ambas fuerzas han de tener el mismo valor y sentidos contrarios. Por tanto, la fuerza electrostática deberá ser vertical y orientada hacia arriba y para que ello ocurra, dado que la partícula tiene carga positiva, la placa superior necesariamente deberá estar cargada negativamente. Esta situación inicial, se puede representar mediante la figura siguiente:



Supondremos que ambas placas son suficientemente grandes (en relación con el tamaño de la partícula) como para que la partícula cargada que colocamos entre ellas esté bastante alejada de los bordes. En esa zona el campo eléctrico es uniforme y su módulo E, la diferencia de potencial, ΔV (en valor absoluto) entre las placas y la distancia d entre ellas, sabemos que se relacionan mediante la expresión:

$$E = \Delta V/d \quad (1)$$

Plantead hipótesis acerca de los factores de los que dependerá ΔV

Para empezar, conviene tener en cuenta que, dado que E entre las placas es constante, no importará el punto concreto entre las dos placas en el que se abandone inicialmente a la partícula cargada, puesto que la fuerza eléctrica tendrá en todos ellos el mismo valor, al igual que la fuerza peso.

Cabe esperar que el valor de la diferencia de potencial (ddp) que hay que aplicar entre las placas para contrarrestar la acción del campo gravitatorio y mantener a la partícula en equilibro, dependa de la distancia (d) entre dichas placas, de la carga (q) y de la masa (m) de partícula, así como de la intensidad del campo gravitatorio (g).

$$\Delta V = f\ (q, m, g, d)$$

De manera más precisa, podemos pensar, en principio, que ΔV deberá ser tanto mayor, cuanto mayores sean los factores que aumentan el peso de la partícula (m y g) y menor sea la carga q de la partícula. En cuanto a la distancia entre las placas, es lógico pensar que cuanto más separadas estén (siempre a igualdad de los restantes factores), mayor tendrá que ser la ddp a aplicar entre ellas.

Proceded a resolver el problema y analizad el resultado:

Sabemos que para que la partícula permanezca en reposo, debe cumplirse que las fuerzas que actúan sobre ella tengan el mismo módulo:

$F_e = P$ (2)

Por otra parte, también sabemos que: $P = mg$ y que: $F_e = q \cdot E = q \cdot \Delta V/d$

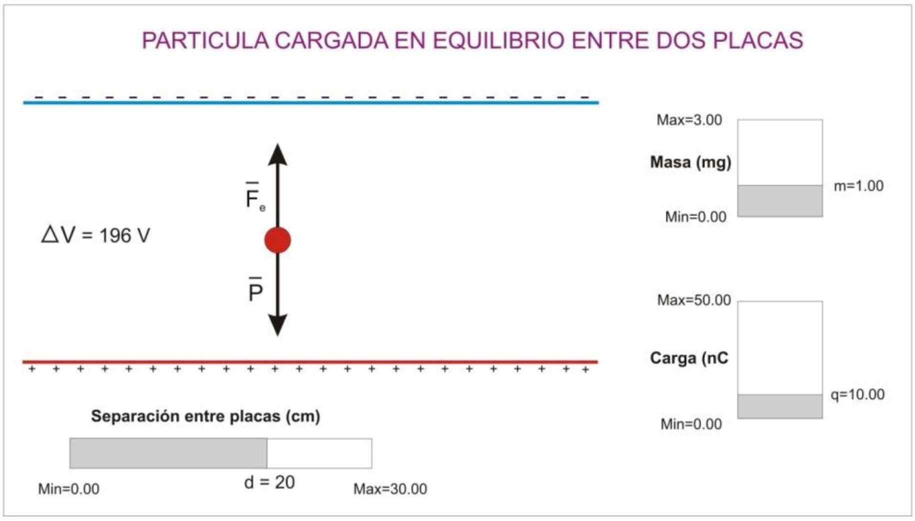
Sustituyendo las expresiones anteriores en la igualdad (2): $q \cdot \dfrac{\Delta V}{d} = mg$

Y despejando: $\boxed{\Delta V = \dfrac{mg \cdot d}{q}}$

El resultado anterior es dimensionalmente homogéneo (unidades de J/C a ambos lados de la expresión) y confirma todas las hipótesis que habíamos planteado. En el caso concreto que se nos plantea, al sustituir los valores que proporciona el enunciado, obtenemos:

$$\Delta V = \frac{mg \cdot d}{q} = \frac{10^{-6} \cdot 9'8 \cdot 0'2}{10 \cdot 10^{-9}} = 196\ V$$

Este desarrollo se puede reforzar con una animación *Modellus* que resuelve y visualiza la situación planteada. Es una animación interactiva con la que los estudiantes pueden modificar cualquiera de las variables y ver cómo influyen esas modificaciones en el resultado del problema. La imagen siguiente muestra el aspecto de la pantalla cuando dichos valores coinciden con los que hemos adoptado aquí.

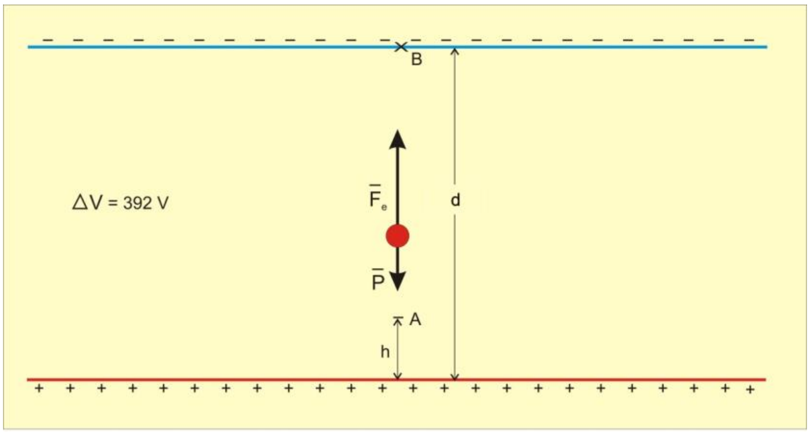


La animación y el programa para hacerla correr en cualquier ordenador están disponibles en la página "Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física", de la Sección Local de Alicante de la RSEF. http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm

Veamos ahora qué ocurre si se duplica el potencial entre las placas. Es evidente que entonces aumentará el módulo de la fuerza eléctrica y se mantendrá el de la fuerza gravitatoria. Por tanto, sobre la partícula se ejercerá una fuerza neta ascendente, que la llevará hacia la placa superior con un movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado.

¿De qué dependerá la rapidez con la que llegaría en este caso la partícula a la placa superior?

Para responder esta segunda cuestión, supondremos que la partícula empieza a moverse desde un punto A cualquiera, situado entre las placas hasta otro punto B situado en la placa superior.



Parece lógico pensar, que la rapidez v_B con que la partícula llegará a la placa superior, dependerá de su carga q, su masa m, la intensidad g del campo gravitatorio, la diferencia de potencial V_A-V_B, la posición inicial de la partícula (dada por h) y la distancia d que separa ambas placas. Es decir:

$$v_B = f\,(q, m, g, \Delta V, d, h)$$

Podemos precisar un poco más y tratar de avanzar la forma en que debería influir cada una de las variables anteriores (manteniendo constantes las restantes). En principio, cabe esperar que, la rapidez v_B con que la partícula llega a B sea mayor, cuando:

- Aumente la carga, ya que aumentar q implica aumentar el módulo de la fuerza eléctrica, dado por: $F_e = q \cdot E$, (y, por tanto, el de la fuerza neta que hace ascender a la partícula).

- Aumente la diferencia de potencial ΔV (en valor absoluto) entre las posiciones inicial (A) y final (B), porque un aumento de ΔV también implica un aumento de la intensidad del campo eléctrico E y, por tanto, de la fuerza eléctrica que se ejerce sobre la partícula hacia arriba.

- Disminuya el valor de g, puesto que la fuerza gravitatoria o peso (dada por $P = mg$), se opone al movimiento ascendente de la partícula.

En cuanto a la influencia de la masa m de la partícula, la situación es algo más compleja. Por una parte, cuanto mayor sea m (gravitatoria) menor deberá ser v_B, porque, en la situación planteada, la fuerza gravitatoria (proporcional a m) se opone al movimiento de la partícula. Por otro lado, un aumento de la masa m (inercial) también debería implicar una aceleración menor para una fuerza eléctrica dada ($a = F_e/m$), y, en consecuencia, un menor valor de v_B.

La influencia de la distancia d entre las placas y de la posición inicial h de la partícula, no es algo evidente de entrada, puesto que si d aumentase (a igualdad de los restantes factores), la distancia a recorrer por la partícula (dada por d-h) aumentaría, lo que haría que la partícula estuviese más tiempo subiendo sometida a una determinada aceleración hacia arriba y, por tanto, llegase a B con mayor rapidez. Sin embargo, si d aumenta, también disminuye la intensidad del campo eléctrico entre las placas (ved ecuación 1 anterior), lo que implica (siempre a igualdad de los restantes factores) menor fuerza eléctrica hacia arriba (dada por $Fe = q \cdot E$) haciendo que la aceleración de subida disminuya, lo que se traduciría en un movimiento ascendente más lento y, por tanto en una v_B menor.

Plantead posibles estrategias para obtener v_B.

Podemos considerar, al menos, dos maneras de abordar la resolución del problema.

-Mediante un planteamiento basado en consideraciones de trabajo y energía, que puede comenzar expresando la energía del sistema que forman la partícula, las placas y la Tierra (dado que es el campo gravitatorio terrestre el que se ejerce sobre la partícula). Como, tanto la fuerza gravitatoria como la fuerza eléctrica, son conservativas, la energía mecánica de este sistema se ha de conservar en la transformación que lleva a la partícula desde su posición inicial hasta su posición final. Por tanto, podremos imponer esa conservación para relacionar entre sí todas las variables implicadas en el problema y despejar la rapidez v_B.

-Mediante un planteamiento cinemático-dinámico a lo largo de la trayectoria, que puede comenzar obteniendo la expresión de la fuerza tangencial neta ejercida sobre la partícula. A partir de aquí podremos obtener la aceleración sobre la trayectoria a_t y, seguidamente, escribir las ecuaciones de su movimiento (de la posición y de la rapidez). Usando dichas ecuaciones, podremos obtener el tiempo que emplea la partícula en llegar desde A hasta B y finalmente, sustituir ese tiempo en la ecuación de la rapidez, para obtener v_B.

Por supuesto, basta una cualquiera de las dos estrategias expuestas para resolver satisfactoriamente el problema y eso es lo que se suele hacer en general. No obstante, siempre es conveniente que, en determinados casos (y este puede ser uno de ellos), los estudiantes lleven a cabo distintas estrategias y comprueben que se llega al mismo resultado. Este proceder es un aspecto fundamental del trabajo científico y permite darse cuenta de la globalidad y coherencia del cuerpo de conocimientos científico implicado (en este caso la Mecánica), por lo que lo consideramos como algo esencial para contribuir a desarrollar de forma más efectiva la competencia científica en el alumnado.

Resolved el problema mediante la primera de las estrategias enunciadas

Empezamos designando un estado inicial (A), del sistema correspondiente a cuando se abandona la partícula cargada y otro final (B) cuando dicha partícula llega a la placa superior negativamente cargada. Las dos únicas fuerzas que intervienen (electrostática y gravitatoria) son conservativas y, por tanto, podemos afirmar que en ese cambio la energía mecánica del sistema se conserva:

$$\Delta E_{c(A-B)} + \Delta E_{p(A-B)} = 0 \quad (3)$$

La partícula parte del reposo en la posición A y llega a la placa negativa (posición B) con la velocidad buscada v_B. Por tanto, el aumento de energía cinética es:

$$\Delta Ec_{(A\to B)} = Ec_B - Ec_A = Ec_B - 0 = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 \quad (4)$$

En cuanto a la disminución global de energía potencial, resulta de un aumento de energía potencial gravitatoria y de una disminución de energía potencial eléctrica:

$$\Delta E_{p(A-B)} = \Delta E_{pg(A-B)} + \Delta E_{pe(A-B)} \quad (5)$$

En el sistema de referencia adoptado, el movimiento de la partícula conlleva un incremento de altura dado por (d-h). Por tanto, el aumento de energía potencial gravitatoria es:

$$\Delta Epg_{(A\to B)} = Epg_B - Epg_A = mgd - mgh = mg \cdot (d-h) \quad (6)$$

Mientras que la diminución de energía potencial eléctrica es:

$$\Delta Epe_{(A\to B)} = Epe_B - Epe_A = q \cdot V_B - q \cdot V_A = -q \cdot (V_A - V_B) \quad (7)$$

Obviamente, $\Delta V_{(A-B)}$ no coincide con el valor absoluto de la diferencia de potencial existente entre las placas, (a menos, claro está, que la partícula se abandonara justamente a la altura de placa inferior, positiva). No obstante, teniendo en cuenta que el campo eléctrico entre ambas placas es uniforme, podemos relacionar ambos incrementos.

En efecto, sabemos que: $E = \frac{\Delta V}{d}$ y que $E = \frac{\Delta V_{(A-B)}}{d-h}$

En las ecuaciones anteriores E representa el módulo del vector intensidad del campo eléctrico, por lo que los incrementos de potencial, deben expresarse en valores absolutos[10].

Igualando las dos expresiones anteriores y despejando, obtenemos que: $\Delta V_{(A-B)} = \frac{\Delta V \cdot (d-h)}{d}$

Por tanto, la ecuación 7, se puede escribir también, en función de los datos que tenemos, como:

$$\Delta Epe_{(A\to B)} = Epe_B - Epe_A = q\cdot V_B - q\cdot V_A = -q\cdot(V_A - V_B) = -q\cdot\frac{\Delta V\cdot(d-h)}{d} \quad (8)$$

Sustituyendo (6) y (8) en (5):

$$\Delta Ep_{(A\to B)} = \Delta Epg_{(A\to B)} + \Delta Epe_{(A\to B)} = mg\cdot(d-h) - \frac{q\cdot\Delta V\cdot(d-h)}{d}$$

Y simplificando:

$$\Delta Ep_{(A\to B)} = \left(mg - \frac{q\cdot\Delta V}{d}\right)\cdot(d-h) \quad (9)$$

Sustituyendo ahora (9) y (4) en la ecuación (3):

$$\Delta Ec_{(A\to B)} + \Delta Ep_{(A\to B)} = \frac{1}{2}m\cdot v_B^2 - \left(mg - \frac{q\cdot\Delta V}{d}\right)\cdot(d-h) = 0$$

Finalmente, despejando v_B de la ecuación anterior: $v_B = \sqrt{2\cdot\left(\frac{q\cdot\Delta V}{m\cdot d} - g\right)\cdot(d-h)}$ (10)

Analizando el resultado literal obtenido, nos podemos dar cuenta en primer lugar, de que es dimensionalmente homogéneo (L/T en ambos lados de la igualdad) y de que contempla las hipótesis de partida. Por ejemplo, que la rapidez v_B aumentará cuando q y ΔV aumenten y disminuirá cuando m y g aumenten.

El resultado es coherente con lo que debería ocurrir en el caso límite de que h aumentase hasta igualarse a d (v_B valdría 0, puesto que la partícula inicialmente ya estaría en B) y también permite *conocer el valor de v_B en el caso particular de que el punto A de partida fuese un punto de la placa inferior*. Basta para ello hacer h = 0 en la ecuación general (10) con lo que esta se transformaría en:

[10] El módulo de un vector no puede ser nunca una cantidad negativa, puesto que ningún vector puede tener un tamaño inferior a 0

$$v_B = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{q \cdot \Delta V}{m \cdot} - g \cdot d \right)} \quad (11)$$

Si queremos calcular ahora, para este caso particular, el valor numérico de v_B, no tenemos mas que sustituir los datos que conocemos en la ecuación (11) anterior, con lo que:

$$v_B = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{10 \cdot 10^{-9} \cdot 392}{1 \cdot 10^{-6}} - 9'8 \cdot 20 \cdot 10^{-2} \right)} \rightarrow v_B = 1'96 \, \frac{m}{s}$$

Otra cuestión en la que podemos fijarnos es el orden de magnitud de los diferentes parámetros. Con los datos del enunciado, las dos fuerzas (eléctrica y gravitatoria) son del mismo orden de magnitud. Concretamente, al haber duplicado la ddp respecto al valor necesario de esta para que la partícula permanezca en equilibrio, ocurre que la fuerza eléctrica es el doble que la fuerza gravitatoria. En este caso concreto, los módulos de dichas fuerzas valen:

$F_e = q \cdot E = q \cdot \Delta V/d = 10 \cdot 10^{-9} \cdot 392/0'2 = 1'96 \cdot 10^{-5}$N

$F_g = m \cdot g = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 9'8 = 9'8 \cdot 10^{-6}$N

Ahora bien, conviene tener en cuenta que esto es así porque hemos supuesto una partícula cargada muy masiva, si la comparamos, por ejemplo, con diversas partículas elementales en las que podríamos pensar (por ejemplo, protones o electrones). La masa de tales partículas es muchísimo menor; también lo es, en consecuencia, la fuerza gravitatoria ejercida sobre ellas, y, de hecho, en este tipo de problemas dicha fuerza gravitatoria se puede despreciar. Las velocidades que alcanzan partículas como las citadas al someterse a la acción de campos eléctricos habituales, en general, tienen valores **muchísimo mayores** que el que hemos obtenido anteriormente, y el resultado literal anterior del problema se simplifica **para esos casos[11]**, quedando entonces como:

$$v_B = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{q \cdot \Delta V}{m \cdot} \right)}$$

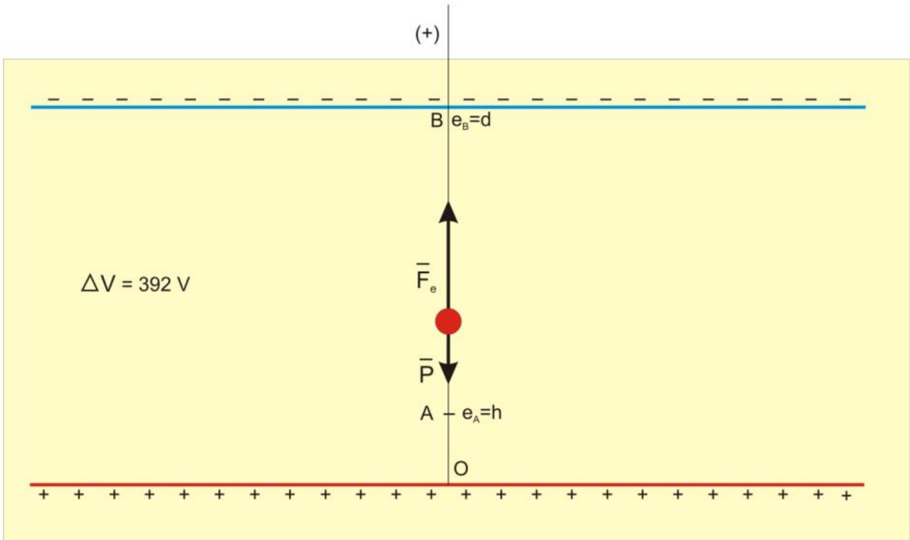
Obsérvese que, en la situación descrita en el párrafo anterior, la distancia d entre las placas, no influye en el valor de v_B (para unos valores dados de q, ΔV y m).

Para terminar, se puede proponer:

Obtened de nuevo v_B mediante la segunda de las estrategias enunciadas de resolución anteriormente enunciadas y comprobad que se llega al mismo resultado general que con la primera.

[11] Debe cumplirse que: $(q \cdot \Delta V/m) >>> g \cdot d \rightarrow q \cdot \Delta V >>> m \cdot g \cdot d$

La figura siguiente, muestra esquemáticamente la situación planteada, en la que se puede observar el origen de espacios O escogido y las fuerzas que actúan sobre la partícula en un instante cualquiera de su trayectoria ascendente.



Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica:

$$Fres_t = m \cdot a_t \rightarrow Fe - P = m \cdot a_t \rightarrow q \cdot E - m \cdot g = m \cdot a_t \rightarrow \quad a_t = \frac{q \cdot E - mg}{m}$$

Dado que la aceleración tangencial es constante, se trata de un movimiento uniformemente acelerado, cuyas ecuaciones son:

$$v = v_0 + a_t \cdot (t - t_0)$$

$$e = e_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a_t \cdot (t - t_0)^2$$

En nuestro caso, teniendo en cuenta que para $t_0 = 0$, se cumple que: $v_0 = 0$, $e_0 = e_A = h$ y haciendo $v = v_B$ y $e = e_B = d$, estas ecuaciones se transforman en:

$$v_B = a_t \cdot t$$

$$d = h + \frac{a_t \cdot t^2}{2}$$

Despejando t de la primera y sustituyendo en la segunda: $d-h=\dfrac{v_B^2}{2\cdot a_t}$

Si en la última ecuación sustituimos a_t por su expresión: $d-h=\dfrac{v_B^2\cdot m}{2\cdot(qE-mg)}$

Y despejando v_B: $v_B=\sqrt{2\cdot\left(\dfrac{qE-mg}{m}\right)\cdot(d-h)}$

Dado que E es uniforme, tiene el mismo valor sea cual sea el punto en el que se halle la partícula, por lo que en la ecuación anterior, podemos hacer:

$E=\dfrac{\Delta V}{d}$, obteniendo finalmente:

$$v_B=\sqrt{2\cdot\left(\frac{q\cdot\Delta V-g}{md}\right)\cdot(d-h)}$$

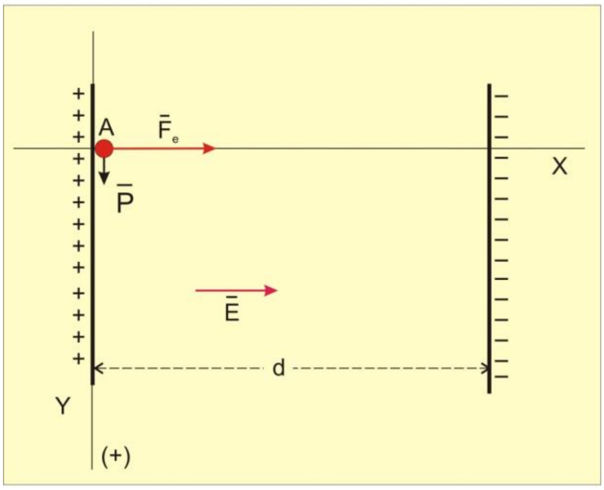
Como se puede apreciar, el resultado general obtenido, es el mismo que al que se llegó anteriormente mediante consideraciones de trabajo energía (ecuación 10). Podríamos haber optado, pues, perfectamente, por esta segunda estrategia de resolución en lugar de la primera y haber seguido analizando el resultado, etc.

Acabamos de estudiar el movimiento vertical de una partícula cargada cuando se abandona en el seno de un campo eléctrico generado por dos placas cargadas y paralelas. Para continuar, podemos preguntarnos qué ocurrirá cuando la partícula describa otro tipo de trayectorias. En el problema siguiente, se aborda un caso muy similar a este, con la diferencia de que la trayectoria descrita es horizontal en lugar de vertical.

27. Una pequeña esfera de carga q positiva de 10 nC y 0'1 mg de masa, se abandona junto a la lámina positiva de un condensador de placas planas, verticales y separadas 5 cm entre sí. Sabiendo que la diferencia de potencial entre las placas es de 10^4 V, determinad la rapidez con que la carga choca contra la otra lámina.

La situación que se plantea es similar a la de los dos problemas anteriores, pero ahora tendremos en cuenta el peso $\vec{P}$ de la partícula cargada (perpendicular en todo momento a la fuerza eléctrica $\vec{F}_e$) como una variable influyente, con lo cual, la trayectoria descrita no se conoce de antemano, lo que nos obliga a realizar un tratamiento vectorial para poder estudiar las características del movimiento.

En la figura siguiente, se muestra la situación de partida. Arbitrariamente, hemos escogido un sistema de referencia cartesiano, con origen en el punto A de donde sale la esferita cargada.



En cuanto se abandone la partícula cargada en un punto A sobre la placa positiva, la fuerza ejercida por el campo eléctrico existente entre las placas, la empujará horizontalmente hacia la placa negativa, pero a la vez, el peso, la estará empujando verticalmente hacia abajo, de manera que el punto B de llegada no estará situado justo enfrente de A sino algo más abajo.

Una forma de comenzar, es abordar antes una situación mucho más simple que ya nos es familiar (peso despreciable), con lo que B estaría entonces justo enfrente de A. En este caso, la rapidez buscada, v_B, dependerá de los mismos factores que hemos considerado en los ejercicios anteriores, con la salvedad de que ahora ya sabemos que la partícula empieza a moverse desde la placa positiva. Por tanto, planteamos que:

$$v_B = f\,(q, \Delta V, m, d)$$

Y, lógicamente, esperamos que v_B sea tanto mayor cuanto mayor sean q, ΔV y d, pero menor cuanto mayor sea la masa m (inercial) de la partícula.

La partícula se moverá con un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado a lo largo del eje X. Teniendo en cuenta que en el instante $t_0 = 0$, se cumple que: $x = x_A = 0$, y que cuando llega a la otra placa, se cumple que: $x = x_B = d$, las ecuaciones del movimiento para cualquier instante t del mismo serán:

$v = a\cdot t$ (1)

$x = a\cdot t^2/2$ (2)

Por otra parte, aplicando la ecuación fundamental de la dinámica:

$a = F_{res}/m = q\cdot E/m$

Y teniendo en cuenta la expresión, ya vista anteriormente para el módulo de la intensidad del campo eléctrico: $E = \Delta V/d$

Se obtiene que $a = q\cdot\Delta V/m\cdot d$ (3)   (ΔV en valor absoluto).

Eliminando el tiempo t entre las ecuaciones (1) y (2):

$x = v^2/2a$

Sustituyendo ahora la aceleración:

$x = v^2\cdot m\cdot d/2\cdot q\cdot\Delta V$

Despejando: $v = \sqrt{\dfrac{2x\cdot q\cdot\Delta V}{m\cdot d}}$

Finalmente, particularizando para el instante en que la partícula llega a la placa de enfrente ($x = d$, $v = v_B$) y simplificando, nos queda que:

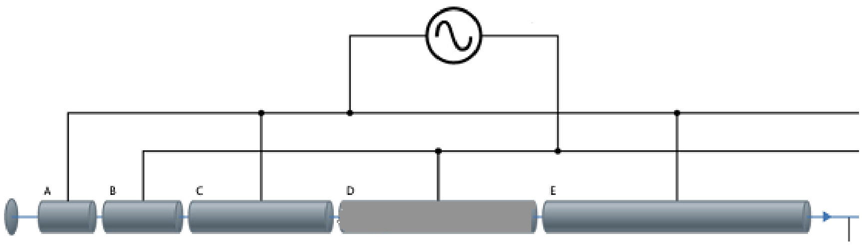
$$v_B = \sqrt{\frac{2\cdot q\cdot\Delta V}{m}} \quad (4)$$

El resultado literal que acabamos de obtener, no solo es dimensionalmente homogéneo, sino que se contemplan en él, todas las hipótesis de partida.

Sustituyendo los valores numéricos, nos queda v_B = 44’72 m/s

El dispositivo que venimos manejando en estos ejercicios (láminas conductoras conectadas a una diferencia de potencial elevada), constituye la base de los aceleradores lineales de partículas, que se utilizan para dotar a diversas partículas cargadas, de una gran energía cinética, con lo que se pueden utilizar como proyectiles con los que romper los núcleos atómicos e investigar así la estructura íntima de la materia.

Los primeros aceleradores se basaban en la aplicación de un voltaje continuo. Sin embargo, esto tenía la limitación de que al aumentar el voltaje a unas decenas de megavoltios se producía una descarga entre las placas (una ruptura del dieléctrico existente entre ellas). Por eso se buscaron alternativas, entre ellas, la de un voltaje alterno utilizando un número variable de tubos cilíndricos. Los tubos alternos están conectados entre sí de manera que se pueda aplicar una ddp oscilante entre los dos conjuntos de tubos. Así los aceleradores actuales de altas energías, más sofisticados, se pueden esquematizar mediante el dibujo adjunto. El haz de partículas cargadas, va pasando sucesivamente por el interior de tubos metálicos de longitud creciente, A, B, C, D, E,.., que están conectados a una tensión alterna.

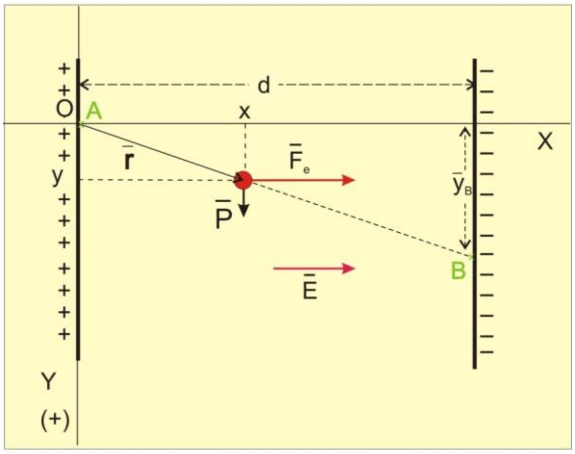


Para entender cómo funciona el sistema podemos suponer que se quiere acelerar un haz de partículas de carga positiva. Entonces, cuando se emite el haz, el primer tubo A tiene carga negativa y lo atrae produciéndole una aceleración antes de que el haz penetre en el tubo. Cuando el haz viaja por el interior del tubo, lo hace pasando justo por su eje, ya que el tubo lo atrae con la misma fuerza eléctrica en todas las direcciones y, por tanto, no modifica la trayectoria del haz. Justamente cuando dicho haz llega al punto medio del tubo A cambia el sentido de la corriente que alimenta todos los tubos lo que provoca que el tubo A, que tenía carga negativa, tenga carga positiva, el tubo B pase a tener carga negativa, el C positiva, etc. De esta manera, cuando el haz sale del tubo A, es repelido por él y atraído por el tubo B, lo que implica que el haz es acelerado en su trayecto de A hacia B. El mismo proceso se repite en cada etapa, es decir, cuando el haz llega a la mitad del tubo B, vuelve a cambiar de sentido de la corriente. B pasa a tener carga positiva, y A y C vuelven a tener carga negativa. Así cuando el haz sale del tubo B, es repelido por él y atraído por C, con lo que vuelve a ser acelerado al pasar de B a C. Y así sucesivamente. Cada nuevo tubo tiene una longitud mayor que el anterior, porque la carga de los tubos cambia de signo a intervalos de tiempo iguales (determinados por la frecuencia de la corriente alterna que los carga) y en cada nueva etapa el haz viaja a mayor velocidad.

El acelerador lineal de este tipo más largo del mundo es el colisionador Stanford Linear Accelerator (SLAC), ubicado al sur de San Francisco. Acelera electrones y positrones a lo largo de algo más de 3 km y los dirige hacia varios blancos, anillos y detectores ubicados en su finalización. Se construyó originalmente en 1962, y se ha ido ampliando y mejorando para seguir siendo uno de los centros de investigación de física de partículas más avanzados del mundo. Los experimentos realizados en el centro han ganado el premio Nobel en bastantes ocasiones.

Finalmente, podemos dar un paso más y tratar de resolver el problema, pero sin considerar el peso de la partícula despreciable.

Como ya se ha indicado, la intervención del peso como variable a considerar, implica que la trayectoria ya no sea horizontal. No obstante, sí será (casi) rectilínea, ya que, bajo las condiciones que hemos planteado (concretamente, estando las partículas suficientemente alejadas de los bordes de las placas) el campo E entre las placas es (casi) constante (lo sería completamente si dichas placas tuvieran superficie infinita), y g también lo es (porque la diferencia de altura durante el movimiento de las partículas es insignificante). Por tanto, el vector aceleración tiene dos componentes constantes y, como se parte del reposo, la esferita se moverá en la dirección y sentido de la aceleración, produciéndose una trayectoria rectilínea e inclinada tal como se muestra en la figura siguiente:



En esta versión más completa del problema, las hipótesis a considerar son las mismas que anteriormente, solo que ahora debemos incluir también la intensidad del campo gravitatorio y razonar que el resultado que se obtenga deberá de transformarse en el anterior, en el hipotético caso de que g = 0.

Con estas nuevas condiciones y tomando como sistema de coordenadas el expresado en la figura de arriba (sentido positivo de Y hacia abajo), la aceleración de la partícula cargada se podrá expresar en componentes cartesianas como:

$$\vec{a} = (a_x\ ,\ a_y) = \left(\frac{q \cdot \Delta V}{m \cdot d}\ ,\ g \right)$$

Y si integramos sucesivamente teniendo en cuenta las condiciones iniciales (para t = 0, ocurre que: $v_{ox}= 0$, $v_{oy} = 0$, $x_0= 0$ e $y_0 = 0$), obtenemos las ecuaciones de la velocidad y la posición en cualquier instante, dadas por los vectores:

$$\vec{v} = (v_x\ ,\ v_y) = \left(\frac{q \cdot \Delta V}{m \cdot d} \cdot t\ ,\ g \cdot t \right)$$

$$\vec{r} = (x\ ,\ y) = \left(\frac{q \cdot \Delta V}{2m \cdot d} \cdot t^2\ ,\ \frac{g}{2} \cdot t^2 \right)$$

Este último vector, determina la ecuación de la trayectoria, que en función del parámetro "t", será:

$$x = \frac{q \cdot \Delta V}{2m \cdot d} \cdot t^2$$

$$y = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Si quisiéramos expresar la ecuación de la trayectoria en forma explícita, bastaría eliminar el parámetro t. En efecto:

$$t^2 = \frac{2m \cdot d}{q \cdot \Delta V} \cdot x$$

Y sustituyendo, obtenemos que: $y = \left(\frac{g \cdot m \cdot d}{q \cdot \Delta V} \right) \cdot x$

La última expresión, indica que la partícula cargada (que, insistimos, parte del reposo) seguiría una trayectoria recta cuya ecuación es de la forma $y = k \cdot x$, donde k es una constante, tal que: $k = gmd/\Delta V$, desde el punto A de partida hasta el punto B situado en la otra placa.

Una posible estrategia para resolver el problema consiste en *calcular en qué instante se cumple que x = d y utilizar este dato para calcular v_B.*

Haciendo x = d en la ecuación: $t^2 = \frac{2m \cdot d}{q \cdot \Delta V} \cdot x$

Obtenemos que el tiempo empleado por la partícula en llegar desde A hasta B, viene dado por:

$$t = d \cdot \sqrt{\frac{2m}{q \cdot \Delta V}} \cdot$$

Con lo que sustituyendo en la ecuación de la velocidad:

$$\vec{v}_B = (v_x \, , v_y) = \left(\frac{q \cdot \Delta V}{m \cdot d} \cdot d \cdot \sqrt{\frac{2m}{q \cdot \Delta V}} \;\; , \;\; g \cdot d \cdot \sqrt{\frac{2m}{q \cdot \Delta V}} \right)$$

Y simplificando: $\vec{v}_B = \left(\sqrt{\frac{2q \cdot \Delta V}{m}} \;\; , \;\; g \cdot d \cdot \sqrt{\frac{2m}{q \cdot \Delta V}} \right)$

Con lo que se obtiene finalmente que:

$$\left|\vec{v}_B\right| = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot \Delta V}{m} + \frac{2m \cdot g^2 \cdot d^2}{q \cdot \Delta V}} \quad (5)$$

Si el resultado anterior es correcto, ¿qué debería ocurrir si en él introducimos la condición de g = 0?

En ese caso hipotético, el peso de la partícula sería despreciable, con lo que la ecuación (5) debería transformarse en la (4) y, efectivamente, como podemos comprobar, eso es lo que sucede.

Podemos ahora obtener el resultado numérico sin más que sustituir valores en la ecuación (5), con lo que se obtiene: $\left|\vec{v}_B\right| = 44'72$ m/s.

El resultado numérico obtenido es prácticamente idéntico al que se obtuvo despreciando el peso de la partícula (coincide porque hemos ajustado el valor a solo dos cifras decimales). Para que la diferencia fuese más apreciable, el peso debería de ser mucho mayor. Así, por ejemplo, para una masa m = 50 mg, el resultado *(comprobadlo)* sería: $\left|\vec{v}_B\right| = 2'06$ m/s. Muy diferente al anterior.

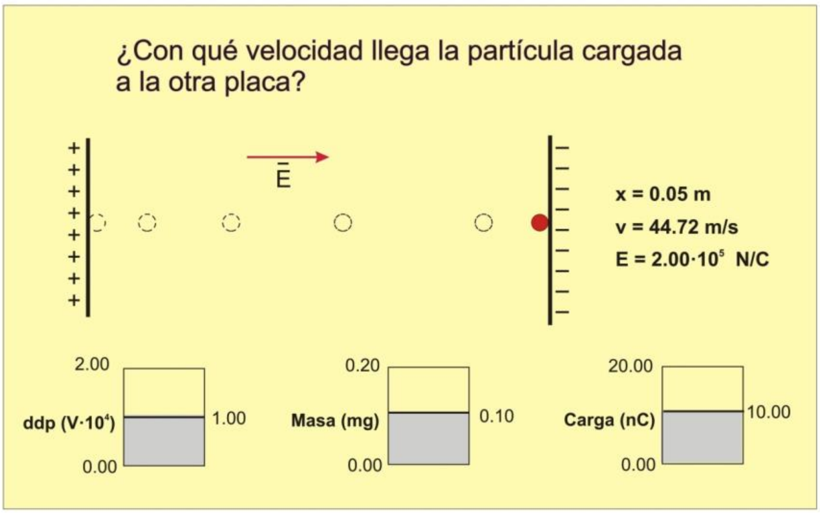
El problema se puede extender desde aquí, considerando la posibilidad de *volver a resolverlo mediante trabajo y energía y también planteando nuevas preguntas como, por ejemplo: ¿Cuánto vale la desviación y_B? ¿Qué ocurre cuando la partícula se mueve perpendicularmente a las líneas de fuerza del campo eléctrico en lugar de paralelamente? ¿Y cuando su velocidad inicial no es nula? etc.* Esta forma de actuar en la finalización de problemas de Física (o Química) es coherente con lo que ocurre en la finalización de las buenas investigaciones científicas, en las que, cuando es posible, utilizan distintos diseños para contrastar una misma hipótesis (lo que aumenta la validez y solidez de los resultados) y también se abren nuevas interrogantes. Así, al incorporar todo esto a los problemas, contribuimos a impulsar y desarrollar la competencia científica en alumnas y alumnos.

Refuerzo

Para reforzar algunos de los conceptos involucrados en este problema hemos creado una animación *Modellus*, que representa el movimiento de una partícula cargada entre las dos placas (sin considerar la influencia de la gravedad) y calcula en cada instante su posición y su rapidez, hasta obtener la rapidez buscada que corresponde al instante en el que la partícula alcanza la segunda placa.

En la pantalla se dispone de tres controladores manuales con los que los alumnos pueden modificar los valores de los tres parámetros que influyen en el problema (ΔV, q y m), poniendo así a prueba sus hipótesis.

La imagen siguiente corresponde al resultado obtenido con los datos del enunciado en el instante en el que la partícula llega a la placa negativa.



La animación y el programa para hacerla correr en cualquier ordenador están disponibles en la página "Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física", de la Sección Local de Alicante de la RSEF. http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm

28. Un fino haz de electrones penetra en el espacio comprendido entre las placas de un condensador plano (situado horizontalmente), paralelamente a éstas, con una rapidez v_0. Si entre las placas se aplica una diferencia de potencial ΔV se observa que, a la salida, la trayectoria del haz forma un ángulo de 20^0 con la dirección inicial.

a) ¿Cuál será el ángulo si se duplica la rapidez inicial?
b) ¿Y si dejando la misma rapidez inicial se duplica la diferencia de potencial aplicada?

(En ambos casos se desprecia el efecto del peso).

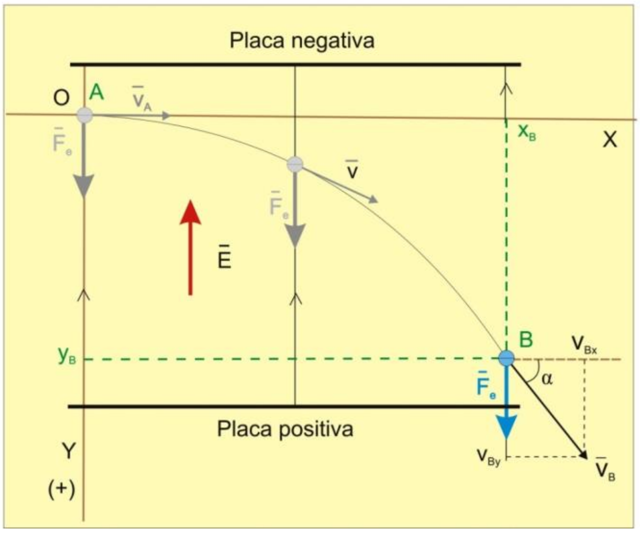
Planteamiento cualitativo de la situación

Comenzaremos suponiendo que las posibles interacciones de unos electrones con otros no afectan a la trayectoria del haz. Entonces, podremos estudiar la trayectoria de un electrón individual desde que penetra en el espacio comprendido entre las placas con la rapidez, v_0, que se asigna en el enunciado al haz en su conjunto.

Teniendo en cuenta el orden de magnitud de la masa y de la carga del electrón, consideraremos despreciable la acción del campo gravitatorio sobre él. En estas condiciones, el electrón entra en el condensador con una velocidad inicial, v_0, horizontal y, mientras esté entre las placas, se ejercerá sobre él una fuerza eléctrica debida al campo que existe entre ellas ($F_e = q \cdot E$), el cual, como ya hemos visto en los problemas anteriores, es un campo uniforme de intensidad:

$$E = \Delta V/d \quad (1)$$

Por tanto, podemos considerar el movimiento del electrón como resultado de la superposición de dos hipotéticos movimientos perpendiculares: Un movimiento uniforme de trayectoria horizontal (con rapidez v_0) y otro movimiento vertical acelerado, con aceleración constante y orientada hacia donde se orienta la fuerza eléctrica $\vec{F}_e$.



La trayectoria resultante, como se puede apreciar en la figura anterior, será una curva en la que el vector velocidad, que inicialmente es horizontal, se irá inclinando cada vez más con respecto a esa dirección horizontal. La magnitud que estamos buscando es el ángulo, α, que formará dicho vector cuando el electrón salga del espacio comprendido entre las dos placas.

Formulad hipótesis acerca de los factores de los que dependerá el ángulo buscado, α.

Cabe esperar que el ángulo α dependa de la carga, q, y la masa, m, de la partícula (en este caso, un electrón), de la ddp, ΔV, entre las placas del condensador y de la distancia, d, entre ellas (ambos factores determinan el valor del campo E), de la rapidez, v_0, con la que inicie la partícula su movimiento dentro del condensador y de la longitud, L, (horizontal) que deba recorrer la partícula hasta salir de dicho condensador.

$$\alpha = f\,(m, q, \Delta V, d, v_0, L)$$

Más precisamente, cuanto mayores sean q y ΔV, mayor deberá ser (en valor absoluto) el ángulo α, ya que un valor mayor de estos parámetros (a igualdad de los restantes) implica que sea mayor la fuerza eléctrica que se ejerce sobre la partícula en la dirección perpendicular a su avance horizontal y, por tanto, de la aceleración correspondiente. Del mismo modo, cuanto mayor sea d, menor deberá ser (también en valor absoluto) el ángulo α, ya que un valor mayor de d implica una menor intensidad de la fuerza eléctrica. Lo mismo cabe decir de la masa, m (inercial) de la partícula, ya que cuanto mayor sea, m, menor será el módulo de la aceleración ($a = F_e/m$). Por lo que se refiere a la rapidez inicial, v_0, de la partícula, esperamos que cuanto mayor sea, menor deberá ser el ángulo α, porque al avanzar más rápido por el condensador, estará menos tiempo desviándose de la trayectoria horizontal inicial. Por el motivo opuesto, esperamos que cuanto mayor sea L, mayor sea el ángulo α, ya que la partícula estará más tiempo dentro del condensador desviándose de la trayectoria horizontal inicial.

Naturalmente, también podemos imaginar algún caso límite, de fácil interpretación. Por ejemplo, el resultado debe transformarse en α = 0 cuando se haga q = 0, puesto que, en ese caso, no habría fuerza eléctrica y la partícula (electrón de peso despreciable) seguiría con movimiento rectilíneo y uniforme sin desviarse.

¿Cómo podemos obtener el ángulo buscado?

Puesto que el ángulo que se busca es el que forma el vector velocidad con la dirección horizontal justamente cuando la partícula está en la posición de salida del condensador, para obtener dicho ángulo habrá que llegar a expresar las componentes (horizontal y vertical) de dicha velocidad en ese instante. Para ello, podemos empezar escribiendo vectorialmente la fuerza que se ejerce sobre la partícula y la aceleración correspondiente. Seguidamente obtendremos las ecuaciones de su movimiento (de la posición y de la velocidad). Cuando la componente horizontal de la posición sea x = L, la partícula estará en la posición de salida del condensador, de modo que exigiendo x = L, podremos obtener el instante en que ello ocurre. Y sustituyendo ese valor del tiempo, t, en la ecuación de la velocidad, podremos obtener sus dos componentes, v_x y v_y.

En el sistema de referencia representado en la figura anterior, la aceleración de la partícula se expresa como:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\mathrm{res}}}{m} = \frac{\vec{F}_e}{m} = \frac{(0, \mathrm{qE})}{m} = \left(0, \frac{\mathrm{q} \cdot \Delta \mathrm{V}}{m \cdot d}\right)$$

En la expresión anterior la única componente de la aceleración es positiva (el vector aceleración, de acuerdo con el sistema de referencia escogido, se orienta en sentido positivo). Por tanto, q (carga del electrón) se expresará en valor absoluto.

Integrando con respecto al tiempo, t (teniendo en cuenta que para t = 0, las componentes de la velocidad son $v_x = v_0$ y $v_y = 0$) tenemos la expresión de la velocidad de la partícula a lo largo del trayecto que realiza dentro del condensador:

$$\vec{v} = \left(v_0, \frac{\mathrm{q} \cdot \Delta \mathrm{V}}{m \cdot d} t\right)$$

Y volviendo a integrar (teniendo ahora en cuenta que para $t = t_0 = 0$, ocurre que $x = x_0 = 0$ e $y = y_0 = 0$), obtenemos el vector de posición de la partícula en ese mismo trayecto:

$$\vec{r} = \left(v_0 \cdot t, \frac{\mathrm{q} \cdot \Delta \mathrm{V}}{2 \cdot m \cdot d} t^2\right)$$

La ecuación anterior o ecuación de la trayectoria, se puede también expresar en forma explícita, eliminando el parámetro "t", con lo que se obtiene:

$y = \left(\frac{q \cdot \Delta V}{2md \cdot v_0^2}\right) \cdot x^2$, lo que nos muestra que la trayectoria es parabólica

El instante preciso, t, en el que la partícula está saliendo del condensador corresponde a que la componente horizontal de la posición sea x = L, es decir:

$$L = v_0 \cdot t \rightarrow t = L/v_0$$

Sustituyendo t en la ecuación de la velocidad, obtenemos las componentes del vector velocidad en la posición de salida:

$$\vec{v} = (v_x, v_y) = \left(v_0, \frac{\mathrm{q} \cdot \Delta \mathrm{V} \cdot \mathrm{L}}{m \cdot d \cdot v_0}\right)$$

Por tanto, la tangente del ángulo buscado es:

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\mathrm{q} \cdot \Delta \mathrm{V} \cdot \mathrm{L}}{m \cdot d \cdot v_0^2}$$

Vamos ahora a considerar que ocurre en los dos casos que plantea el enunciado:

a) Al duplicar el valor de v_0

Entonces tenemos:

$$\mathrm{tg}\, \alpha' = \frac{\mathrm{q} \cdot \Delta \mathrm{V} \cdot \mathrm{L}}{m \cdot d \cdot (2v_0)^2} = \frac{\mathrm{q} \cdot \Delta \mathrm{V} \cdot \mathrm{L}}{m \cdot d \cdot 4 \cdot v_0^2} = \frac{\mathrm{tg}\, \alpha}{4}$$

Es decir, la tangente del ángulo buscado se hace 4 veces menor.

Sustituyendo valores: $tg\alpha = tg\ 20º = 0'364 \rightarrow tg\alpha' = 0'364/4 = 0'091$

De modo que $\alpha' = arctg\ 0'091 \rightarrow \alpha' = 5'2\ º$

Como vemos el ángulo disminuye casi hasta la cuarta parte del valor que tiene en la situación anterior (20º).

b) Al duplicar el valor de la ddp aplicada

Entonces resulta:

$$\tan\alpha' = \frac{\mathrm{q} \cdot 2 \cdot \Delta\mathrm{V} \cdot \mathrm{L}}{m \cdot d \cdot v_0} = 2 \cdot \tan\alpha$$

En este caso, la tangente del ángulo buscado se duplica y dicho ángulo pasa a valer 36,05º que es menos que el doble de su valor en la situación anterior (20º).

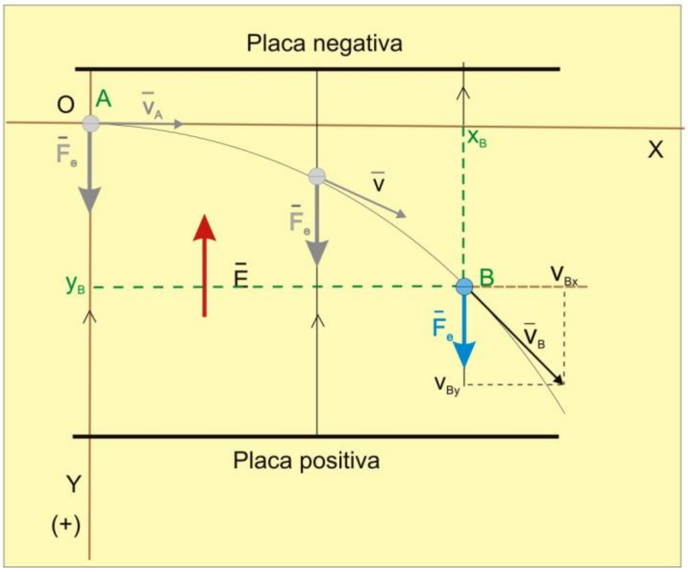
Vemos así que un cambio en la velocidad inicial afecta mucho más a la desviación que sufre la partícula que otro cambio similar en la diferencia de potencial. Esto es así porque, como muestra el resultado literal del problema, la tangente del ángulo que expresa esa desviación depende linealmente (de manera proporcional o inversamente proporcional) de todas las variables, a excepción precisamente de la velocidad, v_0, de la que depende cuadráticamente (en este caso, es proporcional al cuadrado de v_0).

29. Un haz de electrones penetra en el espacio comprendido entre las placas de un condensador plano paralelamente a éstas y con una rapidez $v_0 = 10^5$ m/s. Sabiendo que el módulo de la intensidad del campo eléctrico entre ambas placas vale E = 0'02 N/C. Calculad la desviación sufrida por el haz para un desplazamiento horizontal de 50 cm.

Datos: masa del electrón $m_e = 9'1 \cdot 10^{-31}$ kg, carga del electrón $q_e = 1'6 \cdot 10^{-19}$ C

Igual que en el problema anterior podemos despreciar la intervención del campo gravitatorio, con lo que el campo eléctrico se orienta verticalmente y la trayectoria del electrón será igualmente una trayectoria parabólica. La magnitud que buscamos ahora es el desplazamiento vertical, y_B, que realiza el electrón desde que entra en el espacio comprendido entre las placas (punto A) hasta que se haya desplazado horizontalmente 50 cm por el interior del condensador (punto B).

Para representar la situación, utilizaremos un esquema similar al del problema anterior, con el mismo sistema de referencia.



Formulad hipótesis acerca de los factores de los que dependerá el desplazamiento vertical y_B.

Cabe esperar que y_B dependa de las mismas variables de las que dependía el ángulo buscado en el problema anterior, y que, cualitativamente, lo haga también en términos similares:

$$y_B = f\,(m, q, E, v, L)$$

En la expresión anterior, m es la masa del electrón, q su carga, E el módulo de la intensidad del campo eléctrico entre las placas y L el desplazamiento horizontal experimentado por el electrón desde que entra hasta que sale.

Respecto a cómo influirá cada variable, cabe esperar que, cuanto mayores sean, E, q y L, y cuanto menores sean v_o y m, mayor deberá ser (en valor absoluto) el desplazamiento vertical de la partícula (dado por y_B), que estamos buscando. (Como siempre, hay que insistir en que cuando se analiza la influencia de cada variable por separado, se hace suponiendo todas las demás constantes).

¿Cómo podemos obtener y_B*?*

Procederemos igual que en el problema anterior y después de obtener las ecuaciones del movimiento, exigiremos que sea $x = x_B = L$, para obtener el instante, t*, en que la partícula sale del condensador por el punto B. A diferencia del problema anterior, ahora deberemos sustituir dicho tiempo en la ecuación de la expresión de la componente vertical (y) del vector de posición con lo que se cumplirá que $y = y_B$.

Proceded a resolver el problema siguiendo la estrategia recién expresada

La aceleración de dicha partícula es:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\mathrm{res}}}{m} = \frac{\vec{F}_e}{m} = \frac{(0, \mathrm{qE})}{m} = \left(0, \frac{\mathrm{q} \cdot \mathrm{E}}{m}\right)$$

Integrando con respecto al tiempo, t (teniendo en cuenta que para t = 0, las componentes de la velocidad son $v_x = v_0$ y $v_y = 0$) tenemos la velocidad de la partícula a lo largo del trayecto que realiza entre las dos placas:

$$\vec{v} = \left(v_o, \frac{\mathrm{q} \cdot \mathrm{E}}{m} t\right)$$

Volviendo a integrar (teniendo ahora en cuenta que para $t = t_0 = 0$, $x = x_0 = 0$ e $y = y_0 = 0$), obtenemos el vector de posición de la partícula en cualquier instante t de su movimiento entre las placas:

$$\vec{r} = \left(v_o \cdot t, \frac{\mathrm{q} \cdot \mathrm{E}}{2 \cdot m} t^2\right)$$

El instante, t, en el que la partícula llega al punto B, se cumple que $x = x_B = L$, es decir:

$$L = v_o \cdot t \rightarrow t = L/v_o$$

Sustituyendo t en la ecuación de la componente vertical de la posición, obtenemos:

$$y_B = \frac{\mathrm{q} \cdot \mathrm{E} \cdot L^2}{2 \cdot m \cdot v_o^2}$$

Analizad el resultado y obtened el valor de la desviación para el caso concreto planteado.

Vemos, en primer lugar, que el resultado es dimensionalmente homogéneo. En segundo lugar, podemos comprobar que se cumplen todas las hipótesis que habíamos formulado, resultando que la desviación es proporcional a las magnitudes q y E (e inversamente proporcional a m), pero es proporcional al cuadrado de L (e inversamente proporcional al cuadrado de v_o). Es decir, una variación de cualquiera de estos dos últimos parámetros, implica una variación mucho mayor en la desviación de la partícula electrón.

En el caso concreto que se plantea:

$E = 0'02$ N/C, $v_0 = 10^5$ m/s. L= 50 cm = 0.5m, $m = m_e = 9'1 \cdot 10^{-31}$ kg, $q = q_e = 1'6 \cdot 10^{-19}$ C

Con lo que resulta:

$$y = \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.02 \cdot 0.5^2}{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot (10^5)^2} = 0.043956m = 43.96mm$$

Es decir, en este caso, la desviación resulta ser de 43.96 mm por debajo de la altura inicial a la que el electrón penetra en el condensador.

Se pueden probar todas las hipótesis y analizar los resultados de este y del anterior problema, con una animación informática *Modellus*, que está disponible en la página “Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física”, de la Sección Local de Alicante de la RSEF. http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm

Aunque de entrada la animación resuelve el problema suponiendo que la partícula es un electrón, se permite que el usuario modifique, si lo desea, tanto la masa, como la carga (incluido su signo) para así probar qué ocurriría con cualquier otra partícula (real o hipotética).