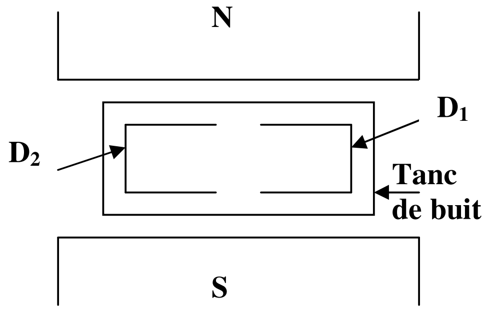
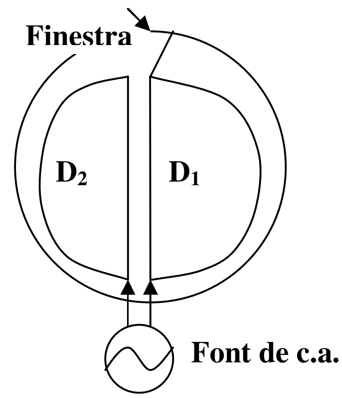
(**7-9 p. 262 FRENCH**) El ciclotró és una màquina emprada per accelerar els ions positius a energies d'uns pocs MeV (veure figura). Les D són cuirasses metàl·liques que fan pantalla als camps elèctric, però no els magnètics. Existeix, per tant, un camp magnètic efectiu B en tot l'interior del recipient metàl·lic en el que s'ha fet el buit i un camp elèctric altern, sinusoïdal, en la petita obertura entre les D. Quan aquest camp es troba en fase amb els ions, aquests reben un impuls cada semicercle. Aquests impulsos augmenten l'energia i, per tant, el radi de l'òrbita dels ions fins que, finalment, són expulsats per la finestra.





(a) Quina és la freqüència a la qual els ions recorren el ciclotró? Demostreu que la resposta és independent de l'energia cinètica dels ions si v<<c. Obteniu el resultat numèric corresponent al cas dels protons si suposem que B = 1,5 T.
(b) Si el màxim diàmetre que pot utilitzar-se en l'interior de les D és 60 cm, quines són l'energia cinètica màxima i la velocitat màxima que poden assolit el protó?
(c) Si els protons reben un impuls de 10^5 volt cada vegada que travessen la separació entre les dues D, quantes revolucions efectuaran abans d'escapar per la finestra? Quant de temps dura el procés sencer?
(d) Quina dificultat tècnica sorgeix si el màxim diàmetre que es pot fer servir augmenta fins a 6 m, per exemple?

Solució

Suposem v<<c

Força de Lorentz **F** = q(**v**^**B**), la relació entre els mòduls és F=qvB, de la segona llei de Newton, F_R= ma, $qVB = m\frac{V^2}{R}$, on $\frac{V^2}{R}$ és la component normal de l'acceleració, si a més tenim en compte que $V = \frac{2\pi R}{T}$, trobem que la freqüència per als protons és

$$\nu = \frac{qB}{2\pi \cdot m} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}5}{2 \cdot \pi \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}} = 2{,}3 \cdot 10^{7}\ Hz$$

La freqüència només depèn de la càrrega, q, la intensitat del camp magnètic aplicat, B, i la massa de la partícula.

(b) Si la velocitat és relativista, aleshores cal partir de

$qVB = \gamma m \dfrac{V^2}{R}$, d'on es dedueix que $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left[\dfrac{mc}{qBR}\right]^2}}$, i per als valors que hem considerat s'obté $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left[\dfrac{1{,}67{\cdot}10^{-27}3{\cdot}10^8}{1{,}6{\cdot}10^{-19}{\cdot}1{,}5{\cdot}0{,}3}\right]^2}} = 0{,}1423$, és a dir, V=4,3·10^7 m/s.

Per a aquest valor de β tenim que γ = 1,01, en conseqüència l'energia cinètica màxima dels protons és E_c =(γ -1)mc^2, on mc^2 = 938,27 MeV, per al protó. Així doncs, E_c = 9,38 MeV.

(c) Cada vegada que el protó passa pel camp elèctric s'incrementa l'energia en ΔE = q ΔV= 1·10^5 = 0,1 MeV, en una volta 0,2 MeV. Per el protó haurà de fer 9,38/0,2 = 47 voltes per assolir l'energia cinètica anterior. El temps que invertirà, t, serà,

$$t = \frac{1}{2{,}3{\cdot}10^7}{\cdot}47 = 2{\cdot}10^{-6}\,s$$

(d) Si suposem un comportament clàssic, trobaríem que els protons, per a un radi de 3 m, tenen una velocitat màxima de,

$V = \dfrac{qBR}{m} = \dfrac{1{,}6{\cdot}10^{-19}{\cdot}1{,}5{\cdot}3}{1{,}67{\cdot}10^{-27}} = 4{,}3{\cdot}10^8\,m/s$. Cal, doncs, una velocitat superior a la de la llum perquè no es trenque la condició de ressonància amb la freqüència del camp elèctric accelerador. Aquesta velocitat, realment, és menor segons la relativitat, equació $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left[\dfrac{mc}{qBR}\right]^2}}$, per tant es trenca la ressonància.