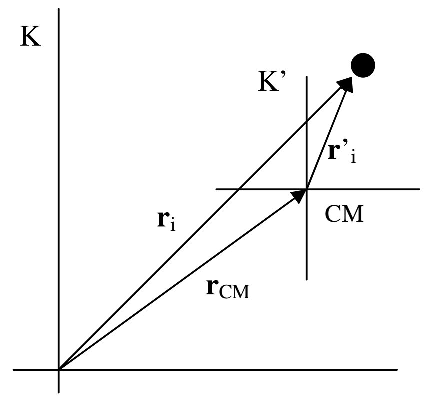
(**7-6 p. 261 FRENCH**) L'energia cinètica E_c d'un sistema en coordenades de laboratori età relacionada amb l'energia E_c^* en el sistema del centre de masses en el cas no relativista mitjançant l'expressió $E_c=E_c^*+MV^2/2$, a on M és la massa total del sistema i V la velocitat del centre de masses. Quina és l'expressió anàloga per al cas relativista? Demostreu que es redueix al cas anterior si totes les velocitats són molt menors que c.

Solució



Si les velocitats són molt menors que les de la llum, aleshores l'energia cinètica està definida per $E_c = \frac{1}{2}mv^2$.

De a figura $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{CM} + \mathbf{r}'_i$, i, per definició les coordenades del centre de masses, r_{CM}, són,

$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}$, es comprova, en substituir-hi $\mathbf{r}_i$ per $\mathbf{r}_{CM} + \mathbf{r}'_i$, que $\frac{\sum m_i \mathbf{r'}_i}{\sum m_i} = 0$, com era d'esperar.

Però, òbviament també es complirà que $\frac{\sum m_i \mathbf{v'}_i}{\sum m_i} = 0$, és a dir, $\sum m_i \mathbf{v'}_i = 0$. En derivar $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{CM} + \mathbf{r}'_i$ respecte del temps s'obté $\mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_i$, on **V** és la velocitat del centre de masses respecte de K. En elevar aquesta darrera expressió al quadrat, multipliquem per $\frac{1}{2}m_i$ i sumem per a tots els valors dels sistema, $\sum \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2}m_i V^2 + \sum \frac{1}{2}m_i v'^2_i + V\sum m_i v'_i$, però l'últim sumand és zero, per tant l'expressió anterior expressa que $E_C = E_C^* + \frac{1}{2}MV^2$ on $M = \sum m_i$.

Si la velocitat és pera a la de la llum, aleshores la transformació de les velocitat és $\beta_i = \frac{\beta + \beta_i'}{1+\beta\beta_i'}$, on $\beta = \frac{V}{c}$. L'energia cinètica d'un partícula relativista està definida per $E_i = (\gamma_i - 1)m_i c^2$. Si tenim en compte que $\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_i^2}}$ i el valor de $\beta_i = \frac{\beta + \beta_i'}{1+\beta\beta_i'}$, s'arriba, després de sumar per a totes les partícules del sistema, a l'expressió següent:

$$E_C = \sum \frac{(1+\beta\beta_i')m_i c^2}{\sqrt{(1-\beta^2)(1-\beta_i'^2)}} - Mc^2 \text{, on } E_C = \sum E_i$$

L'expressió anterior pot escriure's com

$$E_C = \gamma\left[\sum \gamma_i' m_i c^2 + \beta \sum \gamma_i' \beta_i' m_i c^2\right] - Mc^2$$

A on, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ i $\gamma'_i = \frac{1}{\sqrt{1-\beta'^2_i}}$

Però $\gamma_i^{'} m_i c^2$ és l'energia total de la partícula m_i respecte del centre de masses, és a dir, $\gamma_i^{'} m_i c^2 = E_{K'i} + m_i c^2$. La suma per a totes les partícules és $\left[\sum \gamma_i^{'} m_i c^2\right] = E_{K'} + Mc^2$.

El terme $\sum \gamma_i^{'} \beta_i^{'} m_i c^2$ és igual zero, ja que $\sum \gamma_i^{'} \beta_i^{'} m_i c^2 = \sum (pc)_i^{'} = 0$, doncs, l'impuls total del sistema de partícules respecte del centre de masses és nul.

En conseqüència obtenim que

$$E_C = \gamma\left[E_{K'} + Mc^2\right] - Mc^2$$