Determinación experimental de la velocidad del agua por una tubería

En muchas instalaciones hidráulicas (especialmente en las de gran tamaño), es preciso mantener la velocidad del agua dentro de ciertos valores límite, que dependen, entre otras cosas, del material de que estén hechas las tuberías y de la sección o el diámetro de las mismas. En términos generales, para tuberías de gran diámetro, las velocidades máximas no deben superar la franja entre los 4 m/s y 5 m/s, mientras que, para tuberías menores, no es conveniente que se superen los 2 m/s, si los tubos son metálicos, o los 3,5 m/s, si son de un material termoplástico y/o multicapa. Si se superan estas velocidades del agua, la fricción erosiona y desgasta las paredes de las tuberías y, muchas veces, también se generan ruidos. Así mismo, se deben superar unos valores mínimos de la velocidad (por lo general, se establece que no deben darse valores inferiores a los 0,5 m/s), para evitar procesos de sedimentación y la formación de depósitos. Por tanto, resulta del mayor interés disponer de dispositivos para poder medir y controlar la velocidad del agua que circula por una conducción, en distintos tramos de la misma.

Para determinar la velocidad del agua que circula por una tubería, bastaría con intercalar en el tramo de tubería deseado, el dispositivo esquematizado en la figura siguiente. Como se puede observar, este dispositivo (coloreado en rojo) está formado por un tramo horizontal (de la misma sección que la tubería en la que se va a intercalar) y por dos tubos verticales más estrechos, por los que, una vez colocado el dispositivo, el agua ascenderá alcanzando una cierta altura (distinta) en cada uno de ellos.

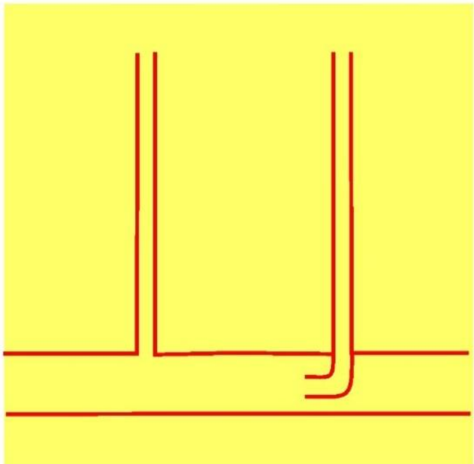


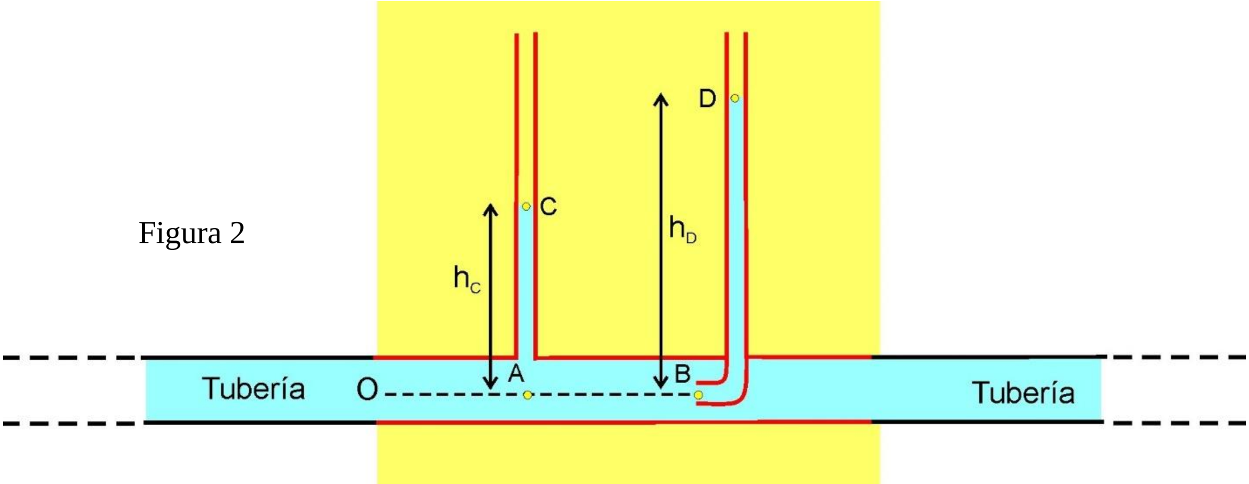
Figura 1

La altura alcanzada por el agua en los tubos verticales, está relacionada, de alguna manera, con la velocidad que deseamos medir. *¿Cómo podríamos averiguar dicha relación?*

Sabemos que, la ecuación de Bernoulli relaciona algunas magnitudes como la presión, la densidad o la altura con la velocidad a la que circula un fluido por una conducción, de forma que, si somos capaces de llegar a conocer dichas magnitudes, podríamos determinar el valor correspondiente de la velocidad.

En la figura 2 siguiente se ha representado el dispositivo anterior intercalado en una tubería por la que circula agua en régimen estacionario.

Figura 2



El agua al circular asciende por los tubos verticales hasta alcanzar en ellos una altura tal que la presión de la columna de agua en su base impide que entre más agua, alcanzándose así una situación de equilibrio en la que la velocidad del agua en el punto B será nula y la velocidad del agua en el punto A, será la velocidad que queremos calcular.

Considerando A, B, C y D de la figura 2 anterior y aplicando Bernoulli entre A y B:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v_B^2 + \rho \cdot g \cdot h_B$$

Si tenemos en cuenta que, en la situación representada en la figura 2 anterior, $h_A = h_B = 0$ y que $v_B = 0$, la ecuación queda como:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 = P_B \quad \rightarrow \quad \boxed{v_A = \sqrt{\frac{2 \cdot (P_B - P_A)}{\rho}}} \quad (1)$$

La determinación de v_A requiere conocer P_A y P_B, unas presiones que podemos conocer por consideraciones hidrostáticas en los tubos verticales.

$$P_A = P_C + \rho \cdot g \cdot h_C = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_C$$

$$P_B = P_D + \rho \cdot g \cdot h_D = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_D$$

Sustituyendo ahora P_A y P_B en la ecuación (1):

$$P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_C + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_D \quad (2)$$

Finalmente, simplificando en (2) y despejando, obtenemos la velocidad buscada:

$$\boxed{v_A = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h_D - h_C)}}$$

Si analizamos el resultado obtenido, vemos que además de ser dimensionalmente homogéneo (condición imprescindible), nos muestra que conocida la diferencia de alturas conoceremos la velocidad de modo que, cuanto menor sea la diferencia de alturas, menor será la velocidad.

Otro dispositivo útil para medir la velocidad del agua en una tubería, es el esquematizado en la figura 3 siguiente:

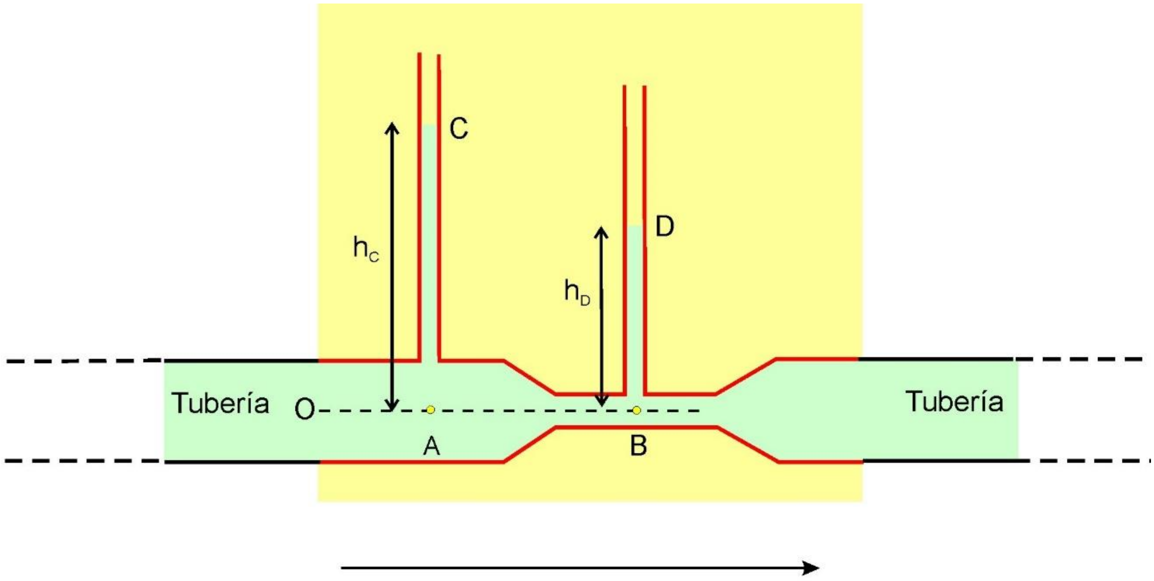


Figura 3

A diferencia del dispositivo anterior, aquí el segundo tubo, no se inserta ni se dobla dentro de la conducción, pero está conectado a un estrechamiento de la misma. De acuerdo con la ecuación de continuidad (ved problema 1), sabemos que ello supone que la velocidad con la que circula el agua en B será mayor que la velocidad en A y que, por tanto, la presión en B será menor que la presión en A, lo que explica que la altura alcanzada por el agua en el segundo tubo vertical sea, ahora, menor que en el primero.

Para determinar la velocidad del agua en A, aplicaremos Bernoulli entre A y B, con lo que:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v_B^2 + \rho \cdot g \cdot h_B$$

Teniendo en cuenta que $h_A = h_B = 0$, la ecuación anterior queda como:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v_B^2 \quad (3)$$

Vemos que la determinación de v_A requiere, en este caso, conocer P_A, P_B y v_B.

Por consideraciones hidrostáticas sabemos que:

$$P_A = P_C + \rho \cdot g \cdot h_C = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_C$$

$$P_B = P_D + \rho \cdot g \cdot h_D = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_D$$

Por otra parte, de acuerdo con la ecuación de continuidad: $v_A \cdot S_A = v_B \cdot S_B \rightarrow v_B = \frac{S_A}{S_B} \cdot v_A$

Sustituyendo en la ecuación (3) anterior:

$$P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_C + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_D + \frac{1}{2}\rho \cdot \frac{S_A^2}{S_B^2} \cdot v_A^2 \quad (4)$$

Finalmente, simplificando en (4) y despejando, obtenemos:

$$v_A = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot (h_c - h_D)}{\left(\frac{S_A^2}{S_B^2} - 1\right)}}$$

El interés de los dos dispositivos que acabamos de ver, para medir la velocidad a la que circula el agua por una tubería es, fundamentalmente, teórico, ya que, en la práctica, ninguno sería muy útil, puesto que para valores habituales de la presión (como 2 atm o 3 atm), las columnas de agua en los tubos verticales serían de decenas de metros de altura. El que sí se utiliza habitualmente es el dispositivo representado de forma esquemática en la figura 4 siguiente, conocido como “venturímetro”, en el cual se usa mercurio (de color gris en la figura), cuya densidad, ρ_{Hg}, supera en unas 13,5 veces la densidad del agua líquida.

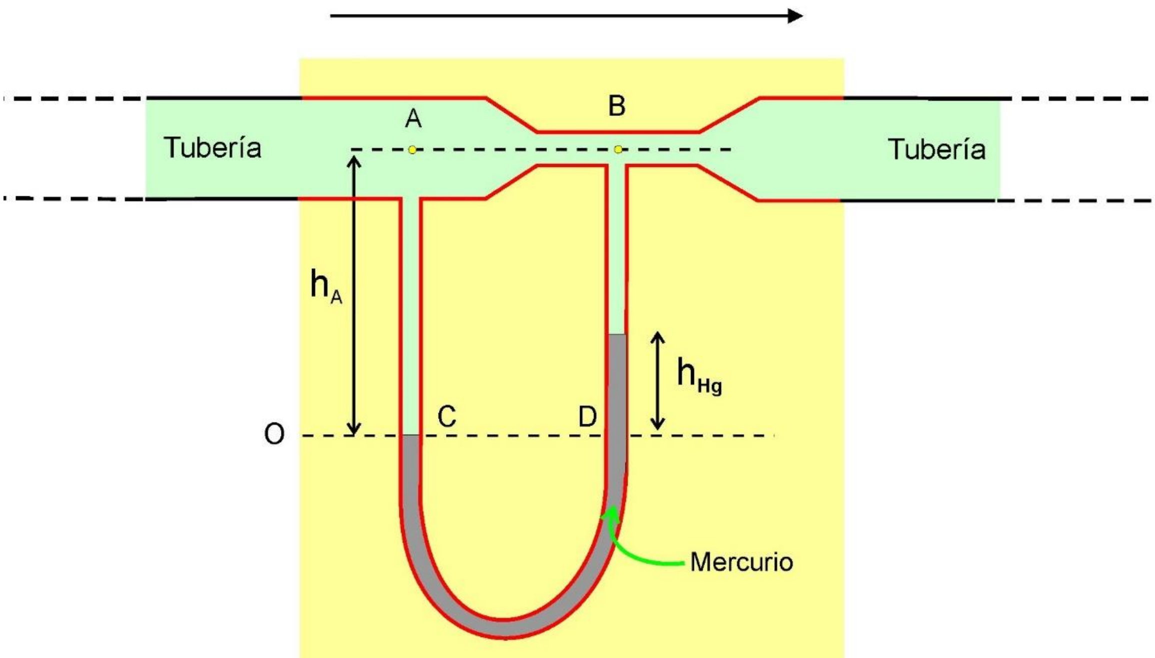


Figura 4

Con objeto de determinar la velocidad a la que circula el agua por una tubería se le coloca un venturímetro de Hg, cuya sección es 30 cm^2 en la zona ancha y 10 cm^2 en la zona estrecha. Si el caudal del agua que circula por la tubería es de 4 ml/s, obtened la velocidad a la que circula dicha agua por la tubería, la constante k del aparato y el desnivel entre las columnas de Hg.

En este caso, procederemos también como en los anteriores y aplicaremos Bernoulli entre los puntos A y B de la figura:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v_B^2 + \rho \cdot g \cdot h_B$$

Si tenemos en cuenta que $h_A = h_B$:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v_B^2 \ (5)$$

De acuerdo con la ecuación de continuidad, se cumplirá, además, que: $v_B = \frac{S_A}{S_B} \cdot v_A$

Sustituyendo v_B en la ecuación y despejando: $$v_A = \sqrt{\frac{2 \cdot (P_A - P_B)}{\rho \cdot \left(\frac{S_A^2}{S_B^2} - 1\right)}} \ (6)$$

Por consideraciones hidrostáticas:

$$P_C = P_D \rightarrow P_A + \rho \cdot g \cdot h_A = P_B + \rho \cdot g \cdot (h_A - h_{Hg}) + \rho_{Hg} \cdot g \cdot h_{Hg}.$$

Simplificando:

$$P_A - P_B = g \cdot h_{Hg} \cdot (\rho_{Hg} - \rho)$$

Sustituyendo la expresión de P_A-P_B obtenida, en la ecuación (6):

$$v_A = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h_{Hg} \cdot (\rho_{Hg} - \rho)}{\rho\left(\frac{S_A^2}{S_B^2} - 1\right)}} \ (7)$$

Teniendo en cuenta que: $S_A = \pi \cdot \frac{D_A^2}{4}$ y que: $S_B = \pi \cdot \frac{D_B^2}{4}$

(D_A y D_B son los diámetros de las secciones transversales de tubería centradas en A y B respectivamente).

La ecuación (7) se puede expresar finalmente como:

$$v_A = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot (\rho_{Hg} - \rho)}{\rho \cdot \left(\frac{D_A^4}{D_B^4} - 1\right)}} \cdot \sqrt{h_{Hg}}$$

La primera raíz cuadrada es una constante (k) característica del aparato por lo que, en la práctica, el uso de este dispositivo es muy simple, ya que, conocido el valor de k, la velocidad con que circula el agua en el punto A, se puede determinar mediante la siguiente expresión:

$$v_A = k \cdot \sqrt{h_{Hg}}$$

Con este dispositivo no tenemos el inconveniente de los anteriores ya que aquí medimos, con la columna de mercurio (de mucha más densidad que el agua), la diferencia de presión entre A y B, directamente.

Para los valores considerados anteriormente, la constante k resulta:

$$k = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot (\rho_{Hg} - \rho)}{\rho \cdot \left(\frac{D_A^4}{D_B^4} - 1\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}8 \cdot (13\ 534 - 1\ 000)}{1\ 000 \cdot (9 - 1)}} = 5{,}54\ \mathrm{m}^{1/2} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

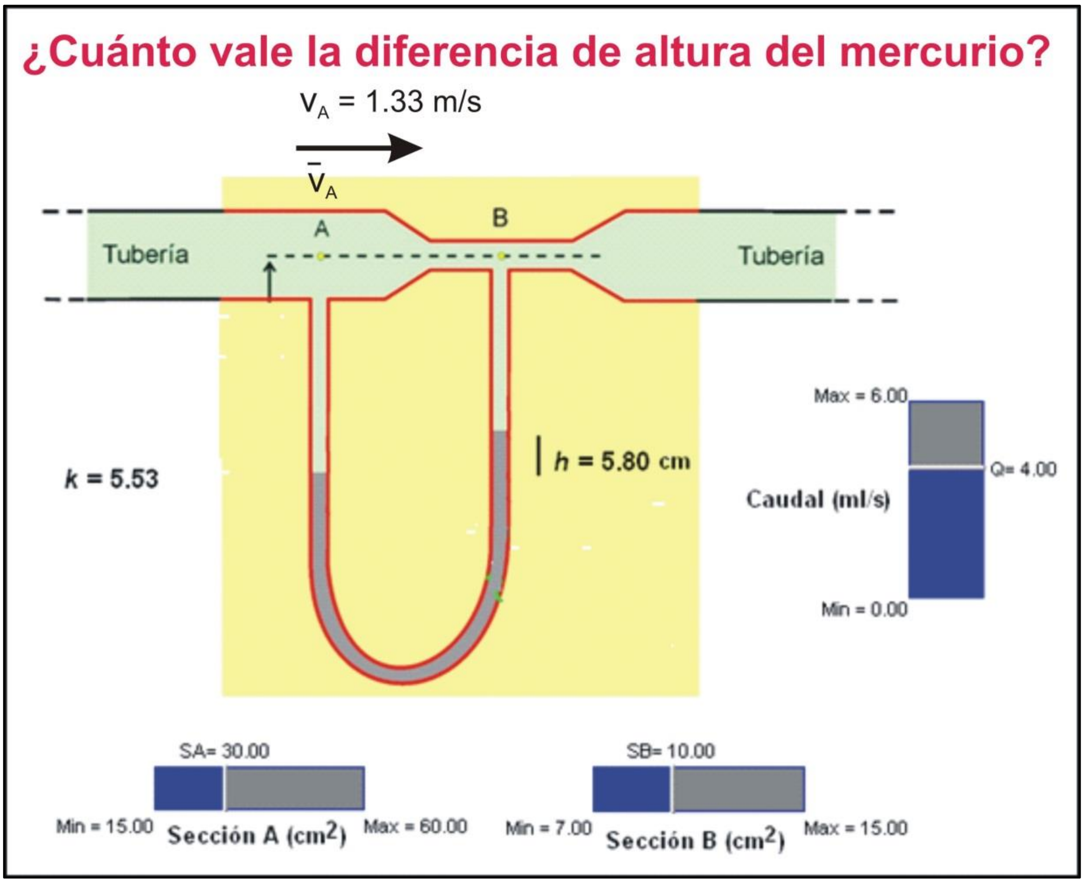
La velocidad del agua por la tubería será:

$$v_A = \frac{Q}{S_A} = \frac{0{,}004}{0{,}003} = \frac{4}{3} = 1{,}33\ \mathrm{m/s}$$

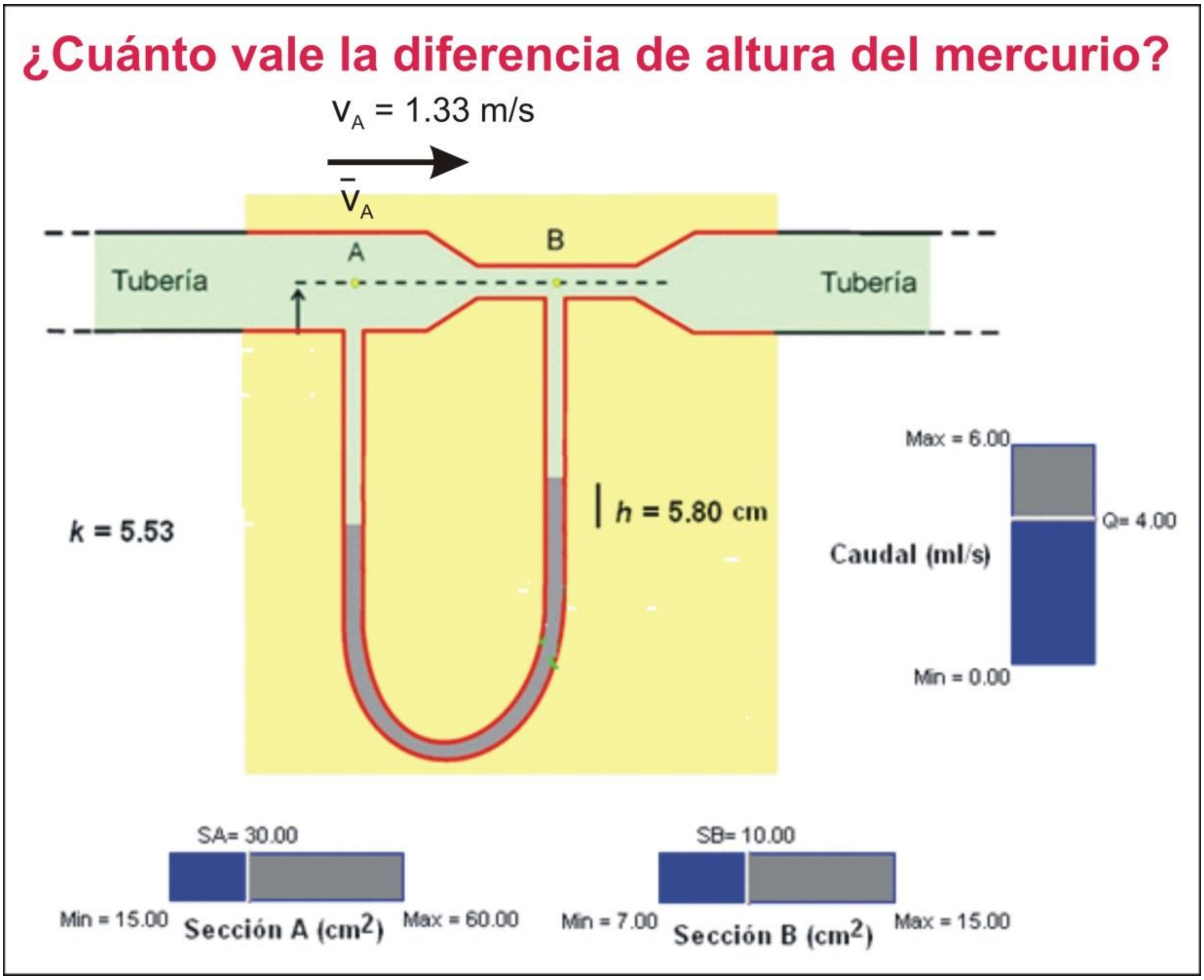
Y la diferencia de altura entre las columnas de Hg será:

$$h_{\mathrm{Hg}} = \frac{v_A^2}{k^2} = 0{,}057\ 9\ m = 5{,}79\ \mathrm{cm}$$

Para reforzar este problema hemos construido una animación *Modellus*, que obtiene estos resultados y en la pantalla proporciona tres controladores manuales, con los que los alumnos pueden modificar el caudal que circula por la tubería y las áreas transversales en A y C, viendo cómo afectan estas modificaciones al aspecto y el valor de la diferencia de alturas entre las dos columnas de mercurio. La figura siguiente muestra el aspecto de la animación para los datos anteriormente expuestos.



Está animación está disponible en la Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física de la Sección Local de Alicante de la RSEF: http://rsefalicance.umh.es/fisica.htm.



¿Cuánto vale la diferencia de altura del mercurio?
vA = 1.33 m/s
vA
A
B
Tubería
Tubería
k = 5.53
h = 5.80 cm
Max = 6.00
Q= 4.00
Caudal (ml/s)
Min = 0.00
SA= 30.00
Min = 15.00
Sección A (cm2)
Max = 60.00
SB= 10.00
Min = 7.00
Sección B (cm2)
Max = 15.00