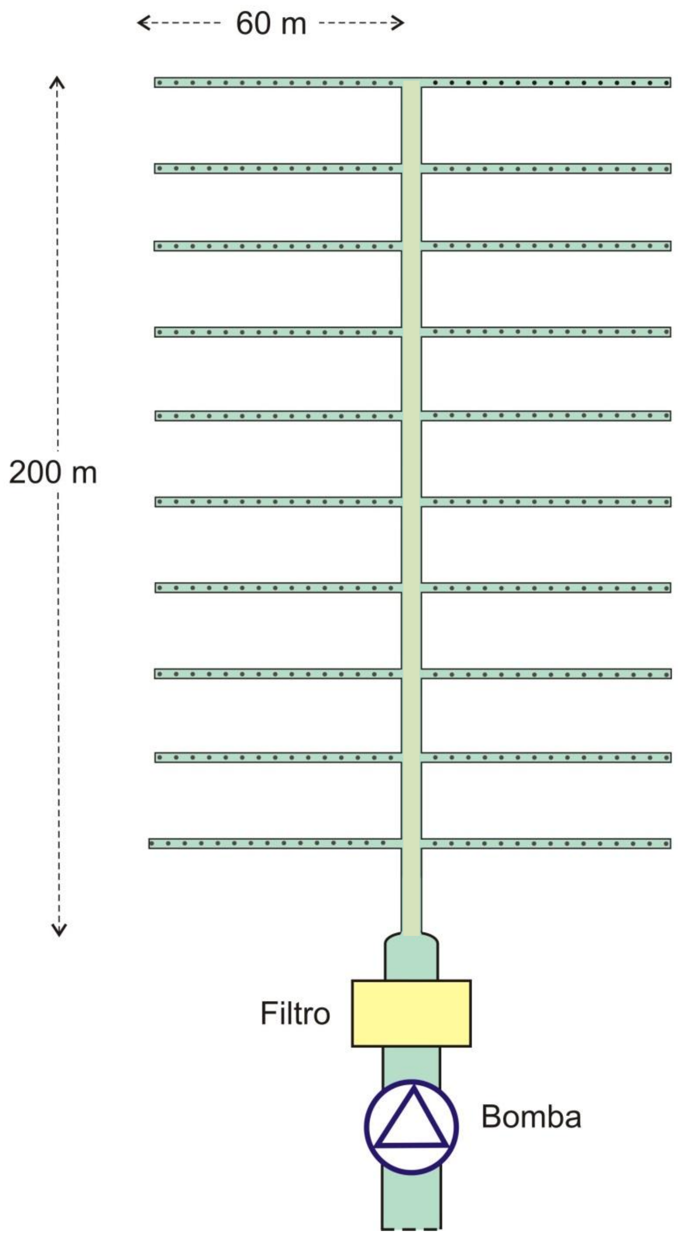
En una superficie plana, que se encuentra 20 m por encima de la ubicación de la bomba, se monta una red de riego por goteo constituida por un ramal principal, de 200 m de longitud y 30 mm de diámetro, del que parten 20 ramales portagoteros. Cada uno de estos ramales, de 60 m de longitud y 10 mm de diámetro, consta de 15 goteros autocompensantes (funcionan entre 1'5 atm y 5 atm), con un caudal de 8 l/h cada gotero. Se pide:

Potencia hidráulica que debe tener la bomba, sabiendo que esta absorbe el agua de un pozo cuyo nivel de agua se encuentra 8 m por debajo de la bomba.

Datos: Desde la salida de la bomba hasta la entrada en la red de riego, en el sistema de filtrado y conducción, se produce una pérdida de carga de 8 m.c.a., siendo el factor de fricción en los ramales de la red f = 0'03. La disposición de los distintos elementos es la del esquema adjunto (no a escala).



Sabemos (ved problema 11), que la potencia hidráulica de la bomba viene dada por la expresión:

$P_{hidr} = (P_b - P_{ent}) \cdot Q$ (1)

Donde P_{hidr} = Potencia hidráulica, P_b = presión suministrada por la bomba, P_{ent} = presión a la entrada de la bomba, Q = caudal suministrado.

Como en el enunciado quedan fijados tanto Q como P_{ent}, la mínima potencia requerida será aquella capaz de suministrar la mínima presión de funcionamiento de los goteros (1'5 atm) al gotero que le llegue menos presión (que, como es lógico, será aquel que se encuentre más alejado y, por tanto, la pérdida de carga sea mayor).

Calculamos Q como:

$Q = N \cdot Q_{got} = (20 \cdot 15) \cdot 8 = 2400$ l/h $= 6'67 \cdot 10^{-4}$ m^3/s

Este tipo de bombas funcionan creando un vacío de modo que sea la presión atmosférica la que eleve el agua. Como la máxima altura a la que la presión atmosférica puede elevar el agua es de 10'34 m, en este caso elevará el agua los 8 m de desnivel y aun le quedará una presión de entrada de:

$P_{ent} = 10'34 - 8 = 2'34$ m.c.a. $= 2'34/10'34 = 0'23$ atm $= 0'23 \cdot 1'013 \cdot 10^5 = 2'33 \cdot 10^5$ N/m^2

La presión suministrada por la bomba, podemos expresarla como:

$P_b = P_A + p_{fil}$ (2)

Donde P_A = presión que se suministra a la entrada de la red (punto A), p_{fil} = perdida de carga que se produce en el sistema de filtrado y conducción desde la salida de la bomba hasta el punto A.

En la ecuación (2) anterior:

$p_{fil} = 8$ m.c.a $= (8/10'34) \cdot 1'013 \cdot 10^5 = 7'84 \cdot 10^4$ N/m^2

Para determinar P_A, aplicaremos Bernoulli, con pérdidas, entre los puntos A y B del esquema (que corresponden, respectivamente, a la entrada de la red y al gotero más alejado).

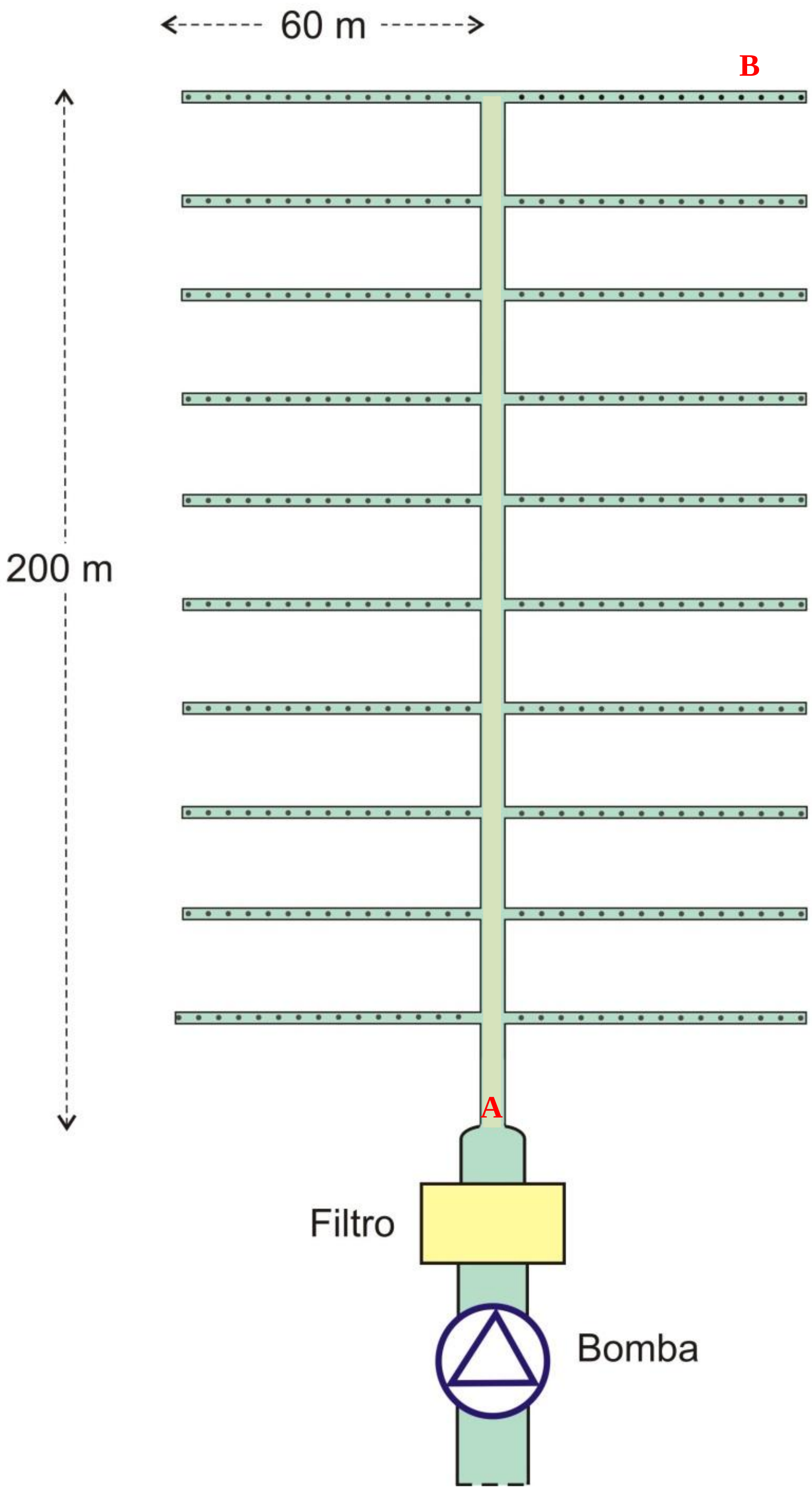
$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B + P_f$$

Despejando:

$$P_A = \frac{1}{2}\rho(v_B^2 - v_A^2) + \rho g h_B + P_B + P_f \qquad (3)$$

Como ya hemos comentado, la mínima potencia de la bomba que hará funcionar correctamente la red de riego, será aquella que suministre una P_B = 1'5 atm. Para conocer P_A, necesitaremos determinar, pues, v_B, v_A y p_f.

¿Cómo podríamos hacerlo?


60 m
B
200 m
A
Filtro
Bomba

En el punto A se cumple que $Q_A = v_A \cdot S_A$ y como $Q_A = Q$, tenemos:

$$v_A = \frac{Q}{S_A} = \frac{6'64 \cdot 10^{-4}}{\frac{\pi(30 \cdot 10^{-3})^2}{4}} = \frac{6'64 \cdot 10^{-4}}{7'07 \cdot 10^{-4}} = 0'94 \text{ m/s}$$

Análogamente, en el punto B, se cumple que $Q_B = v_B \cdot S_B$ y como Q_B = 8 l/h = $2'22 \cdot 10^{-6}$ m^3/s, tenemos:

$$v_B = \frac{Q_B}{S_B} = \frac{2'22 \cdot 10^{-6}}{\frac{\pi(10 \cdot 10^{-3})^2}{4}} = \frac{2'22 \cdot 10^{-6}}{7'85 \cdot 10^{-5}} = 0'028 \text{ m/s}$$

Para conocer p_f, consideraremos que $p_f = \rho \cdot g \cdot h_f$ y calcularemos h_f (tanto en el ramal principal como en los restantes), utilizando la expresión de Darcy. El cálculo resulta un tanto laborioso porque a lo largo de los ramales, la velocidad no se mantiene constante, ya que, debido a las salidas, cada vez hay menos caudal por las conducciones.

Comenzaremos calculando h_f en el ramal principal (que simbolizaremos como h_{fp}), dividiéndolo en tramos de 20 m (10 tramos), de modo que:

$$h_{fp} = h_{fp1} + h_{fp2} + h_{fp3} + \ldots + h_{fp10}$$

En cada uno de esos tramos "i", aplicando la expresión de Darcy, se cumplirá:

$$h_{fpi} = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v_i^2}{2g}$$

En la ecuación anterior, $v_i = Q_i/S$ siendo Q_i el caudal que entra al tramo en cuestión. Dicho caudal se podrá expresar como el producto del caudal de un gotero (que es un dato conocido), por el número N_i de goteros (salidas) cuya agua haya pasado previamente por dicho tramo. Es decir, en el primer tramo (el más cercano a la bomba), se tendrá: $N_1 = 300$, en el segundo: $N_2 = 270$ y así sucesivamente hasta el más alejado: $N_{10} = 30$.

De acuerdo con los razonamientos anteriores, la pérdida de carga en cualquiera de esos 10 tramos del ramal principal, se podrá expresar como:

$$h_{fpi} = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{Q_i^2}{S^2 \cdot 2g} = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{N_i^2 \cdot (2'22 \cdot 10^{-6})^2}{S^2 \cdot 2g} = 0'03 \cdot \frac{20}{0'03} \cdot \frac{N_i^2 \cdot (2'22 \cdot 10^{-6})^2}{(7'07 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 2 \cdot 9'8} \rightarrow$$

$$h_{fpi} = 10^{-5} \cdot N_i^2$$

Aplicando la expresión general obtenida a cada tramo en particular:

$h_{fp1} = 10^{-5} \cdot 300^2 = 0'900$ mca
$h_{fp2} = 10^{-5} \cdot 270^2 = 0'729$ mca
$h_{fp3} = 10^{-5} \cdot 240^2 = 0'576$ mca

$h_{fp4} = 10^{-5} \cdot 210^2 = 0'441$ mca
$h_{fp5} = 10^{-5} \cdot 180^2 = 0'324$ mca
$h_{fp6} = 10^{-5} \cdot 150^2 = 0'225$ mca
$h_{fp7} = 10^{-5} \cdot 120^2 = 0'144$ mca
$h_{fp8} = 10^{-5} \cdot 90^2 = 0'081$ mca
$h_{fp9} = 10^{-5} \cdot 60^2 = 0'036$ mca
$h_{fp10} = 10^{-5} \cdot 30^2 = 0'009$ mca

Y sumando, obtenemos finalmente el valor de h_f en el ramal principal: $h_{fp} = 3'465$ mca

A continuación, hemos de proceder de forma análoga con el ramal secundario en el que se encuentra el punto B (al final del mismo), para lo cual, lo descompondremos en tramos de 4 m (15 tramos), de modo que:

$$h_{fs} = h_{fs1} + h_{fs2} + h_{fs3} + \ldots + h_{fs15}$$

En cada uno de esos tramos "i", aplicando la expresión de Darcy, se cumplirá:

$$h_{fsi} = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v_i^2}{2g}$$

En la ecuación anterior, $v_i = Q_i/S$ siendo Q_i el caudal que entra al tramo en cuestión. Dicho caudal se podrá expresar como el producto del caudal de un gotero (que es un dato conocido), por el número N_i de goteros (salidas) de ramal secundario cuya agua haya pasado previamente por dicho tramo. Es decir, en el primer tramo (el más cercano al ramal principal), se tendrá: $N_1 = 15$, en el segundo: $N_2 = 14$ y así sucesivamente hasta el tramo más alejado (donde se encuentra el punto B): $N_{15} = 1$.

De acuerdo los razonamientos anteriores, la pérdida de carga en cualquiera de esos 15 tramos del ramal secundario, se podrá expresar como:

$$h_{fsi} = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{Q_i^2}{S^2 \cdot 2g} = 0'03 \cdot \frac{4}{0'01} \cdot \frac{N_i^2 \cdot (2'22 \cdot 10^{-6})^2}{S^2 \cdot 2g} = 0'03 \cdot \frac{4}{0'01} \cdot \frac{N_i^2 \cdot (2'22 \cdot 10^{-6})^2}{(7'85 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 2 \cdot 9'8} \rightarrow$$
$$h_{fsi} = 4'9 \cdot 10^{-4} \cdot N_i^2$$

Aplicando la expresión general obtenida a cada tramo en particular:

$h_{fs1} = 4'9 \cdot 10^{-4} \cdot 15^2 = 0'110$ mca
$h_{fs2} = 4'9 \cdot 10^{-4} \cdot 14^2 = 0'096$ mca
$h_{fs3} = 4'9 \cdot 10^{-4} \cdot 13^2 = 0'083$ mca
$h_{fs4} = 4'9 \cdot 10^{-4} \cdot 12^2 = 0'071$mca
$h_{fs5} = 4'9 \cdot 10^{-4} \cdot 11^2 = 0'059$ mca
$h_{fs6} = 4'9 \cdot 10^{-4} \cdot 10^2 = 0'049$ mca
$h_{fs7} = 4'9 \cdot 10^{-4} \cdot 9^2 = 0'040$ mca
$h_{fs8} = 4'9 \cdot 10^{-4} \cdot 8^2 = 0'031$ mca
$h_{fs9} = 4'9 \cdot 10^{-4} \cdot 7^2 = 0'024$ mca
$h_{fs10} = 4'9 \cdot 10^{-4} \cdot 6^2 = 0'018$ mca
$h_{fs11} = 4'9 \cdot 10^{-4} \cdot 5^2 = 0'012$ mca

$h_{f_{s12}} = 4'9\cdot10^{-4}\cdot 4^2 = 0'008$ mca
$h_{f_{s13}} = 4'9\cdot10^{-4}\cdot 3^2 = 0'004$ mca
$h_{f_{s14}} = 4'9\cdot10^{-4}\cdot 2^2 = 0'002$ mca
$h_{f_{s15}} = 4'9\cdot10^{-4}\cdot 1^2 = 0'000$ mca

Y sumando, obtenemos finalmente el valor de h_s en el ramal secundario que contiene a B:

$h_{f_s} = 0'607$ mca

Luego la pérdida de carga de presión desde A hasta B, será:

$p_f = \rho\cdot g\cdot h_f = 10^3\cdot 9'8\cdot(3'465+0'607) = 3'99\cdot10^4$ N/m^2 (sería $4'04\cdot10^4$ N/m^2)

Tenemos ya, pues, los valores de v_A, v_B y p_f, que necesitábamos. Sustituyendo ahora en la ecuación (3) anterior $P_A = \frac{1}{2}\rho(v_B^2 - v_A^2) + \rho g h_B + P_B + p_f$, obtenemos:

$$P_A = \frac{1}{2}\cdot 10^{-3}(0'028^2 - 0'94^2) + 10^3\cdot 9'8\cdot 20 + 1'5\cdot 1'013\cdot 10^5 + 3'99\cdot 10^4 \rightarrow$$

$P_A = 3'88\cdot10^5$ N/m^2

Y sustituyendo en (2), se obtiene la presión suministrada por la bomba:

$P_b = P_A + p_{fil} = 3'88\cdot10^5 + 7'84\cdot10^4 = 4'66\cdot10^5$ N/m^2

Finalmente, sustituyendo en (1), podemos hallar la potencia hidrostática buscada:

$P_{hidr} = (P_b - P_{ent})\cdot Q = (4'66\cdot10^5 - 2'33\cdot10^4)\cdot 6'66\cdot10^{-4} = 294'8$ W

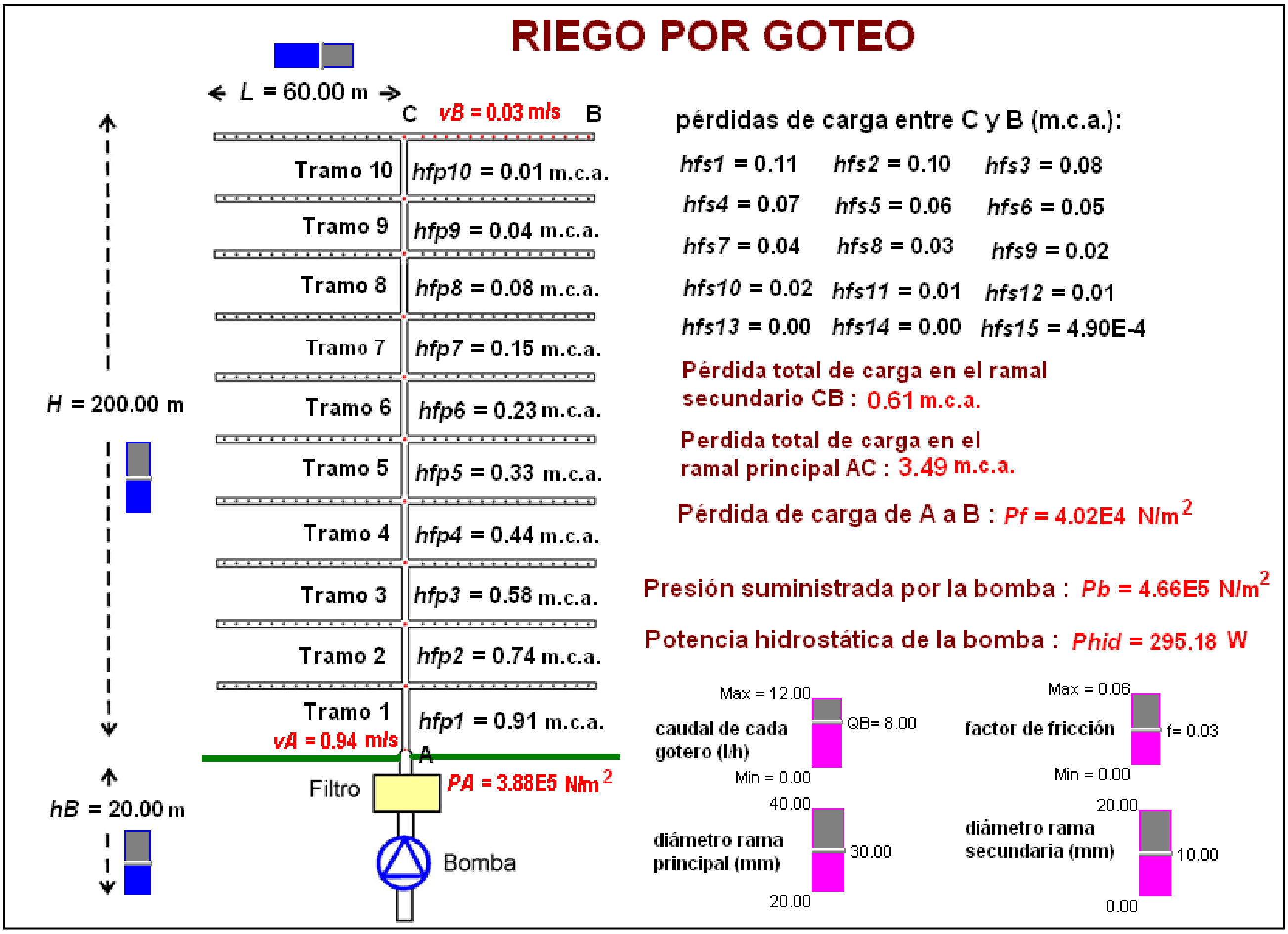
Para terminar, cabe señalar que:

- Al ser pequeñas las velocidades en las conducciones, el término cinético ($\rho v^2/2$) en la ecuación de Bernoulli resulta despreciable frente al resto de valores.

- Por el mismo motivo, la pérdida de carga es poco significativa. Si la hubiéramos despreciado, el resultado obtenido habría sido de 268 W

Los estudiantes pueden practicar este problema con una animación *Modellus*, que calcula todas las magnitudes buscadas. En la pantalla hemos colocado varios controladores manuales para poder modificar casi todos los parámetros intervinientes, viendo cómo afectan esas modificaciones a los resultados. Usándolos, los estudiantes pueden poner a prueba diferentes hipótesis y, dado que se trata de un problema complejo, en el que intervienen muchas variables, también pueden aprovechar estos controladores para ver más detenidamente a qué magnitudes afectan posibles cambios en otras. Por ejemplo: pueden modificar la altura del ramal principal y comprobar que, además de verse afectadas por esta modificación la potencia hidráulica de la bomba y la presión que dicha bomba ha de suministrar, también se alteran los valores de las pérdidas en cada sub-tramo vertical de dicho ramal, pero no lo hacen, lógicamente, los de las pérdidas en los ramales secundarios horizontales (lo contrario ocurre si modifica la longitud de dichos ramales secundarios); con la misma intención pueden modificar bien el diámetro del ramal principal o bien el de los ramales secundarios; también pueden modificar la altura a la que se ubica la bomba, comprobando que, entonces cambia la presión que dicha bomba suministra, así como la presión en la conducción y, por supuesto, la potencia hidráulica requerida, pero, en cambio, no se ven afectados los valores de las pérdidas en las conducciones; etc.

Finalmente, los estudiantes también pueden probar con la animación algunos casos límite evidentes, como, por ejemplo: igualar el caudal de cada gotero a cero para comprobar que entonces no se requiere potencia hidráulica alguna y no existen pérdidas; eliminar la fricción (f=0) para obtener la potencia hidráulica requerida en ese caso ideal en el que se anularían todas las pérdidas; etc.



La animación está disponible en la Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física de la Sección Local de Alicante de la RSEF: http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm