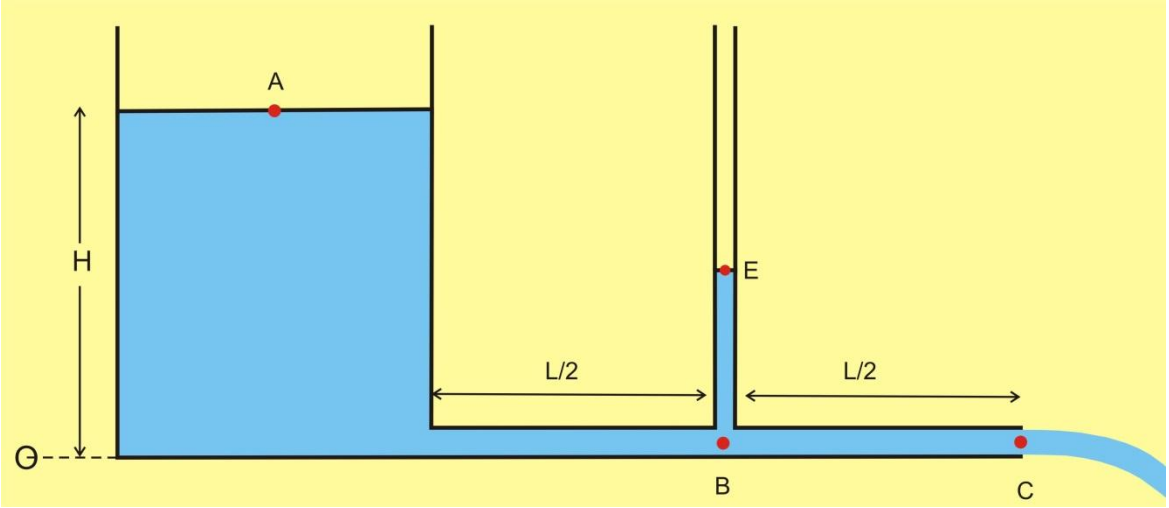
Dada la situación de la figura, en la que la sección del depósito es mucho mayor que la de la conducción, determinad:



a) Pérdida de presión que se produce en la conducción, utilizando la expresión de Darcy-Weisbach:

$$P_f = f \cdot \frac{\rho L v^2}{2D}$$

b) Altura del agua en el tubo vertical.

Datos: P_{atm} = 1'013·10^5 N/m^2, diámetro de la conducción D = 12 mm, densidad del líquido (agua) ρ = 10^3 kg/m^3, H = 10 m, L = 12 m, f = 0'05.

a) Para determinar p_f con la expresión de Darcy-Weisbach (dada en el enunciado), necesitamos conocer previamente la velocidad con la que circula el líquido en la conducción, la cual podemos obtener aplicando Bernoulli con pérdidas, entre los puntos A y C:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 + \rho g h_A = P_C + \frac{1}{2}\rho \cdot v_C^2 + \rho g h_C + P_f$$

Teniendo en cuenta que $P_A = P_C = P_{atm}$, $h_C = 0$, $v_C = v$ (la misma en cualquier punto de la tubería horizontal) y que, al ser la sección del depósito mucho mayor que la de la conducción, podremos despreciar v_A (como ya se justificó en problemas anteriores), la expresión anterior queda como:

$$P_{atm} + \rho g H = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + f \cdot \frac{\rho L v^2}{2D}$$

Y despejando:

$$v = \sqrt{\frac{gH}{\frac{1}{2} + f \cdot \frac{L}{2D}}} \rightarrow v = \sqrt{\frac{9'8 \cdot 10}{\frac{1}{2} + 0'05 \cdot \frac{12}{2 \cdot 0'012}}} \rightarrow \ v = 1'96 m/s$$

Sustituyendo ahora en la expresión de Darcy-Weisbach:

$$P_f = f \cdot \frac{\rho L v^2}{2D} = 0'05 \cdot \frac{10^3 \cdot 12 \cdot 1'96^2}{2 \cdot 0'012} = 9'6 \cdot 10^4 \ \frac{N}{m^2} = 0'95 \text{ atm}$$

b) En cuanto a la altura "h" del agua en el tubo vertical, sabemos que está relacionada con la presión existente en el punto B mediante la ecuación fundamental de la hidrostática, por lo que, para determinarla, bastará con aplicar esta ecuación entre los puntos B y E

$$P_B = P_E + \rho g h \ \rightarrow \ h = \frac{P_B - P_{atm}}{\rho g} \quad (1)$$

En la ecuación anterior, se ha tenido en cuenta que $P_E = P_{atm}$

Necesitamos conocer P_B. Para ello aplicaremos Bernoulli entre A y B:

$$P_A + \rho g H = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + p_{fB}$$

Como $p_{fB} = p_f/2$, tendremos que: $P_B = P_{atm} + \rho g H - \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 - \frac{p_f}{2}$

En la ecuación anterior todo es conocido. Sustituyendo P_B en la ecuación (1):

$$h = \frac{\rho g H - \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 - \frac{P_f}{2}}{\rho g}$$

Finalmente, sustituyendo p_f y simplificando:

$$h = H - \frac{v^2}{2g} \cdot \left(1 + f \cdot \frac{L}{2D}\right)$$

Si analizamos el resultado obtenido, además de constatar que es dimensionalmente homogéneo (L en ambos lados), nos podemos dar cuenta de que, en el caso de que v fuese 0, h = H (valor máximo que puede tomar h, correspondiente a una situación inicial de equilibrio con C tapado y agua en reposo). De forma general vemos que, con el depósito abierto, h es igual a la altura del depósito menos un término de altura cinética, menos otro relativo a las pérdidas. Es interesante notar que si hacemos que f vaya disminuyendo, lógicamente h también disminuirá y lo irá haciendo de forma progresiva, pero, dará un salto brusco al llegar al límite en el que f = 0. En efecto, si f = 0, tendremos también que h = 0, ya que en ese caso se ha de cumplir que $v^2 = 2 \cdot g \cdot H$ (teorema de Torricelli). Es decir, en una situación completamente ideal (sin pérdidas), como ya se vio también en el problema anterior, el agua no ascendería por la columna.

Sustituyendo los valores numéricos:

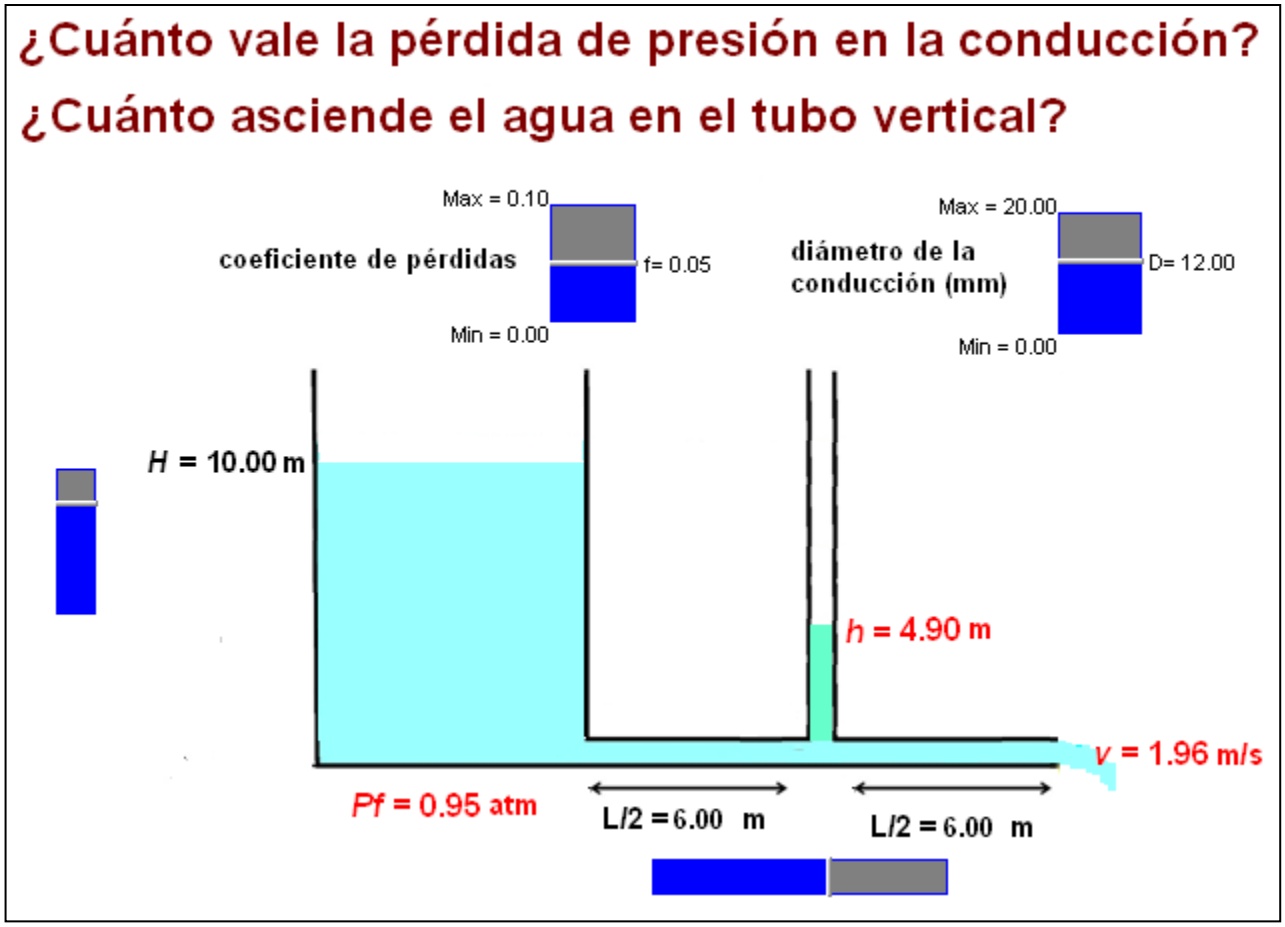
$$h = H - \frac{v^2}{2g} \cdot \left(1 + f \cdot \frac{L}{2D}\right) = 10 - \frac{1'96^2}{2 \cdot 9'8} \cdot \left(1 + 0'05 \cdot \frac{12}{2 \cdot 12 \cdot 10^{-3}}\right) = 4'90 \text{ m}$$

Un resultado que, como es lógico, es menor que H = 10 m.

Para reforzar este problema hemos elaborado una animación *Modellus*, que representa la situación y calcula la altura del agua en el tubo vertical, la pérdida de carga en la conducción y la velocidad con la que sale el agua. En la pantalla hemos colocado varios controladores manuales para que los

alumnos puedan modificar el valor de la altura del agua en la zona ancha de la conducción, H, los de la longitud, L, y el diámetro, D, del tubo, y el del coeficiente de pérdidas, f. Manipulando estos controladores, los estudiantes pueden poner a prueba hipótesis y constatar casos límite, como los que hemos comentado un poco más arriba.

La imagen adjunta muestra el aspecto de la pantalla cuando los valores de los parámetros coinciden con los del enunciado.



La animación y el programa necesario para hacerla correr están disponibles en la Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física de la Sección Local de Alicante de la RSEF: http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm