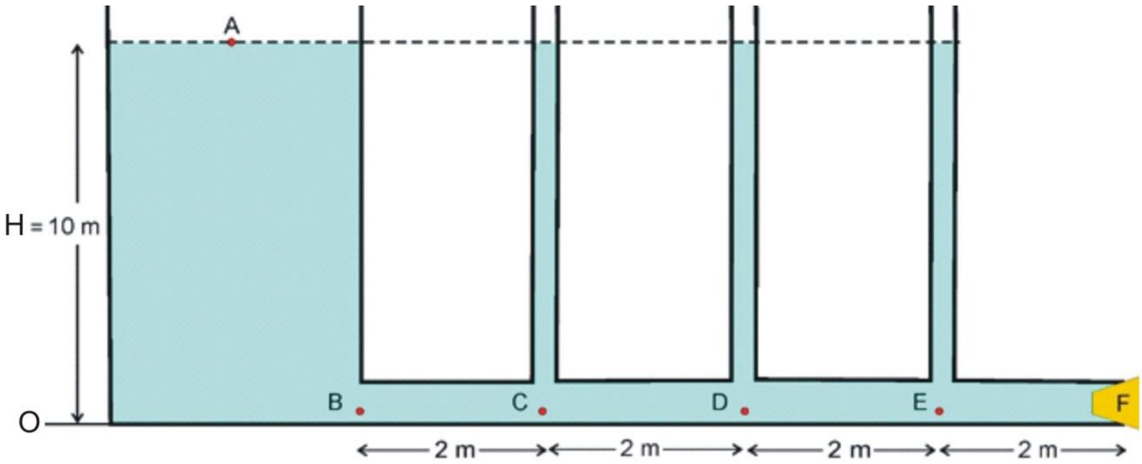
Determinad la velocidad del agua en la boca de salida y los niveles que se producirán en los tubos, al quitar el tapón, en los siguientes casos:



a) Suponiendo que no haya ninguna pérdida de energía mecánica.
b) Existe una pérdida lineal de 0'08 atm/m en la conducción.

Datos: El dibujo no está a escala. Considerad que la sección del depósito es mucho mayor que la sección de la conducción. 1 atm = 1'013·10^5 N/m^2. Densidad agua ρ = 10^3 kg/m^3.

a) Vamos a analizar, en primer lugar, lo que sucederá al quitar el tapón suponiendo el caso ideal de que no haya ninguna pérdida de energía mecánica. En este supuesto, podremos aplicar la ecuación de Bernoulli a los puntos A, B, C, D, E y F, representados en la figura, en la forma:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 + \rho g h_A = \dots\dots\dots\dots = P_F + \frac{1}{2}\rho \cdot v_F^2 + \rho g h_F$$

Considerando el origen de alturas representado, sabemos que:

$h_A = H$ y que $h_B = h_C = h_D = h_E = h_F = 0$

También se cumplirá que: $P_A = P_F = P_{atm}$ y que: $v_B = v_C = v_D = v_E = v_F = v$

Por otra parte, dado que, tal y como se especifica en el enunciado, la sección del depósito (S_A) es mucho mayor que la sección de la conducción (S), según la ecuación de continuidad, la velocidad v_A a la que desciende el nivel del depósito será mucho menor que la velocidad v a la que circula el agua por la conducción, lo que nos permitirá despreciar el sumando $\frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2$. Además, si el intervalo de tiempo considerado no es muy grande, podremos suponer que, a lo largo del mismo, la altura H se mantiene prácticamente constante.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, la ecuación de Bernoulli queda como:

$$P_{atm} + \rho g H = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 = \dots\dots\dots = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2$$

De donde se concluye que:

$\rho g H = \frac{1}{2}\rho \cdot v^2$ (1)

$P_B = P_C = P_D = P_E = P_{atm}$ (2)

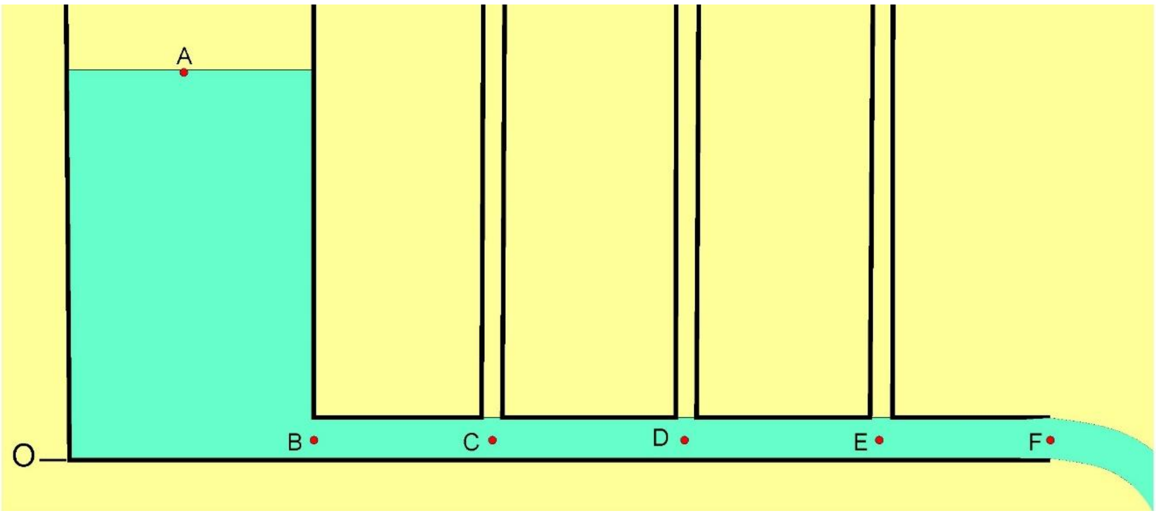
De la ecuación (1) se obtiene que la velocidad del agua en cualquier punto de la tubería (en la situación ideal considerada) viene dada por:

$$v = \sqrt{2gH} \quad (3)$$

Y sustituyendo los valores numéricos: $v = \sqrt{2 \cdot 9'8 \cdot 10}$ = 14 m/s

El resultado literal obtenido, coincide con el de otros problemas en los que se planteaba una cuestión similar y muestra, como ya se indicó en ellos, que la velocidad de salida del líquido coincide con la velocidad que tendría un objeto dejado caer desde una altura igual al nivel inicial de dicho líquido, cuando llegase a la boca de salida (condiciones ideales, sin rozamientos).

De la ecuación (2) se extrae la conclusión de que la presión en cada uno de los puntos considerados es igual a la presión atmosférica. Dado que los tubos verticales están abiertos a la atmósfera, ello nos indica que la altura de agua en cada uno de dichos tubos, será 0, tal y como se representa en la figura siguiente:



Por tanto, en la situación ideal considerada (no hay pérdidas de energía mecánica), una vez quitado el tapón y alcanzado el régimen estacionario, el nuevo nivel del agua (dado por h') en los tubos, será:

$$h'_C = h'_D = h'_E = 0 \quad (4)$$

Cabe interpretar que la altura geométrica del punto A se invierte en altura cinética en los puntos B, C, D, E y F.

Los resultados anteriores, han sido obtenidos considerando una situación ideal en la que no se produciría ninguna pérdida de energía mecánica. Sin embargo, sabemos que, en la realidad, esto no ocurre y que, debido a la fricción y otras causas, la energía mecánica no se conserva. Cabe, pues, plantearse, qué es lo que ocurrirá con dichos resultados (cómo cambiarán), cuando la situación se aproxime más a una situación real. Esto es lo que se plantea en el siguiente apartado:

c) Para empezar, parece claro que, si existen pérdidas de energía en la conducción, la velocidad a la que sale el agua por F (una vez abierto), deberá ser menor que la anteriormente obtenida. Un resultado igual o mayor, indicaría que algo se ha hecho mal.

Si existen pérdidas por fricción, deberemos tenerlo en cuenta en la ecuación de Bernoulli, añadiendo en cada punto la pérdida de presión (p_f) que se produce hasta llegar a él:

$$P_A + \rho g H = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 = P_C + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + P_{fC} = P_D + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + P_{fD} = \cdots = P_F + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + P_{fF}$$

Considerando los puntos A y F y teniendo en cuenta que $P_A = P_F = P_{atm}$:

$$\rho g H = \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + P_{fF} \;\; \rightarrow \;\; v = \sqrt{2\left(gH - \frac{P_{fF}}{\rho}\right)}$$

Y, teniendo en cuenta que $P_{fF} = K \cdot L$, donde K es la pérdida lineal y L la longitud de la conducción entre B y F:

$$\boxed{v = \sqrt{2\left(gH - \frac{K \cdot L}{\rho}\right)}} \quad (5)$$

Y sustituyendo valores numéricos:

$$v = \sqrt{2\left(9'8 \cdot 10 - \frac{0'08 \cdot 1'013 \cdot 10^5 \cdot 8}{10^3}\right)} = 8'15\, m/s$$

Si analizamos el resultado literal que acabamos de obtener (situación real), veremos que se transforma en el anterior (situación ideal) en el caso de que k = 0, lo cual es lógico (no habría pérdidas). Por otra parte, el resultado numérico (8'15 m/s), como era de esperar, es menor que el anterior (14 m/s), indicando que el agua sale con menos velocidad (y, por tanto, con menos energía cinética), debido a la pérdida de energía por fricción que se produce a lo largo de la tubería por la que circula.

Podemos plantearnos ahora (agua circulando, régimen estacionario) *cómo podríamos determinar la altura h' que alcanza el agua en cada uno de los tubos verticales.*

En principio, cabe pensar que cuanto más lejos se halle el tubo del depósito, menor será h', debido a que la perdida lineal de carga correspondiente irá aumentando conforme nos alejamos del mismo. Por otra parte, dicha altura, nunca podrá ser mayor que la altura H correspondiente al nivel del agua en el depósito.

Para determinar h' en cada uno de los tubos, podemos comenzar por hallar la presión hidrostática en la base de cada uno de ellos.

Comenzaremos por el más próximo al depósito. La presión en el punto C, se puede conocer aplicando Bernoulli en C y F:

$$P_C + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + P_{fC} = P_F + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + P_{fF}$$

Considerando que $P_F = P_{atm}$, sustituyendo P_{fF} por KL, P_{fC} por K·L/4 y simplificando:

$$P_C + K \cdot \frac{1}{4} L = P_{atm} + K \cdot L$$

Despejando: $P_C = P_{atm} + \frac{3}{4} KL$

Esta presión tiene que coincidir con la presión hidrostática ejercida en la base de la columna de agua de altura h'_C abierta a la atmósfera, la cual, como sabemos viene dada por: $\rho g h'_C + P_{atm}$, de modo que, igualando:

$P_C = \rho g h'_C + P_{atm} \rightarrow P_{atm} + \frac{3}{4} KL = \rho g h_C + P_{atm}$ Despejando:

$$\boxed{h'_C = \frac{3}{4} \cdot \frac{KL}{\rho g}} \qquad (6)$$

Sustituyendo valores numéricos:

$$h'_C = \frac{3}{4} \cdot \frac{0'08 \cdot 1'013 \cdot 10^5 \cdot 8}{10^3 \cdot 9'8} = 4'96\, m$$

Proceded de forma similar, para obtener los valores de la presión en D y en E

La presión en el punto D, se puede conocer aplicando Bernoulli en D y F:

$$P_D + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 + P_{fD} = P_F + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 + P_{fF}$$

Considerando que $P_F = P_{atm}$, sustituyendo P_{fF} por KL, P_{fD} por K·L/2 y simplificando:

$$P_D + \frac{K \cdot L}{2} = P_{atm} + K \cdot L \;\longrightarrow\; P_D = P_{atm} + \frac{KL}{2}$$

Esta presión tiene que coincidir con la presión hidrostática ejercida en la base de la columna de agua de altura h'_D abierta a la atmósfera, la cual, como sabemos viene dada por: $\rho g h'_D + P_{atm}$, de modo que, igualando:

$P_D = \rho g h'_D + P_{atm} \rightarrow P_{atm} + \frac{KL}{2} = \rho g h'_D + P_{atm}$

Despejando:

$$\boxed{h'_D = \frac{1}{2} \cdot \frac{KL}{\rho g}} \qquad (7)$$

Y sustituyendo valores numéricos:

$$h'_D = \frac{1}{2} \cdot \frac{0'08 \cdot 1'013 \cdot 10^5 \cdot 8}{10^3 \cdot 9'8} = 3'31\, m$$

Siguiendo los mismos pasos que para C y D, obtenemos finalmente la altura alcanzada por la columna de agua en el último tubo vertical, la cual resulta ser:

$$h'_E = \frac{1}{4} \cdot \frac{KL}{\rho g} \qquad (8)$$

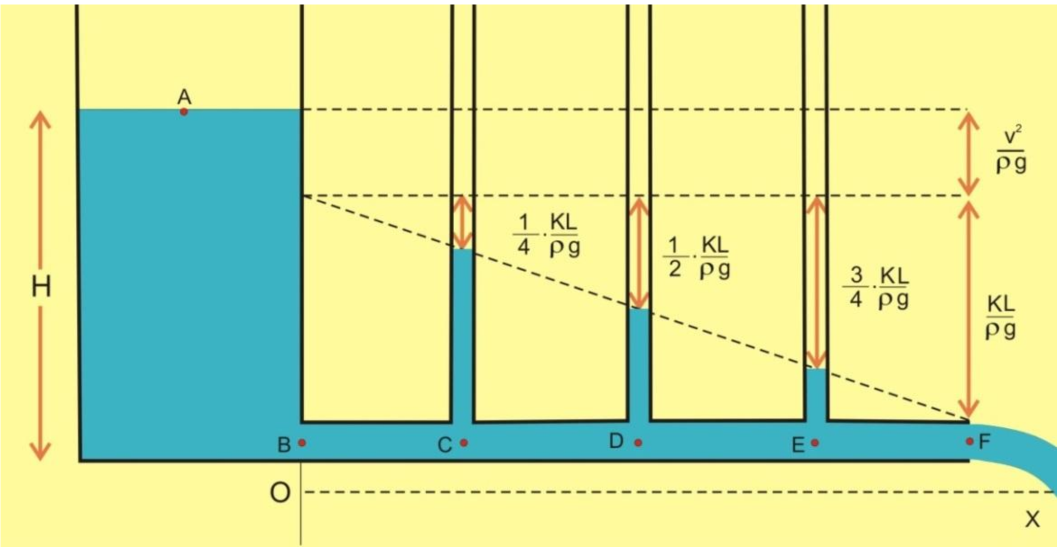
Y sustituyendo valores: $h'_E =$ 1’66 m

De particular interés resulta analizar lo que sucede en el punto F, donde está situada la boca de salida de la conducción. En efecto, si despejamos H de la ecuación (5), obtenemos que:

$$H = \frac{v^2}{2g} + \frac{KL}{\rho g}$$

Este resultado se puede interpretar diciendo que la altura geométrica (H) en A se invierte en F en altura cinética ($v^2/2g$) más altura de pérdida de carga ($KL/\rho g$).

Sin embargo (ved figura siguiente), en los puntos C, D y E, al ser la pérdida lineal de carga menor que en F (1/4, 2/4 y 3/4 de ella, respectivamente), una parte de la altura geométrica en A, se invierte en altura de presión (parte de los tubos que contienen agua, sombreada en azul en la figura), de modo que la suma correspondiente a la altura cinética, la altura de presión y la altura de pérdida de carga, en cada tubo, nos da siempre H.



Vemos, pues, que, como era de esperar, la altura alcanzada por el agua en cada tubo (altura de presión), es menor conforme nos vamos alejando del depósito y también que si k valiese 0 (caso ideal, sin pérdidas), estas alturas serían nulas.

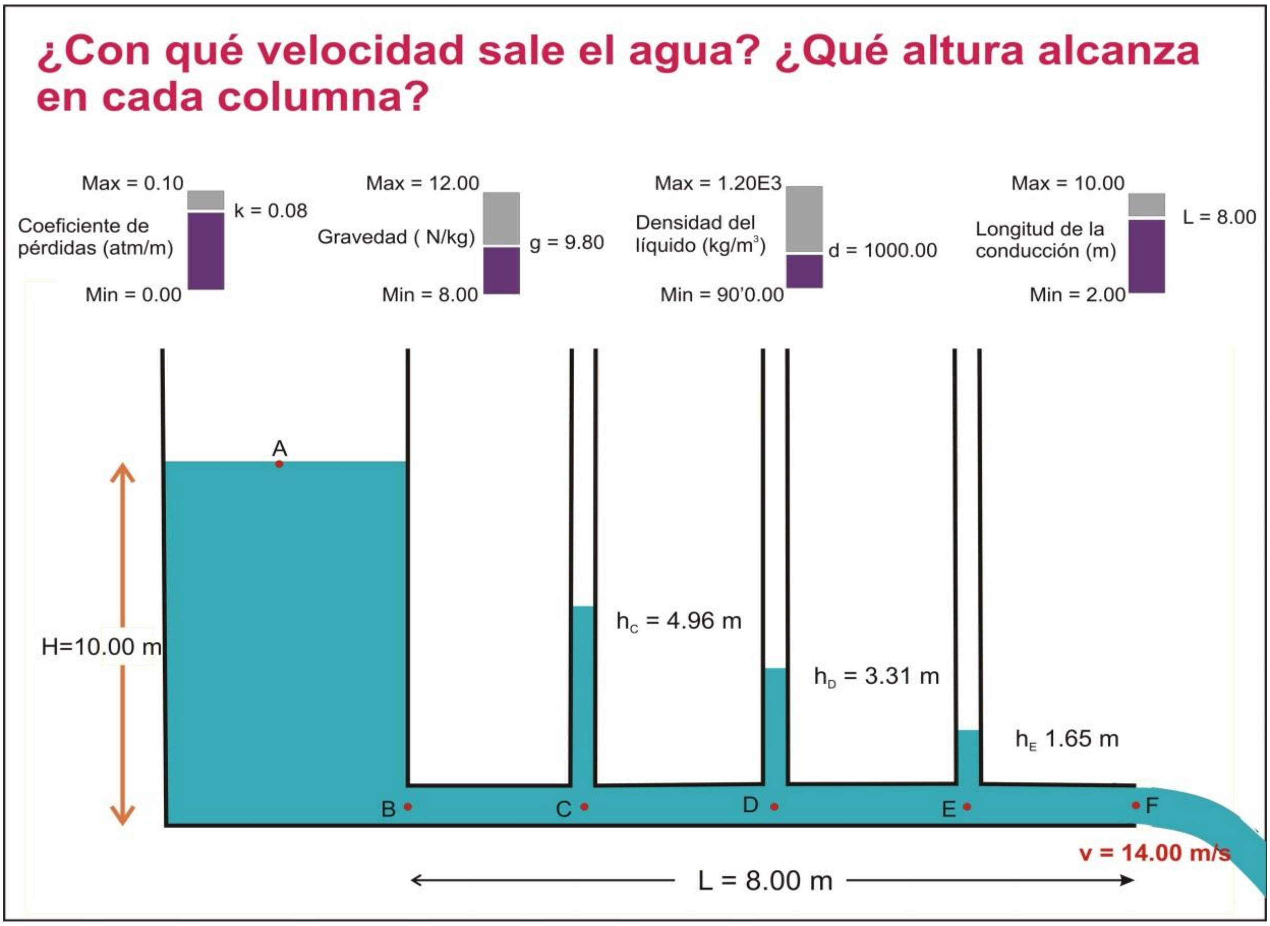
A partir de las ecuaciones 6, 7 y 8 anteriores, deducid una ecuación general, válida para calcular la altura h’ en cualquier punto de la conducción considerada.

Basta analizar las ecuaciones, para concluir que la ecuación buscada se puede expresar como:

$$h' = \frac{K}{\rho g} \cdot (L - x)$$

En la ecuación anterior, x es la distancia (entre 0 y L), del punto de la conducción considerado al punto B en el que henos situado el origen.

Para reforzar este problema hemos elaborado una animación *Modellus*, que representa la situación con el tapón quitado y calcula las alturas de las columnas de agua y la velocidad con la dicho agua sale por la boca del dispositivo. En la pantalla hemos colocado varios controladores manuales con los que los estudiantes pueden modificar la densidad del líquido, la gravedad, la longitud total de la conducción (es decir, entre los puntos B y F) y el coeficiente k de pérdida de carga por unidad de longitud. Manipulando estos controladores, los estudiantes pueden poner a prueba hipótesis y constatar algunos casos límite, entre ellos, el caso en que k = 0, es decir, la situación ideal que ocurriría si no hubiera ninguna pérdida de energía mecánica (apartado a del problema).



La animación está disponible en la Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física de la Sección Local de Alicante de la RSEF: http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm