Leyes de dinámica relativista

1. Cuadrivector impulso-energía

Multiplicando el cuadrivector espacio-tiempo:

$$\mathbf{\Delta s} = (c\ \Delta t\ ,\ \mathbf{\Delta r}) = (c\cdot\Delta t\ ,\ \Delta x\ ,\ \Delta y\ ,\ \Delta z)$$

por la cantidad $m\cdot c/\Delta t_0$, (m: masa de la partícula, c: velocidad de la luz, Δt_0: intervalo de tiempo propio), se obtiene:

$$(m\cdot c/\Delta t_0)\cdot\mathbf{\Delta s} = (m\cdot c^2\cdot\Delta t/\Delta t_0\ ,\ m\cdot c\cdot\mathbf{\Delta r}/\Delta t_0)$$

Como la velocidad de la partícula es $\mathbf{v} = \mathbf{\Delta r}/\Delta t$ y $\Delta t/\Delta t_0 = \gamma$ (ley de dilatación del tiempo), queda:

$$(m\cdot c/\Delta t_0)\cdot\mathbf{\Delta s} = (m\cdot\gamma\cdot c^2,\ m\cdot\gamma\cdot\mathbf{v}\cdot c)$$

Al realizar el análisis dimensional de la magnitud obtenida, se obtiene: $M\cdot L^2/T^2$, es decir, dimensiones de energía.

Con respecto al significado físico de cada componente y de la magnitud global, vemos que:

La primera componente, $m\cdot\gamma\cdot c^2$, es una magnitud escalar que, como acabamos de ver, tiene dimensiones de energía. De hecho, es la definición de la energía total de una partícula:

$$\boxed{E = m\cdot\gamma\cdot c^2}$$

En la segunda componente, $m\cdot\gamma\cdot\mathbf{v}\cdot c$, vemos que $m\cdot\gamma\cdot\mathbf{v}$ es una magnitud vectorial y es la definición del impulso (o cantidad de movimiento) **p** (minúscula) de una partícula:

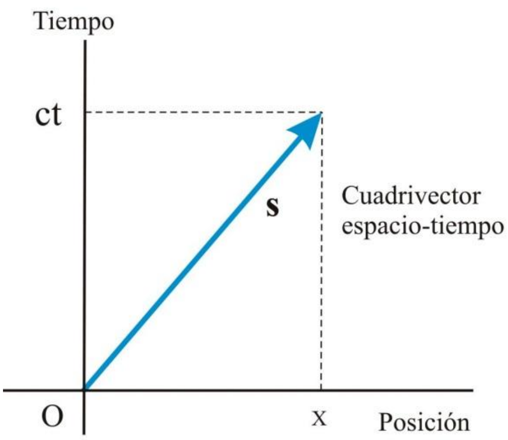
$$\boxed{\mathbf{p} = m\cdot\gamma\cdot\mathbf{v}}$$

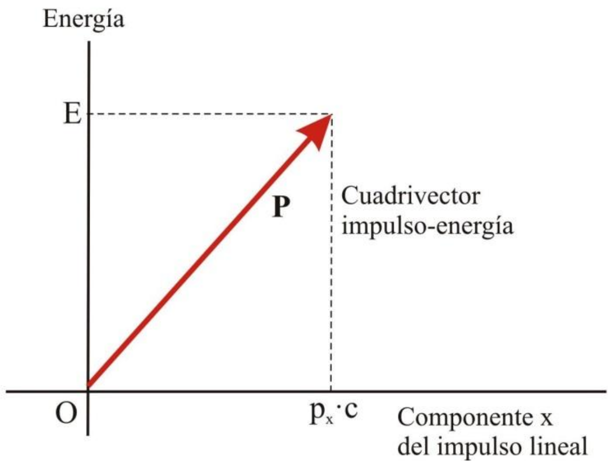
Este impulso sería igual al de la mecánica de Newton ($\mathbf{p} = m\cdot\mathbf{v}$) cuando γ=1, es decir, en el límite newtoniano.

Por todo ello, a este vector dinámico de cuatro dimensiones se le llama **cuadrivector impulso-energía** y se representa con la letra **P** (mayúscula):

$$\boxed{\mathbf{P} = (E,\ \mathbf{p}\cdot c)}$$

Podemos representar comparativamente el vector desplazamiento espacio-tiempo en su diagrama de ejes (c·t , x) (considerando sólo una dimensión espacial) y el vector dinámico impulso-energía en el suyo (E, $p_x\cdot c$), en cuyo caso se obtienen los siguientes diagramas:





Como ambos cuadrivectores son proporcionales, tienen los dos las siguientes propiedades:

- ✓ La inclinación de ambos es la misma
- ✓ El valor de la inclinación ha de respetar que no pueda alcanzarse la velocidad de la luz, lo que supone (como ya vimos en los problemas de cinemática), que el ángulo que forme el vector con el eje de ordenadas, no iguale ni supere los 45º (valor absoluto)
- ✓ Su módulo al cuadrado se calcula restando al cuadrado de la componente escalar el cuadrado del módulo de la componente vectorial. Dicho módulo es invariante (vale lo mismo en todos los SRI).

2. Ecuación fundamental de la dinámica de una partícula.

El cuadrado del módulo del cuadrivector dinámico impulso-energía **P** = (E, **p**·c) es:

$$|\mathbf{P}|^2 = E^2 - (\mathbf{p}\cdot c)^2 \;\rightarrow\; P^2 = E^2 - (p\cdot c)^2 \qquad (1)$$

Al ser invariante P^2 se puede adoptar cualquier sistema de referencia para calcularlo. Por ejemplo, en el sistema de referencia propio de la partícula (en cuyo caso γ=1 y p = 0) con lo que resulta:

$$P^2 = (m\cdot c^2)^2 \qquad (2)$$

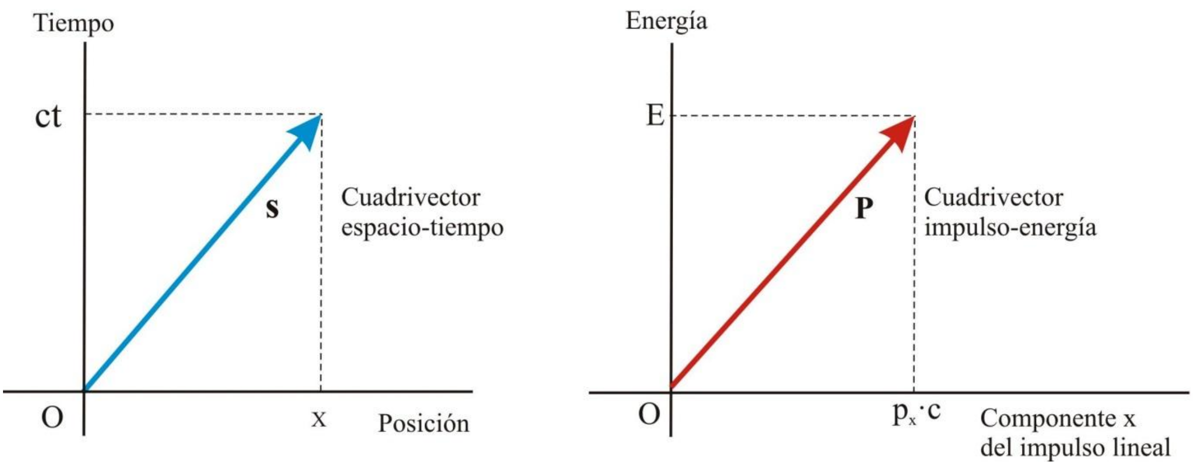
Igualando (1) y (2), se obtiene:

$$\boxed{E^2 = (p\cdot c)^2 + (mc^2)^2}$$

La ecuación obtenida corresponde a la **ley fundamental de la dinámica** en Relatividad Especial, que relaciona la energía, la masa y el impulso de una partícula. Esta ley se utiliza en Relatividad para estudiar dinámicamente entidades individuales (una partícula, un pulso de luz) y, generalizándola adecuadamente, para estudiar también sistemas más complejos.

3. Relación entre la velocidad y las magnitudes dinámicas.

Para relacionar la velocidad con las magnitudes dinámicas, partimos de la representación de los dos vectores en sus correspondientes diagramas:



Como los dos cuadrivectores son proporcionales, tienen la misma inclinación y podemos establecer directamente la siguiente relación entre sus respectivas componentes:

$$\frac{\Delta x}{c \cdot \Delta t} = \frac{p_x \cdot c}{E}$$

Teniendo en cuenta que la componente x velocidad de la partícula es: $v_x = \Delta x/\Delta t$, la expresión anterior se puede expresar como:

$$\frac{v_x}{c} = \frac{p_x \cdot c}{E} \rightarrow v_x = \frac{p_x \cdot c}{E} \cdot c$$

Y considerando las tres componentes de los vectores **v** y **p**:

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathrm{c}}{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{c}}$$

4. Equivalencia entre masa y energía propia.

En el SRI ligado a la partícula ocurre que $p = 0$. Sustituyendo este valor en la ecuación fundamental se obtiene:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \rightarrow E_0 = mc^2$$

Como c es una constante universal, esta expresión pone en evidencia una equivalencia entre la masa y la energía de la partícula en el sistema de referencia ligado a ella, según la cual esta propiedad física se puede expresar en unidades de masa, como, por ejemplo, kg o, alternativamente, en unidades de energía, como, por ejemplo, J.

Esta expresión muestra un hecho de una gran importancia: Un aumento (o una disminución) de la energía propia de un objeto, necesariamente ha de ir acompañado de un aumento (o disminución) de su masa, sea cual sea dicho objeto (desde una partícula elemental hasta un astro). Esto se puede expresar mediante:

$$\boxed{\Delta E_0 = \Delta m \cdot c^2}$$

Conviene tener en cuenta que el hecho de que la masa de un sistema necesariamente aumente (o disminuya) cuando aumente (o disminuya) su energía propia, no cuestiona para nada el que la masa sea invariante, ya que el valor de esa nueva masa, también será el mismo sea cual sea el SRI en el que se encuentre. En resumen: la masa de un sistema cambia cuando cambia la energía propia de dicho sistema pero no cambia cuando se pasa de un SRI a otro. Es posible, por tanto, modificar la masa de un sistema sin agregarle ni restarle constituyentes, a base de aportarle o restarle energía. Por ejemplo, para modificar la masa de un muelle podemos estirarlo o contraerlo, para modificar la de un gas podemos calentarlo o enfriarlo, etc.

El contenido energético de la materia pasó desapercibido para la mecánica de Newton ya que en cualquier proceso ordinario destinado a obtener energía útil, debido al elevadísimo valor de c^2, el cambio de masa asociado (dado por $\Delta m=\Delta E_0/c^2$) era absolutamente indetectable.

En contrapartida, el altísimo valor de c^2, también permitía pensar en la posibilidad de obtener ingentes cantidades de energía asociadas a la disminución de masa. Por este motivo, cuando se desarrolló la teoría de la relatividad y se conoció la ley de equivalencia entre masa y energía, se sugirió rápidamente la idea de que mediante procesos adecuados se podrían obtener cantidades de energía mucho mayores. Esta expectativa, se confirmó poco tiempo después cuando se desarrollaron otras áreas de conocimiento de la física (concretamente la física nuclear y la física de partículas), que estudiaron mecanismos para obtener energía, especialmente reacciones nucleares de fisión y fusión.

5. Aplicación de las leyes de la dinámica relativista al caso de un fotón

Podemos empezar aplicando la ley que relaciona la velocidad con las propiedades dinámicas:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p} \cdot c}{E} \cdot c$$

Como el fotón tiene la velocidad c, en módulo, sustituyendo v = c, en la ecuación anterior, se obtiene la siguiente relación entre su impulso y su energía:

$$E_{\text{fotón}} = p \cdot c$$

Si sustituimos esta relación en la ley fundamental de la dinámica:

$$(m \cdot c^2)^2 = E^2 - (p \cdot c)^2$$

obtenemos:

$$m_{\text{fotón}} = 0$$

Es decir, como ya sabíamos, el fotón no tiene masa, pero sí tiene energía e impulso. Así, la relatividad muestra que el hecho de que la luz no tenga masa, no impide que tenga impulso o cantidad de movimiento (dado por $p = E/c$), de tal forma que cuando interacciona con la materia, la luz, además de poder ser absorbida o emitida por ella, también la empuja.

Este hecho ya era conocido con anterioridad al establecimiento de la relatividad especial y, curiosamente, también es una consecuencia de la teoría electromagnética de Maxwell, que se contrastó experimentalmente al estudiar un fenómeno conocido como “presión de la radiación”: cuando la luz incide, por ejemplo sobre una lámina metálica le ejerce presión; si esa lámina es muy fina y se dispone de modo que pueda girar, la luz que incide sobre ella le provoca un giro y se puede deducir, del ángulo de torsión, el valor del impulso lineal del haz lumínico. El primer experimento cuantitativo sobre este fenómeno lo realizó Lebedev en el año 1901, pero fue algo más tarde cuando Gerlach y Golsen en 1923 obtuvieron las primeras medidas correctas de la presión de la luz.

6. Energía cinética

La energía cinética de una partícula no es una propiedad de ella, sino que depende del SRI con respecto al cual se determina. En el sistema de referencia propio la partícula están en reposo y su energía cinética es cero. En cualquier otro SRI, la partícula tienen velocidad y su energía cinética es mayor cuanto mayor sea esa velocidad relativa con respecto al SRI adoptado (existiendo como sabemos un límite inalcanzable, dado por la velocidad de la luz c).

Como en el sistema de referencia ligado a la partícula su energía es:

$$E_0 = m \cdot c^2$$

Y, en cualquier otro SRI, con respecto al cual la partícula tiene una cierta velocidad, v, su energía es:

$$E = m \cdot \gamma \cdot c^2$$

La energía cinética de la partícula es igual a la diferencia entre las dos anteriores:

$$E_c = E - E_0 = m \cdot \gamma \cdot c^2 - m \cdot c^2 = m \cdot c^2 (\gamma - 1) \rightarrow \boxed{E_c = m \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right)}$$