DEDUCCIÓN DE LA LEY DE DILATACIÓN DEL TIEMPO

1) USANDO EL INVARIANTE ESPACIO-TIEMPO

Nos referimos a un viaje hipotético de una nave entre la Tierra y un planeta lejano y tenemos en cuenta que en un SRI ligado a la nave viajera, el desplazamiento espacial es nulo. Por tanto, en este SRI, el cuadrado del módulo del cuadrivector espacio-tiempo es:

$$(ds_n)^2 = (cdt_n)^2$$

En cambio, en el SRI ligado a la Tierra la nave se desplaza espacialmente, siendo aquí el cuadrado del módulo del cuadrivector espacio-tiempo:

$$(ds_T)^2 = (cdt_T)^2 - (dx)^2$$

Como el módulo del cuadrivector es invariante, se cumple:

$$(cdt_n)^2 = (cdt_T)^2 - (dx)^2 \quad \text{(expresión 1)}$$

La velocidad de la nave respecto de la Tierra es:

$$v = dx/dt_T \quad \text{(expresión 2)}$$

Combinando las expresiones 1 y 2, se llega fácilmente a la siguiente relación entre la duración del viaje medida en la nave, dt_n, y en la Tierra, dt_T:

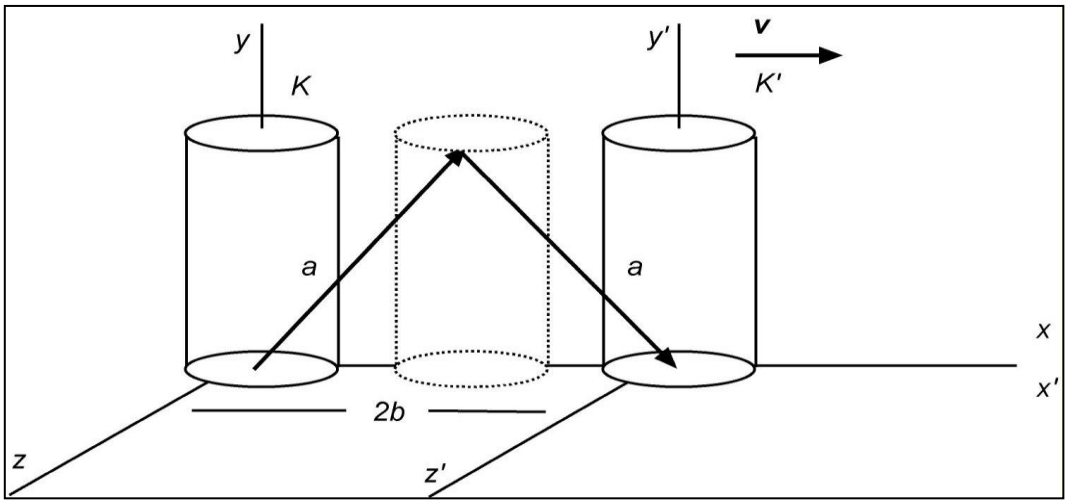
$$dt_T = dt_n \cdot \gamma \qquad \left(\text{siendo } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \geq 1\right)$$

En esta expresión dt_n representa la duración propia del viaje, medida por los viajeros, y dt_T la duración de ese viaje con respecto a un sistema de referencia ligado a la Tierra.

2) USANDO RELOJES DE LUZ

Los relojes de luz son unos artificios ideales de forma cilíndrica que tienen en su base y en su tapa de dos espejos plano-paralelos y marcan una unidad de tiempo "tic-tac" cada vez que un haz luminoso viaja de la base a la tapa (dónde se refleja) y vuelve otra vez a la base.

En el dibujo hemos colocado uno de estos relojes, de altura L en un SRI K' (que se desplaza con velocidad $\vec{v}$ respecto del SRI K). Ahí el desplazamiento realizado por el rayo luminoso al marcar una unidad de tiempo tiene lugar en dirección vertical y coincide, en la ida más la vuelta, con el doble de la altura del reloj. Por lo tanto, se cumple la relación $2L = c\Delta t'$. En el SRI K ese mismo reloj de luz se desplaza con una velocidad horizontal, v, y el rayo luminoso realiza un desplazamiento oblicuo para marcar una unidad de tiempo. El camino recorrido por el haz es : $2a=c\Delta t$ y el camino recorrido por el reloj es: $2b= v\Delta t$.



Para relacionar los intervalos de tiempo, Δt y $\Delta t'$, usamos el teorema de Pitágoras en el triángulo de la figura. Se obtiene, después de sustituir en $L^2 + b^2 = a^2$, que:

$$\Delta t^2(c^2-v^2) = \Delta t'^2c^2 \qquad \text{y, finalmente,}$$

$$\boxed{\Delta t \text{ (con respecto a K)} = \gamma\cdot\Delta t' \text{(con respecto a K´, tiempo propio)}}$$