

REFLEXIONS SOBRE LA FORMA HABITUAL D'INTRODUIR ELS CONCEPTES DE LA DINÀMICA RELATIVISTA EN BATXILLERAT

Manuel ALONSO*
Vicent SOLER**

“Quan alguna persona parla sobre alguna cosa en realitat del que parla és de la interpretació que té ella sobre aquesta cosa.”
Anònim

1. INTRODUCCIÓ

Consideració prèvia: els autors parteixen del supòsit de què sí que han de fer-se esforços per introduir l'alumnat de batxillerat als conceptes i implicacions de la relativitat. Suprimir-la de la programació de l'àrea de Física en segon curs de batxillerat, o reudir-la fins una presència testimonial, comporta, entre d'altres conseqüències, ocultar l'origen d'equacions matemàtiques i conceptes fonamentals que s'utilitzen en desenvolupar determinats capítols de física moderna, l'ensenyament dels quals no es discuteix.

Dins de poc complirà cent anys el primer article publicat per Einstein “Sobre l'electrodinàmica dels cossos en moviment” (1905), treball que va establir les bases de la relativitat, en particular la relativitat restringida. Albert Einstein va ser elegit per la revista *Time* el personatge del segle XX. Immerescut homenatge, per part d'aquells que promouen modificacions en les programacions, constitueix el fet de menystenir la presència de la relativitat en el batxillerat. És possible i convenient impartir un curs d'introducció a la física en el segle XXI i no fer cap referència a la relativitat o reduir-la a no res?

L'aprenentatge de la relativitat, per part de l'alumnat de batxillerat, no és tasca resolta, i no sols per l'escassa disponibilitat horària, el bagatge matemàtic encara incipient, etc. que es dona en aquests nivells educatius, sinó, a més, o potser, sobretot, perquè la relativitat suposa un repte conceptual que posa a prova el sentit comú: no res hi és evident. Afegim a tot això el fet de no disposar dels materials educatius adequats, alguns dels quals presenten no poques limitacions.

El present treball tractarà d'evidenciar alguna de les deficiències fonamentals que, al nostre parer, presenten la majoria dels textos de batxillerat que hem consultat; entre aquestes limitacions sobresurt, per exemple, la falta de continuïtat entre la cinemàtica i la dinàmica relativista. Possiblement conseqüència de la dificultat que pareix existir per a desenvolupar amb detall i claredat conceptes de dinàmica relativista, com són la massa, l'impuls lineal, l'energia, les lleis fonamentals de la dinàmica d'una partícula i el principi de conservació.

En línies generals pràcticament tots els llibres d'aquest nivell coincideixen a plantejar uns desenvolupaments inspirats en un enfocament “tradicional” –barreja de conceptes de física newtoniana i relativista-, diferent del que segueixen els textos tècnics. En general, els llibres de batxillerat han obviat propostes més recent (Okun, 1989; Taylor i Wheeler, 1992) per a introduir la relativitat. Altres materials renuncien a exposar tot desenvolupament formal i es limiten a fer alguna referència aïllada a conceptes o

* IES Leonardo da Vinci, manuelalonso@inicia.es

** IES Sixto Marco, vicent@medtelecom.net

implicacions de la dinàmica.

Per a evidenciar les limitacions mencionades, compararem el fil conductor que segueixen els textos quan aborden la mecànica clàssica i el compararem amb el seguit en el cas de la relativitat. No es tracta, per descomptat, de convalidar els desenvolupaments actuals en la primera -encara necessitats de millora-, sinó, més aviat, de contribuir a mostrar que el camí que s'ha de recórrer en el cas de la relativitat encara és major.

2. ALGUNES MANCANCES EN EL TRACTAMENT DE LA DINÀMICA RELATIVISTA EN TEXTOS DE BATXILLERAT

2.1. Els conceptes de dinàmica relativitat no es presenten com un conjunt coherent

Els conceptes de dinàmica relativista s'exposen de forma molt escassa i quasi sempre apareixen com una simple suma d'alguns elements puntuals, sense mostrar que conformen un conjunt coherent de coneixements.

En analitzar la presentació de la dinàmica newtoniana dels textos de Secundària i de Batxillerat, és difícil de trobar un llibre d'aquest nivell que no expresse explícitament que la dinàmica clàssica se sustenta en els tres postulats de Newton o, alternativament, en els principis de conservació de la massa, de l'energia mecànica i de l'impuls lineal. També resulta habitual trobar referències (directes o indirectes) a la coherència interna entre aquestes lleis fonamentals (per exemple, utilitzant-les de forma combinada en la resolució de problemes, deduint les lleis de conservació dels postulats de Newton o viceversa, etc.).

Resumint, en general, els llibres d'aquest nivell, en abordar la dinàmica de Newton, mostren les característiques següents:

- Hi ha unes lleis fonamentals de la dinàmica clàssica: els postulats de Newton i els principis de conservació.
- Les lleis fonamentals són internament coherents i, en concret, els postulats de Newton es poden deduir les lleis de conservació i viceversa.
- Hi ha una relació de jerarquia entre les lleis fonamentals i altres expressions que poden deduir-se d'elles.

Els llibres de batxillerat (està pendent d'una anàlisi profunda el contingut dels llibres de primers cursos universitaris) quan tracten continguts de dinàmica relativista no presenten aquestes característiques. Els esmentats textos mostren una successió que quasi sempre comença amb l'expressió de l'impuls lineal d'una partícula -se sol escriure $\mathbf{p} = m_0\gamma\mathbf{v}$. Aquesta llei es planteja, indegudament, com una redefinició de l'expressió clàssica, a fi que encaixe en una versió modificada del segon principi de la dinàmica newtoniana, la qual cosa els exigeix introduir el concepte de "massa variable" ($m = m_0\gamma$). A continuació, trobem-hi que, fent ús de la llei de la massa variable, introdueixen alguna versió de la relació entre la massa i l'energia -escriuen $E = mc^2$, $E_0 = m_0c^2$, $\Delta E = (\Delta m)c^2, \dots$ -, més la fórmula de l'energia cinètica d'una partícula, $E_c = E - E_0$. Després, combinant algunes d'aquestes expressions, determinats autors obtenen la relació general entre l'energia, la massa i l'impuls, $(m_0c^2)^2 = E^2 - (pc)^2$, d'una partícula, i, finalment, l'expressió corresponent a l'impuls d'un fotó, $E_{\text{fotó}} = pc$.

Així doncs, la llei general no s'adopta com a punt de partida per a deduir expressions particulars, sinó que es dedueix -quan es fa-, combinant expressions particulars. D'altra banda, no trobem lleis generals com la definició de l'impuls d'una partícula en la forma

$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{v}$. Igualment habitual és el fet que els textos exhibisquen importants

discontinuitats en la introducció de les diferents expressions o en les implicacions que d'elles es deriven. Així, per exemple, s'observa que la majoria dels llibres dediquen prou espai a comentar conseqüències de la relació d'equivalència entre massa i energia aplicada a sistemes (com un àtom), quan prèviament aqueixa relació només l'han introduït per a una partícula.

Com a conseqüència de tot açò, és fàcil preveure que resulte difícil per a un estudiant respondre a preguntes bàsiques com les següents: Quines són o es poden considerar lleis generals o pilars de la dinàmica relativista?, Com es relacionen entre sí les distintes expressions i com es dedueixen de les lleis generals?, Com s'expressa exactament el principi de conservació en relativitat?, Quina relació hi ha entre el principi de conservació i les lleis generals de la dinàmica?, etc. Aquestes qüestions, en general, no es tracten en els llibres de text de batxillerat.

2.2. No hi ha continuïtat entre els conceptes de cinemàtica i els de dinàmica

El mètode tradicional de desenvolupar els conceptes de la dinàmica relativista no deixa veure una continuïtat entre ells i els conceptes de la cinemàtica. Contribueix a açò de forma notable el fet de què en aquest nivell no s'implementen els conceptes de la dinàmica sobre l'entramat espai-temps relativista.

Els estudiants entenen (sublimarment) que els conceptes de la cinemàtica i els de la dinàmica newtoniana s'apliquen en un mateix suport espai-temporal, en aquest cas, sobre l'espai i el temps absoluts. Per descomptat, açò no ocorre com a conseqüència de la bondat de l'ensenyança sobre aquest particular, sinó pel fet que les nocions de l'espai absolut i del temps absolut estan fortament arrelades en el pensament espontani de la generalitat de les persones, incloent-hi els docents, els estudiants i els autors dels textos. Per tant, encara que no es faci al·lusió explícita a aquests conceptes, tots entenen que les longituds, els intervals de temps, les velocitats o les forces es determinen en l'espai (absolut) i que s'estudia la seua evolució a través del temps (absolut).

A més, els llibres sí que inclouen desenvolupaments que deixen veure una continuïtat entre els conceptes dinàmics i els cinemàtics de la mecànica clàssica. Per exemple, en formular la llei operativa que resumeix els dos primers postulats de la dinàmica newtoniana ($\mathbf{F}_{\text{res}} = m\mathbf{a}$ o $\mathbf{F}_{\text{res}} = d\mathbf{p}/dt$, sent $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$), defineixen els conceptes dinàmics força, massa i impuls connectant-los operativament amb conceptes cinemàtics, com la velocitat, acceleració, etc.

Contribueix a reforçar la noció de continuïtat entre cinemàtica i dinàmica clàssica, la resolució d'exercicis que demanden la descripció del moviment d'un objecte, perquè en tots ells és necessari utilitzar combinadament conceptes d'aquests dos capítols. Encara més, les definicions de les magnituds involucrades en els principis de conservació (per exemple, l'impuls lineal, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ o l'energia cinètica $E_c = 1/2mv^2$) també vénen donades per unes expressions que relacionen directament les magnituds dinàmiques amb les

magnituds cinemàtiques i, així mateix la seua utilització en exercicis i problemes maneja de forma combinada unes i altres per a donar compte de l'evolució dels mòbils.

La continuïtat entre la cinemàtica i la dinàmica no es mostra així de clara en els llibres que tracten de forma introductòria els conceptes de la dinàmica en relativitat. Per a començar, l'entramat espai-temps relativista s'aborda, algunes vegades, succintament en cinemàtica i no gens, en general, en dinàmica i açò té aquí molta major transcendència. Cal tenir en compte que el concepte d'un espai-temps de quatre dimensions no forma part del pensament espontani.

Un altre fet que contribueix al buit que deixen els llibres entre la cinemàtica i la dinàmica relativistes ho constitueix la circumstància que són molt pocs els problemes que en aquest nivell es tracten amb un enfocament cinemàtic i després tenen una continuació en dinàmica. És cert que, en les definicions operatives de magnituds dinàmiques queda escrit que depenen dels conceptes cinemàtics. No obstant, l'estudi de situacions físiques no es fa quasi mai donant continuïtat a descripcions cinemàtiques i dinàmiques. Així, per exemple, dues expressions a què se sol dedicar prou atenció en aquest nivell són la llei que calcula l'impuls lineal d'un fotó i la llei d'equivalència entre la massa i l'energia. Ambdues són expressions particulars d'una llei general que descriu l'evolució dinàmica d'una partícula i, per això, la seua anàlisi podria proporcionar una ocasió per a evidenciar la continuïtat entre aquesta evolució i la descripció cinemàtica corresponent. La veritat és que açò no es fa.

Sobre l'impuls dels fotons els textos dirigeixen quasi tota la seua atenció a destacar que la llum tinga aquesta propietat corpuscular i la manifeste, per exemple, en el fenomen de la pressió de radiació (important, sens dubte), però no es comenta que el fotó és una entitat, que viatja a la velocitat límit, l'evolució de la qual s'interpreta de forma satisfactòria des de la perspectiva cinemàtica i la dinàmica.

Un altre comentari respecte de la llei de l'equivalència entre massa i energia. Tota l'atenció es dirigeix a l'anàlisi de processos en què alguns sistemes poden perdre o guanyar energia, una cosa, es clar, molt important, però, s'obvia qualsevol referència a l'estudi de l'evolució cinemàtica i dinàmica de partícules o de sistemes, que va servir per a introduir-la.

Finalment, les escases al·lusions que fan els llibres de text al principi de conservació relativista reforcen la discontinuïtat entre cinemàtica i dinàmica. En abordar aquest principi, renuncien a definir la magnitud quadridimensional que es conserva (desgraciadament l'impuls-energia no es tracta a aquest nivell), i ni tan sols suggereixen algun dels àmbits d'aplicació de l'esmentat principi com a instrument per a estudiar l'evolució cinemàtica i dinàmica de sistemes de partícules.

En resum, després de revisar els desenvolupaments tradicionals sobre dinàmica serà innecessari molestar-se a fer als estudiants preguntes com les següents:

Què tenen a veure amb la concepció relativista de l'espai-temps magnituds dinàmiques, com \mathbf{p} , E , m ? Quina continuïtat tenen els problemes sobre l'evolució cinemàtica de partícules o de sistemes, des d'un punt de vista dinàmic?. En relació amb aquesta pregunta: Què aporta el principi de conservació relativista?. Quina és exactament la magnitud o les magnituds que es conserven i sota quines condicions ho fan si és

procedent?

2.3. No es mostra d'una forma correcta la ruptura de la relativitat amb la mecànica clàssica

En alguns casos se suggereix, erròniament, que la relativitat es podria construir modificant la mecànica clàssica.

Molts llibres i altres materials han incorporat, com a conseqüència de la investigació educativa de les últimes dècades, desenvolupaments destinats a assenyalar, per exemple, el paral·lelisme entre algunes idees de sentit comú dels estudiants i conceptes prenewtonians, a propiciar el trencament amb aspectes del pensament espontani i a procurar l'apropiació de conceptes i d'una metodologia coherent amb la mecànica newtoniana. Les noves orientacions coincideixen a assenyalar, entre d'altres, aspectes com els següents:

- S'ha de treballar en l'aula per superar manifestacions del pensament espontani.
- S'han de ressaltar qualitats positives de la mecànica newtoniana i la seua superioritat respecte de la denominada "física del sentit comú".
- Cal palesar que les lleis i els conceptes de la mecànica newtoniana són invencions independents de conceptes anteriors.

Què ocorre si apliquem les mateixes exigències als materials que s'utilitzen per a introduir els estudiants a la relativitat? Resulta habitual que els textos dediquen prou atenció a la transició entre la mecànica newtoniana i la relativitat, quelcom, sens dubte, molt convenient. No obstant, la manera de mostrar aquesta transició resulta, al nostre entendre, deficient. Aviat veurem per què.

Els llibres quasi sempre comencen els seus desenvolupaments assenyalant la incompatibilitat dels conceptes de la dinàmica clàssica (sobretot el concepte de força) amb certs fets relativistes. En concret, mostren que el concepte de força resultant, proporcional a l'acceleració (primer i segon principis de la dinàmica), és incompatible amb l'existència d'un límit superior de velocitats. Alguns llibres també assenyalen que el propi concepte de força, entesa com una interacció a distància i instantània, és incompatible amb un límit superior de velocitats (com podrà reaccionar una partícula a la força a distància que li exerceix una altra i instantàniament?), així com amb la relativitat de la simultaneïtat (com parlar d'interacció a distància i instantània si dos esdeveniments simultanis i separats per a un SRI no són simultanis per a cap altre SRI?). Ara bé, justament després de posar en evidència la incompatibilitat del concepte newtonià de força amb els fets relativistes, tots els textos que segueixen el tractament "tradicional", introdueixen una versió modificada de la llei de $\mathbf{F}=\mathbf{ma}$, precisament per a mantenir tal concepte de força. No acaben de dir, encertadament, que aquest concepte i aquesta llei no són compatibles amb la relativitat?

Aquest tractament, erroni, suggereix que es pot construir la relativitat modificant la mecànica de Newton o, pitjor, que es poden deduir les seues lleis i expressions d'aquesta manera. La relativitat és una teoria nova, independent, que es construeix a partir d'uns principis propis i que a més s'ha d'implementar en una concepció del món (espai-temps), que no és la concepció que va sustentar a la mecànica newtoniana.

És veritat que els conceptes de la relativitat restringida tendeixen cap als de la física newtoniana, quan el quocient v/c s'aproxima a zero, el cas invers, però no és cert. Conscients d'aquest fet, els llibres, en general, adverteixen que el procés que usen per a introduir algunes magnituds (per exemple, per a redefinir l'impuls lineal) consistent a substituir la massa newtoniana per la massa variable, ha de ser pres amb molta precaució, perquè condueix a resultats incorrectes en altres casos. Per exemple, aquesta substitució no té sentit en el cas de l'energia cinètica d'una partícula.

2.4. Errors conceptuals que poden afavorir l'orientació més tradicional en les definicions de les magnituds dinàmiques, en la seua interpretació i en les relacions entre elles

Com a conseqüència d'aquest conjunt de deficiències, és fàcil que es propicien errors. Als defectes mencionats cal afegir errors relacionats amb els conceptes de massa i energia, així com a la relació entre tots dos.

Operativament, es concreten en la "lleï de la massa variable", és a dir, en escriure $m=m_0\gamma$, en lloc d'usar només una massa invariant, m , i, emparentada amb ella, en la lleï que expressa la relació entre la massa i l'energia, escrivint $E_0=m_0 c^2$ i $E=mc^2$, en compte d'una sola expressió; $E_0=mc^2$, amb m invariant.

La justificació habitual per a introduir el concepte de massa variable i, al mateix temps, una de les seues suposades aplicacions, té a veure amb el fet que existisca un límit superior de velocitats: en pretendre augmentar la velocitat d'un objecte, per exemple, aplicant-li una força constant, augmentaríem la seua massa. Assimilant aquesta massa variable al concepte newtonià d'una massa inercial, definida com el quocient entre \mathbf{F} i \mathbf{a} , s'entendria que l'objecte cada vegada tinga més difícil aproximar-se al límit superior de velocitats.

Una altra suposada aplicació del concepte de massa variable és l'explicació que la massa d'un sistema de partícules no és igual a la suma de les masses individuals, ho resolen proposant que en comptabilitzar la massa del sistema, caldria considerar, a més de les masses en repòs de les partícules, altres masses equivalents a les seues energies cinètiques, $m=E_c/c^2$, i a les seues energies potencials de qualsevol tipus. Segons aquest punt de vista, els fotons tindrien una "massa impròpia" proporcional a la seua energia, $m=E/c^2$. Per això, encara que no siguen entitats materials (raó per la qual no tenen massa pròpia, "la massa de veritat", diuen alguns autors), no estranya tant que tinguin comportaments corpusculars, com manifesten, per exemple, en el fenomen de la pressió de la radiació. També sembla comprendre's millor, a partir d'aquest concepte, el fet de què els fotons aporten massa quan s'agreguen, per exemple, a un àtom. I, per si tot açò fóra poc, aplicant a més el concepte d'equivalència entre la massa inercial i la massa gravitatòria als propis fotons, s'explicaria el fet que la trajectòria de la llum es corbe en un camp gravitatori.

Malgrat les suposades avantatges, quan s'aprofundeix un poc, de seguida es veu que utilitzar una massa variable (i els conceptes realcionats amb ella), acabarà portant tants o més problemes com de solucions. En certa manera ens recorda l'ús, per exemple, de forces fictícies en mecànica clàssica.

3. ANTECEDENTS HISTÒRICS D'UNA MASSA VARIABLE

Però quin és l'origen d'aquestes concepcions “tradicional” que trobem amb tanta freqüència en els textos? Quina problemàtica pot generar el seu ús?

Abans de què Einstein escriguera el seu primer treball de 1905 sobre relativitat, diversos físics del tomar del segle XIX, com Poincaré, Abraham i Lorentz havien publicat treballs on es deduien, a partir de la teoria electromagnètica i admetent una determinada estructura per a l'electró, expressions anàlogues a $m=E/c^2$ per a la radiació i l'equació que dóna la variació de la massa d'una partícula amb la velocitat, en particular se'n parlava de massa longitudinal i transversal. Aquests resultats teòrics servirien, per exemple, per explicar els resultats experimentals de Kaufmann de 1902 i 1903 (Adler, 1987; Fadner, 1988).

Ara bé, convé saber que el desenvolupament, que admet una massa variable, inclòs en els llibres no és rigorosament fidel a aquells orígens. Considerem la llei:

$$\mathbf{p}=m\gamma\mathbf{v} \quad \text{sent} \quad \gamma=1/\sqrt{1-\beta^2} \quad \text{i} \quad \beta=v/c$$

i cometem, per un moment, l'error de substituir aquesta expressió relativista en la llei newtoniana (no relativista):

$$\mathbf{F}=\mathbf{dp}/dt$$

Tenint en compte que l'acceleració és $\mathbf{a}=\mathbf{dv}/dt$, obtenim així la relació entre la força i l'acceleració següent:

$$\mathbf{a}=[\mathbf{F}-(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}]/m\gamma$$

Una relació que ens diu que, en general, l'acceleració no serà paral·lela a la força. Quan la força \mathbf{F} és perpendicular a la velocitat \mathbf{v} , es pot considerar una “massa transversal”:

$$m_t=m\gamma$$

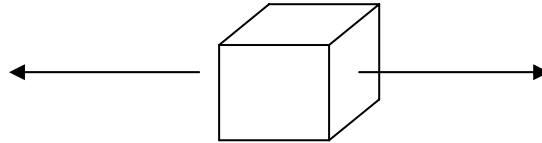
I quan la força \mathbf{F} és paral·lela a la velocitat \mathbf{v} , es pot considerar una “massa longitudinal”:

$$m_l=m\gamma^3$$

Aquest va ser el tipus de desenvolupament inicial que va considerar masses variables. Aquestes masses variables (longitudinal i transversal) van perdurar en el llenguatge dels físics durant la primera part del segle XX i van ajudar a interpretar alguns fets **com s'ha dit adés**. Per això, en les dues primeres dècades del segle passat, i mentre de forma paral·lela s'avançava cap a una formulació més rigorosa de la teoria relativista, aquests conceptes van adquirir una gran difusió. A través de determinats treballs es van estendre aquestes idees i, en particular, amb el llibre de Pauli, *La teoria de la relativitat* (Pauli, 1958). En ell, Pauli va descartar les masses longitudinal i transversal, considerant-les obsoletes, però va mantenir la distinció entre una massa en repòs, m_0 (igual a l'invariant massa m), i una massa variable, $m=m_0\gamma$ (igual a la massa transversal), junt amb la llei newtoniana $\mathbf{p}=\mathbf{mv}$. Es coincideix a assenyalar aquest text com a referència fonamental d'altres llibres d'introducció a la teoria escrits posteriorment. I molts d'aquests llibres, com bé sabem, fan quelcom més arriscat que redefinir l'impuls: redefeixen la força a distància de la mecànica de Newton.

Quin paper va jugar Einstein en relació amb aquests assumptes?. Quan Einstein publica l'any 1905 el seu primer article sobre relativitat (Einstein, 1905a), no utilitza el terme “massa en repòs”, però sí que menciona la massa transversal i la massa longitudinal. Quasi al mateix temps, en el segon treball que publica aqueix mateix any (Einstein,

1905b), formula per primera vegada l'equivalència entre la massa i l'energia. Per a fer-ho, Einstein imagina que un objecte en repòs, amb energia pròpia E_0 , emet dos polsos de llum en sentits oposats, tal com mostra el dibuix adjunt:



Aplicant el principi de conservació de l'energia al procés, Einstein conclou que en emetre el cos una energia en forma de llum, ha de disminuir la seua massa en una quantitat donada per l'expressió:

$$\Delta m = \Delta E_0 / c^2$$

Finalment, en un colp de geni, generalitza el resultat i enuncia que “la massa d'un objecte és una mesura de l'energia que conté”.

Si un cos emet l'energia E en forma de radiació, la seua massa disminueix en E/c^2 . Evidentment no cal que l'energia sostreta al cos es transforme directament en energia de la radiació, de manera que arribem a la conclusió general: La massa d'un cos és una mesura de l'energia que conté.

És a dir, en la seua formulació inicial, Einstein adopta la nomenclatura rigorosa, actualment acceptada, per a interpretar la relació entre la massa i l'energia: parla d'una sola massa m i la relaciona únicament amb l'energia en repòs o energia pròpia dels cossos. Aquesta mateixa notació s'utilitza en el llibre de 1921 *El significat de la relativitat* del propi Einstein (1984).

També és cert que en 1906, Einstein va tornar a deduir la fórmula de Poincaré utilitzant un experiment mental en el que un objecte allargat emet llum en un extrem i l'absorbeix en l'altre:



Einstein va suposar que, per causa de la pressió de la radiació, l'objecte havia de retrocedir durant el trànsit de la llum d'un extrem a l'altre. Va imposar el principi de conservació de l'impuls lineal i de l'energia al sistema i va atribuir als fotons que van d'extrem a extrem una massa inercial equivalent a la seua energia, $m = E/c^2$. Aquest experiment mental no és consistent amb els principis de la relativitat: la part dreta de l'objecte allargat, suposadament rígid, de cap manera pot retrocedir abans que la llum arribe a l'altre extrem, doncs la notícia de l'espenta no pot tardar menys que la pròpia llum a arribar aquí.

Einstein també va usar la notació errònia per a interpretar el fet que la llum es corba en un camp gravitatori. Quan intentava avançar cap a la construcció de la relativitat general, va argumentar, com encara fan avui molts llibres, que si els fotons tenen una massa $m = E/c^2$ inercial, també tindran una massa gravitatòria equivalent i, per tant, cauran en el camp gravitatori.

En resum, el propi Einstein va utilitzar, al principi (en determinados momentos), notacions que finalment serien rebutjades. Einstein dirigeix a Lincoln Barnett el 19 de juny de 1948 -quan la teoria de la relativitat estava ben consolidada- una carta on afirmava el següent:

No és bo introduir el concepte d'una massa $M = m\gamma$ d'un mòbil, per al que no es pot donar una definició clara. És millor no introduir un altre concepte de massa que la massa en repòs, m . En compte d'introduir M és millor mencionar l'expressió del moment i l'energia d'un mòbil.

El debat sobre l'ús de la massa relativista en cursos d'introducció a la relativitat, però, no està tancat i existeixen raons de tipus històric i arguments que defensen el seu ús (Doménech, 1998).

4. ÉS NECESSARI EL CONCEPTE DE MASSA VARIABLE?

Mostrarem succintament que el concepte d'una massa variable no cal per a entendre els principals fets que s'expliquen amb ell en els llibres de nivell introductorí.

Admetem per un moment que el punt de partida del nostre desenvolupament en classe dels conceptes de dinàmica fóra l'habitual de la seqüència "tradicional", és a dir, la definició de l'impuls lineal relativista:

$$\mathbf{p}_{\text{rel}} = m\gamma\mathbf{v} = m\gamma d\mathbf{r}/dt$$

Com bé adverteixen alguns llibres, aquesta expressió es pot interpretar de dues formes: a) introduint el concepte d'una massa variable, és a dir, agrupant $m\gamma$ com un nou concepte; b) considerant la relació entre l'interval de temps propi i l'interval de temps impropí, $\gamma/dt = dt_0$. Aquesta segona opció, està d'acord amb la concepció actual de la relativitat (Strnad, 1991), ja que es pot presentar a un nivell de secundària, com una conseqüència de l'existència d'un límit superior de velocitats.

En un món en què hi ha un límit superior de velocitats, la relació, per a un moviment qualsevol, entre un desplaçament espacial, dx , i el corresponent desplaçament temporal, dt , no pot ser arbitrària. Quant major siga la velocitat d'un objecte (respecte d'un cert SRI), més pròxim està al valor límit, c , el quocient dx/dt . Per tant, la modificació del concepte de \mathbf{p} en relativitat, respecte de la seua definició en la física clàssica, es deu enterament a l'espai-temps. La massa no té res a veure.

La llei d'equivalència entre la massa i l'energia aplicada *in extenso* a tot tipus de massa i d'energia no sols és un concepte innecessari per a entendre la diferència entre la massa d'un sistema i les sumes de les masses dels seus components, sinó que ens pot plantejar problemes en molts casos. Per exemple, siguen dos sistemes formats per dues úniques partícules iguals: avançant en el mateix sentit a la mateixa velocitat \mathbf{v} (sistema A); avançant en sentits oposats amb velocitats \mathbf{v} i $-\mathbf{v}$ (sistema B).



Aplicant els conceptes que proporciona el desenvolupament tradicional, la massa d'aquests dos sistemes seria igual a la suma de les masses en repòs de les partícules, més dues masses equivalents a les seues energies cinètiques ($m_i = E_{ci}/c^2$). Per tant, aquests dos sistemes de partícules tindrien en determinat sistema de referència la mateixa massa (impròpia). No obstant, aquests dos sistemes de partícules són molt diferents. Per al sistema A, hi ha un SRI en el que ambdues partícules estan en repòs. En canvi, una o les dues partícules del sistema B sempre està en moviment respecte de qualsevol SRI. Generalitzant la situació a un sistema de N partícules, per exemple un gas, interpretem aquesta diferència dient que el sistema B té agitació, energia interna. Per això, usant la notació correcta obtenim que la seua massa és major que la suma de les masses de les seues partícules (tant major com més calent estiga el gas). En canvi, el sistema A no té agitació interna i, per això, usant la mateixa notació obtenim que la seua massa sí que és

igual a la suma de les masses dels seus constituents.

Quan un fotó és absorbit per un àtom, els llibres que utilitzen el concepte de massa variable, diuen que s'incrementa la massa de l'àtom (correcte) i que això és conseqüència del fet que el fotó porta una massa equivalent a la seua energia (erroni). La rèplica és quasi inevitable: si el fotó porta una massa, per xicoteta que siga, no hauria de complir també aquesta massa la llei de la massa variable?. Llavors, com pot un fotó abastar el límit superior de velocitats, c ? Per què no pot tenir velocitats menors que c ? (Els altres sí i el fotó no?). La veritat és que anar a la velocitat c només és compatible amb no tenir massa, per tant, l'augment de massa de l'àtom no es pot entendre dient que el fotó porta massa.

Finalment, admetre que els fotons porten massa tampoc és necessari per a interpretar el fet que la llum es corbe en el camp gravitatori. Com se sap, el principi d'equivalència fa ús de la igualtat entre la massa inercial i la massa gravitatòria, però, en absolut aplica aquest concepte als fotons, sinó als sistemes de referència, és a dir, a sistemes d'eixos lligats a objectes materials. Del principi d'equivalència es dedueix que la llum ha de viatjar en línia recta en un SRI "local" - un SR de dimensions espai-temporals tendint a zero, que cau lliurement en un camp gravitatori-, precisament perquè els fotons no tenen massa. En el SRI local és aplicable la relativitat especial que prediu que les partícules sense massa han de viatjar en línia recta i a la velocitat c . Per tant, per a un SR en repòs en el camp gravitatori, per exemple, lligat a un planeta, la llum ha de "caure".

Podríem posar altres exemples de dificultats i contradiccions a què pot conduir la llei de la massa variable, així com del caràcter innecessari de la mateixa. Ara però, convé que ens preguntem: Per què no s'ha eliminat el concepte de la massa variable i no s'ha traslladat encara als llibres de text d'un nivell introductori, la notació correcta?. Es dona la curiosa circumstància que "l'elit científica", representada en els llibres tècnics de nivell superior, utilitza una terminologia, mentre que la base, les manifestacions de les quals es troben en llibres de divulgació i d'introducció, n'utilitzen una altra de ben diferent. A més de les raons de tipus històric que hem comentat, segurament contribueix a aquest desfasament que l'elevat formalisme dels llibres tècnics, faça pensar al professorat de secundària en la impossibilitat de traslladar a l'aula els conceptes tractats en dinàmica.

En conseqüència, ens trobem davant d'un repte que podem concretar en les preguntes següents: És desitjable desenvolupar, en cursos d'introducció, els conceptes de dinàmica seguint la línia dels llibres tècnics?, i, en cas afirmatiu, és possible abordar aquests continguts en el batxillerat?. Contribuiria una proposta d'aquest tipus a millorar l'aprenentatge de la relativitat en els nivells d'introducció?.

5. BIBLIOGRAFIA

ADLER, C. G, (1987), "Does mass really depend on velocity, dad?", *Am. J. Phys.*, **55**, 8, pàgines 739-743.

DOMÉNECH, A, 1998, "El debate sobre la masa relativista: el problema definicional y otros aspectos epistemológicos", *Enseñanza de las Ciencias*, **16**, 2, pàgines 331-339.

^aEINSTEIN, A., 1905, "Zur Elektrodynamik bewegter Körper", *Annalen der Physik*, **17**, pàgines 891-921.

^bEINSTEIN, A., 1905, "Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?" *Annalen der Physik*, **18**, pàgines 639-641.

Els dos articles anteriors es poden trobar traduïts al català en ROQUÉ, X. (2000), *Albert Einstein. La teoria de la relativitat i altres textos*, Eumo Editorial, Barcelona

EINSTEIN, A., 1906, “Das Prinzip von der Erhaltung der Schwerpunktsbewegung und die Trägheit der Energie”, *Annalen der Physik*, 20, pàgines 627-633?.

EINSTEIN, A., 1984, *El significado de la relatividad*, Espasa-Calpe, Madrid.

Fadner, W. L., 1988, “Did Einstein really discover “ $E=mc^2$ ”?”, *Am. J. Phys.*, **56**, 2, pàgines 114-122.

OKUN, L. B., 1989, “The Concep of mass”, *Physics Today*, juny, pàgines 31-36.

PAULI, W., 1958, *La teoria de la relativitat*, Pergamón, New York.

STRNAD, J., 1991, “Velocity-dependent mass or proper time?”, *Eur. J. Phys.*, **12**, pàgines 69-73.

TAYLOR, E. F., WHEELER, J. A., 1992, *Spacetime Physics. Introduction to special relativity*, W. H. Freeman and Co., New York.