# LEYES APLICABLES A ALGUNOS FENÓMENOS ONDULATORIOS

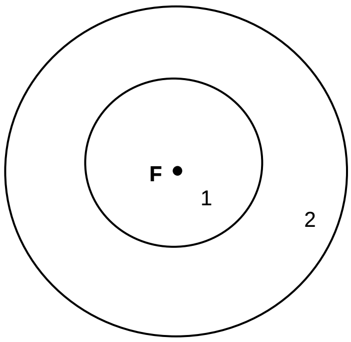
En este documento se deducen leyes sobre comportamientos de las ondas en casos sencillos.

## 1) Ley de amortiguación

Considerando que tiene un movimiento armónico simple, la energía que emite el foco de una onda es: $E = (2s^2m)\, q^2 A^2$

Si la onda se propaga en más de una dimensión, esta energía se va transmitiendo a cada vez más puntos y cada uno sólo recibe una porción de la energía original del foco, tanto menor cuanto más nos alejemos del origen de las vibraciones. Por otra parte, todos los puntos del medio alcanzado por la onda vibran con la misma frecuencia, $q$. Por tanto, al aplicar el principio de conservación de la energía a dos frentes de onda (1 y 2) escribimos:

$$E_1 = E_2 \rightarrow 2\pi^2 m_1 n^2 A_1^2 = 2\pi^2 m_2 n^2 A_2^2 \rightarrow m_1 A_1^2 = m_2 A_2^2 \quad \textbf{(1)}$$




En la situación que muestra el dibujo adjunto $m_2 > m_1$ y se debe cumplir $A_2 < A_1$. Para averiguar la relación precisa entre las dos amplitudes tenemos que hallar antes la existente entre las masas $m_1$ y $m_2$. Si los frentes de ondas son esféricos, la densidad superficial, en cada uno de los dos frentes es:

$$\sigma_1 = \frac{m_1}{4\pi R_1^2} \qquad \sigma_2 = \frac{m_2}{4\pi R_2^2},$$

Consideramos que el medio es homogéneo, con lo que ambas densidades son iguales y se obtiene: $m_1 R_2^2 = m_2 R_2^2$ (**2**)

Combinando las ecuaciones (**1**) y (**2**) se obtiene finalmente: $$A_2 = A_1 \frac{R_1}{R_2}$$

Llamamos a esta última expresión **ley de atenuación o amortiguamiento de las amplitudes** en el caso de **ondas esféricas**. Informa de cómo va disminuyendo la amplitud de estas ondas conforme nos vamos alejando del foco. Para obtener la relación entre las intensidades correspondientes supondremos que dicho foco emite siempre con una misma potencia, $P$. Entonces, la intensidad a una distancia $R$ es:

$$I = \frac{P}{4\pi R^2} \quad \textbf{(3)}$$

Es decir, siendo P constante, la intensidad disminuye con el cuadrado de la distancia al foco.

Simplemente aplicando la ecuación (**3**) a los dos frentes de onda se obtienen la ley de atenuación o amortiguamiento de las intensidades:

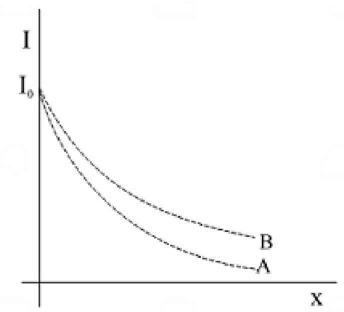
$$I_2 = I_1 \frac{R_1^2}{R_2^2}$$

## 2) Ley de absorción

En general, cuando se interpone un obstáculo a la propagación de una onda la intensidad de ésta decae porque las moléculas del material interpuesto tienen dificultad para reproducir y transmitir la vibración. Al recibir la energía de la onda lo más normal es que se mueven o vibren de una forma desordenada y la energía se transforme con mayor o menor rapidez en energía interna del obstáculo.

Para deducir una ley que rige esta absorción de energía imaginamos la incidencia de una onda plana sobre una lámina de grosor $dx$. La intensidad de la onda que sale después de atravesar dicha lámina es menor que la incidente y esperamos que la disminución que se ha producido en la intensidad $dI$ sea mayor cuando mayor sea el grosor $dx$ y diferente según cual sea el material de la lámina, que caracterizamos mediante un coeficiente ($\beta$). Es decir, escribimos a modo de hipótesis, la siguiente expresión para la disminución de intensidad durante la penetración de la onda: $dI = -\beta \cdot dx$. Integrando esta expresión diferencial, se obtiene la **ley de absorción**:

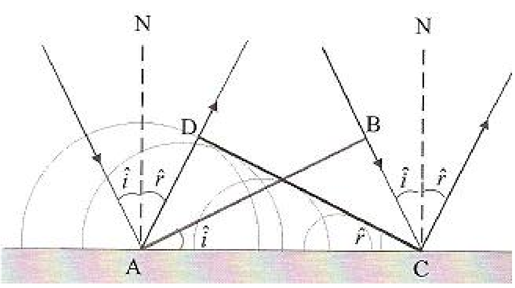
$$I = I_0 \cdot e^{-\beta x}$$




La figura adjunta muestra el perfil típico de las gráficas de la disminución de intensidad por absorción. Se representan gráficas de dos materiales distintos A y B, observándose que a cada uno de ellos le corresponde un coeficiente distinto de absorción para un tipo de ondas dado.

Entre los muchos ejemplos de aplicación de esta ley mencionamos la pérdida de intensidad que experimentan las ondas sonoras al atravesar paredes y ventanas de diferentes materiales y grosores, y en el interés práctico que tiene el estudio de este fenómeno para poder aislar acústicamente viviendas, salas música, etc.

## 3) Ley de la reflexión



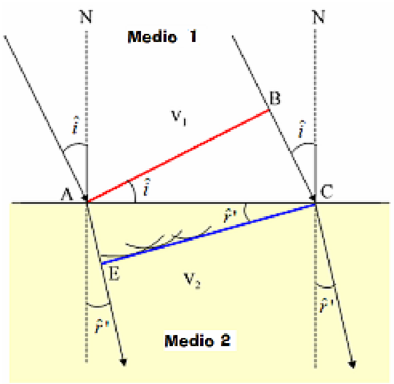

En la figura se representa un frente de ondas plano llegando a una superficie horizontal con un ángulo $\hat{i}$ de incidencia. Cuando empieza a "tocar" la superficie, el punto A se convierte en un nuevo foco que emite ondas secundarias. Según transcurre el tiempo y el frente AB va incidiendo, todos los puntos de la superficie comprendidos entre A y C se van convirtiendo en focos secundarios. El frente de ondas reflejado, DC, es el envolvente de las ondas secundarias que se han ido emitiendo. Como la onda no cambia de medio, la velocidad de propagación de la onda incidente es igual a la de la onda reflejada. Además, el intervalo de tiempo $\Delta t$ que la onda secundaria emitida por B emplea en llegar a C es igual al empleado por la primera onda secundaria reflejada emitida por A en llegar D. Por tanto AD = BC.

En los triángulos ABC y ADC, tenemos: sen $\hat{i}$ = BC/AC sen $\hat{r}$ = AD/AC

Como BC = AD → sen $\hat{i}$ = sen $\hat{r}$ → $\hat{i} = \hat{r}$

Esta expresión es la primera **ley de la reflexión**. La segunda expresa que el rayo incidente, la normal y el rayo refractado están en un mismo plano.

## 4) Ley de la refracción




En la figura adjunta se representa la refracción de una onda plana desde un medio 1 a otro medio 2, suponiendo que la velocidad de propagación es menor en el segundo. A medida que el frente de ondas AB va incidiendo en la superficie de separación, los puntos AC de esa superficie se convierten en focos secundarios y transmiten la vibración hacia el medio 2. Debido a que la velocidad en el segundo medio es menor, la envolvente de las ondas secundarias transmitidas conforma un frente de ondas EC, en el que el punto E está más próximo a la superficie de separación que el B. En consecuencia, al pasar al segundo medio los rayos se desvían acercándose a la dirección normal N.

Para obtener una ley cuantitativa sobre este proceso, tenemos en cuenta que en la figura anterior, el intervalo de tiempo entre B y C es el mismo que entre A y E. Por lo tanto:

$$\mathrm{BC} = v_1 \cdot \Delta t \qquad \mathrm{AE} = v_2 \cdot \Delta t$$

Nos fijamos en los triángulos ABC y AEC, para escribir:

$$\text{sen}\ \hat{i} = \mathrm{BC/AC} \qquad \text{sen}\ \hat{r}' = \mathrm{AE/AC} \quad \rightarrow \quad \frac{sen\hat{i}}{sen\hat{r}'} = \frac{BC}{AE} = \frac{v_1 \cdot \Delta t}{v_2 \cdot \Delta t} \quad \rightarrow \quad \frac{sen\hat{i}}{sen\hat{r}'} = \frac{v_1}{v_2}$$

La expresión obtenida se comprueba experimentalmente en los fenómenos de refracción. Cuando la velocidad de propagación de la onda sea mayor en el segundo medio que en el primero, el ángulo de refracción también será mayor que el de incidencia, con lo que en ese caso los rayos refractados se alejan de la normal en lugar de acercarse. En este caso, el ángulo máximo de refracción posible es 90º, para el cual tenemos un ángulo de incidencia:

$$\hat{i}_{límite} = arcsen\frac{v_1}{v_2}$$

Para un ángulo de incidencia igual o superior a este ángulo límite, no se puede producir la refracción y toda la energía de la onda incidente se invierte en el proceso de reflexión. Se dice que se produce una **reflexión total**.

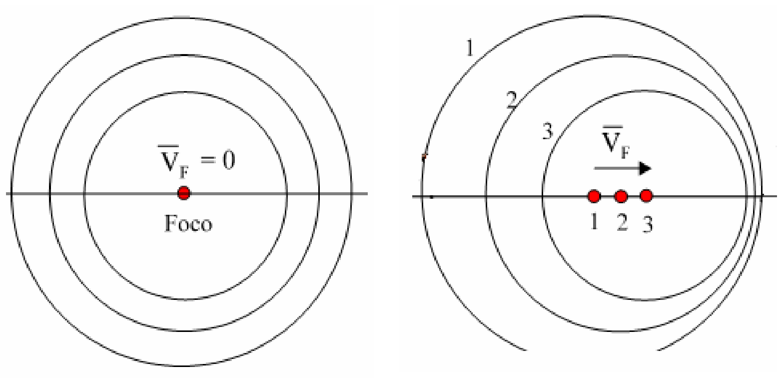
En el caso de las ondas luminosas es habitual modificar expresar esta relación en función del **índice de refracción**, *n*, que indica el número de veces que la velocidad de la luz es mayor en el vacío que en ese medio, es decir, por lo que se obtiene como $n = c/v$ siendo $c$ la velocidad de la luz en el vacío y $v$ la velocidad de la luz en el medio.

Para introducir el índice de refracción en la expresión anterior sustituimos:

$$v_1 = c/n_1 \qquad v_2 = c/n_2 \quad \rightarrow \quad \frac{sen\hat{i}}{sen\hat{r}'} = \frac{v_1}{v_2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\text{sen}\,\hat{i}}{\text{sen}\,\hat{r}'} = \frac{n_2}{n_1}}$$

Esta última forma de expresar la ley de la refracción se conoce como **ley de Snell**

## 5) Ley del efecto *Doppler*




En la figura de la izquierda se han dibujado tres frentes de onda emitidos por un foco en reposo respecto del receptor. La distancia entre dos frentes de onda consecutivos es la misma en cualquier dirección y la longitud de onda recibida tiene en cualquier lugar un cierto valor, $\lambda$, igual a la longitud de la onda emitida. A la derecha, se han representado los mismos frentes de onda, suponiendo que el foco se desplaza con una velocidad constante hacia la derecha y se indican las tres posiciones (1, 3 y 3) que ocupaba el foco cuando los emitió. La longitud de onda recibida es mayor que $\lambda$ desde posiciones que ven alejarse al foco emisor y menor desde posiciones que lo ven acercarse.

Durante el tiempo que tarda en emitir dos frentes de ondas consecutivos (el periodo T), el foco se desplaza una distancia dada por $v_F \cdot T$. Por tanto, en la zona que vé aproximarse al foco dos frentes de onda consecutivos no se encuentran a una distancia $\lambda$ sino $\lambda - v_F \cdot T$. Ahí, la longitud de la onda recibida, $\lambda'$, es menor:

$$\lambda' = \lambda - v_F \cdot T$$

Al otro lado ocurre lo contrario. Las ondas están más separadas de lo normal porque el foco se está alejando. La longitud de la onda recibida, $\lambda'$, es mayor:

$$\lambda' = \lambda - v_F \cdot T$$

Por otra parte, la velocidad de propagación de la onda, $c$, no depende de que el foco se mueva o no (sólo depende del medio), de modo que:

$$c = \lambda \cdot \nu = \lambda' \cdot \nu'$$

Como $\lambda = c \cdot T$ $\rightarrow$ $\lambda' = (c - v_F) \cdot T$ $\rightarrow$ $\lambda' = \dfrac{c - v_F}{\nu}$

Sustituyendo ésta última expresión en $\nu' = \dfrac{c}{\lambda'}$ queda finalmente:

$$f' = \left( \frac{1}{1 - \frac{v_F}{c}} \right) \cdot f$$

Ésta ecuación se llama **ley del efecto *Doppler*** (no relativista). Indica que cuanto mayor sea la velocidad $v_F$ con la que se acerca el foco emisor a un observador, tanto mayor es la frecuencia recibida por éste (la expresión sólo es válida mientras que $v_F$ sea menor que $c$).

Si el foco se aleja del observador se obtiene una expresión similar, pero cambiando el signo – por +, lo que confirma que, en ese caso, la frecuencia recibida es menor que la emitida por el foco.