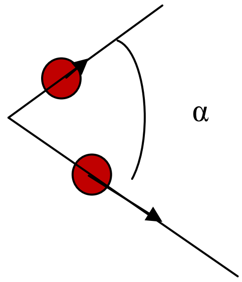
COLISIÓN ELÁSTICA DE DOS PARTÍCULAS DE IGUAL MASA

Consideramos una colisión en la que una partícula impacta contra otra de igual masa que está inicialmente en reposo. Nos planteamos obtener el ángulo, a, que forman las trayectorias de las partículas después de la colisión, suponiendo que es perfectamente elástica (sin pérdida de energía) y que las trayectorias de todas las partículas antes y después del choque están en un mismo plano XY.


Antes del choque



Después del choque

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA SEGÚN LA MECÁNICA DE NEWTON

La mecánica de Newton requiere la conservación del momento lineal o cantidad de movimiento y, si la colisión es elástica, también la conservación de la energía.

Conservación del momento lineal

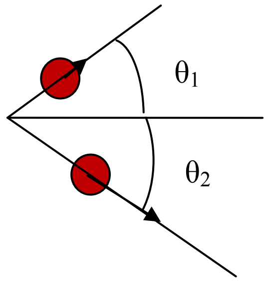
$$m_1 \cdot v_{1,\text{ antes}} = mv_{1x,\text{ después}} + mv_{2x,\text{ después}} \rightarrow v_{\text{antes}} = v_{1,\text{ después}} \cdot \cos\theta_1 + v_{2,\text{ después}} \cdot \cos\theta_2 \quad (m_1 = m_2)$$

$$0 = m_1 \cdot v_{1y,\text{ después}} + m_2 \cdot v_{2y,\text{ después}} \rightarrow v_{1y,\text{ después}} = -v_{2y,\text{ después}} \qquad [1]$$

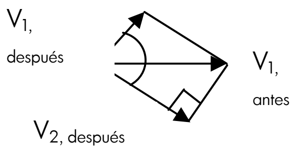
Conservación de la energía

$$\tfrac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_{1,\text{ antes}}^2 = \tfrac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_{1,\text{ después}}^2 + \tfrac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_{2,\text{ después}}^2 \rightarrow v_{1,\text{ antes}}^2 = v_{1,\text{ después}}^2 + v_{2,\text{ después}}^2 \qquad [2]$$

Los dibujos siguientes muestran directamente la solución del problema. El segundo de ellos, se ha realizado teniendo en cuenta, en primer lugar, que las componentes de las velocidades de salida en dirección Y (perpendicular al impacto) ha de ser nulo [Ecuación 1]. En segundo lugar, exigiendo el cumplimiento teorema de Pitágoras al triángulo que forman las velocidades de las partículas, antes y después del choque [Ecuación 2]. Por tanto, la conclusión es que el ángulo de salida que predice la mecánica de Newton para esta situación es 90°.



$\alpha=\theta_1+\theta_2$



Esta solución que aporta la mecánica clásica se puede practicar con una animación *Modellus* del Departamento.

No obstante, normalmente el ángulo experimental será diferente, puesto que los choques entre objetos cotidianos (por ejemplo, dos bolas de billar) distan mucho de ser perfectamente elásticos. La pérdida de energía en la interacción suele ser considerable, con lo que deja de cumplirse la ecuación 2

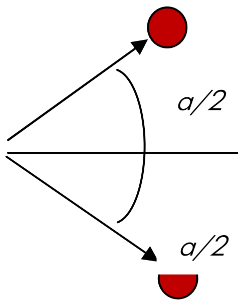
RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA APLICANDO LA DINÁMICA RELATIVISTA

La dinámica relativista requiere la conservación del impulso-energía. Para mayor sencillez en la aplicación del dicho principio de conservación, vamos a suponer que ambas partículas, después de la colisión tienen la misma velocidad y, por tanto, al exigir la conservación del impulso energía, sus trayectorias forman el mismo ángulo, con respecto a la dirección del movimiento de la partícula que impacta.

Antes del choque

$E_1 = E_o + E_c \quad (E_o = mc^2)$ $\qquad E_2 = E_o \quad (E_o = mc^2)$

$p_1 \cdot c$ $\qquad p_2 \cdot c = 0$



E'

$[p' \cdot c \cdot \cos(a/2),\ p' \cdot c \cdot \text{sen}\,(a/2)]$

E'

$[p' \cdot c \cdot \cos(a/2),\ -p' \cdot c \cdot \text{sen}\,(a/2)]$

La conservación del impulso-energía ($P_{antes} = P_{depués}$) requiere que se conserven sus componentes de energía e impulso:

$$E_1 + E_2 = 2 \cdot E' \qquad \text{(componente de la energía)} \qquad [1]$$

$$p_1 = 2 \cdot p' \cdot \cos(a/2) \quad \text{(componente } x \text{ del impulso)} \qquad [2]$$

$$0 = p' \cdot \sin(a/2) - p' \cdot \sin(a/2) \quad \text{(componente } y \text{ del impulso)}$$

Además de cumplirse lo que dictan las expresiones anteriores, se ha de verificar la ley fundamental que relaciona masa (o energía propia, E_o) con el impulso y la energía de cada partícula, tanto antes y como después del choque:

$$E_1^2 = Eo^2 + (p_1 \cdot c)^2 \qquad \text{(partícula 1 antes del choque)} \quad [3]$$

$$E'^2 = Eo^2 + (p' \cdot c)^2 \qquad \text{(partículas 1 y 2 después del choque)} \quad [4]$$

Teniendo en cuenta que $E_1 = E_o + E_c$ (E_c es la energía cinética de la partícula incidente), de las ecuaciones [1], [3] y [4], resulta:

$$(p_1 \cdot c)^2 = (E_o + E_c)^2 - E_o^2 = E_c\,(2 \cdot E_o + E_c) \qquad [5]$$

$$(p' \cdot c)^2 = (E_o + E_c/2)^2 - E_o^2 = E_c\,(E_o + E_c/4) \quad [6]$$

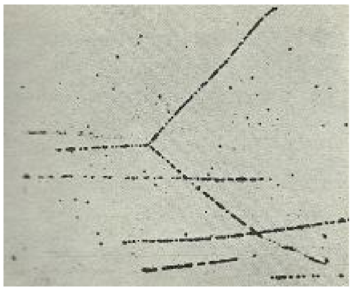
Ahora, sustituimos [5] y [6] en [2], para obtener:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2E_o + E_c}{4E_o + E_c}$$

Usando $\cos\alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$, se obtiene finalmente:

$$\cos\alpha = \frac{E_o}{4E_o + E_c}$$

El resultado muestra la variación que tiene el aspecto del choque dependiendo de que las partículas tengan energías bajas (caso no relativista) o altas (para velocidades próximas a la velocidad de la luz).



Así, si la energía cinética de la partícula incidente es pequeña ($E_c << E_o$) se obtiene cosa →0 y por tanto a→90°. La fotografía adjunta (1) muestra un ejemplo de esta situación. Corresponde a la colisión de un protón incidente con energía del orden de *5MeV* con otro protón, inicialmente en reposo en una emulsión fotográfica. El choque en este caso fue "no relativista" ($E_c/m_oc^2<<1$) y, como se observa, se obtuvo un ángulo experimental muy próximo a 90° entre las trayectorias de salida de los protones después del choque.

En cambio, si la energía cinética de la partícula es muy alta ($E_c>>E_o$), resulta cosa →1 y por tanto a→0°. Esta disminución relativista de la dispersión fue comprobada experimentalmente por primera vez en 1932 por Champion (2), para radiación β (electrones muy rápidos). Utilizó una cámara de niebla y estudió los choques elásticos de los electrones de la radiación con electrones de los átomos de aire de la cámara.

(1) POWEL, C.F., OCCHIALINI, G.P.S., 1947. Nuclear Physics in Photographs, Oxford University Press, Nueva York
(2) CHAMPION, F.C., 1932. Proc. Roy. Soc. (Londres) (Art. 136, p. 630)
