

MOVIMIENTO DE OBJETOS EN UN CAMPO GRAVITATORIO CENTRAL

Los principios de la dinámica newtoniana combinados con la ley de la gravitación universal del propio Newton fundamentan la descripción de los posibles movimientos de un objeto sometido a un campo gravitatorio central, como el que genera, por ejemplo, una estrella o un planeta. Ejemplos de estos movimientos pueden ser las órbitas que describen los planetas en torno al Sol, las trayectorias de satélites (naturales y artificiales) respecto a un planeta, la caída de un meteorito, etc. No obstante en el movimiento de cualquier objeto en el Cosmos influye una gran cantidad de factores que harían su estudio excesivamente complejo, siendo, por ello necesario adoptar algunas simplificaciones, como las siguientes:

- ✓ Considerar únicamente la fuerza gravitatoria existente entre el objeto y un cuerpo celeste (planeta, estrella) ignorando las fuerzas gravitatorias que puedan ejercer otros cuerpos celestes más o menos próximos a ellos.
- ✓ Considerar el cuerpo celeste mucho más masivo (designaremos su masa por M) que el objeto, cuyo movimiento relativo respecto de aquél queremos estudiar (cuya masa designaremos como m).
- ✓ Suponer que ambos objetos son perfectamente esféricos, por tanto, sustituibles por objetos puntuales con toda la masa concentrada en el centro del cuerpo.
- ✓ No tener en cuenta en los lanzamientos desde la superficie terrestre o en la caída hacia ella la fricción con la atmósfera.

1) LEYES DEL MOVIMIENTO

Consideramos un objeto de masa m , como un satélite, sometido a la fuerza de atracción gravitatoria de un cuerpo celeste de masa M , como la Tierra.

La fuerza que se ejerce sobre el satélite se dirige en todo momento hacia el centro de la Tierra y se calcula mediante la ley de gravitación universal:

$$\vec{F}_g = \frac{GMm}{r^2} \vec{u}_r \quad (1)$$

El segundo principio de la dinámica newtoniana permite relacionar la fuerza con el vector de posición, puesto que:

$$\vec{F}_{res} = m \cdot \vec{a} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (2)$$

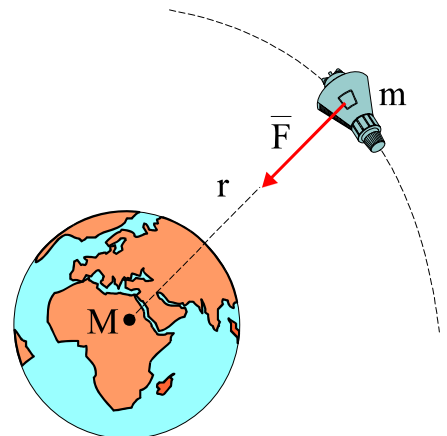
Combinando las ecuaciones (1) y (2) escribimos la ecuación diferencial del movimiento del satélite respecto del centro de la Tierra:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{GMm}{r^2} \quad \text{o, simplemente} \quad \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{GM}{r^2}$$

En general esta ecuación conduciría a tres expresiones, una para cada una de las componentes (x, y, z) del vector de posición $\vec{r}$. Sin embargo, por ser la fuerza central, la trayectoria es plana y es suficiente escribir dos ecuaciones en un plano (x, y)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{GM}{r^2} \frac{x}{r}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{GM}{r^2} \frac{y}{r}$$



Mediante un desarrollo bastante sencillo se puede deducir que, según el valor que tenga la velocidad del satélite (en relación con los de las magnitudes G , M y r) éste puede describir diferentes trayectorias. Queda ligado a la Tierra (es decir, choca con el suelo o mantiene una órbita circular o elíptica) para valores de la velocidad inferiores a un valor límite que llamamos velocidad de escape. Para valores superiores a la velocidad de escape, el satélite realiza una trayectoria hiperbólica abierta que le aleja cada vez más de la Tierra.

Renunciamos aquí a deducir estos resultados usando la ecuación y los justificaremos en el apartado siguiente mediante la realización de un balance de energías.

2) BALANCE ENERGÉTICO

Otra estrategia fructífera para abordar el estudio del movimiento de un objeto en un campo gravitatorio central es realizar un balance energético del sistema formado por el objeto y el astro o el planeta que lo atrae.

Consideramos otra vez el caso de un satélite y lo suponemos en órbita circular alrededor de la Tierra. La energía mecánica total del sistema Tierra-satélite es $E = E_{\text{pgrav}} + E_c$. Adoptando un sistema de referencia con origen en el centro de la Tierra y sustituyendo las expresiones correspondientes, tenemos:

$$E = -\frac{GMm}{r} + \frac{mv^2}{2}$$

Si el satélite describe una órbita circular, la fuerza gravitatoria que mantiene la órbita es una fuerza normal, es decir:

$$F_g = m \cdot a_n = \frac{GMm}{r^2} \quad (1) \quad \text{y} \quad a_n = \frac{v^2}{r} \quad (2)$$

Sustituyendo las expresiones (1) y (2) en la fórmula que calcula la energía del satélite obtenemos que ésta es negativa, según la expresión:

$$E = -\frac{GMm}{2r}$$

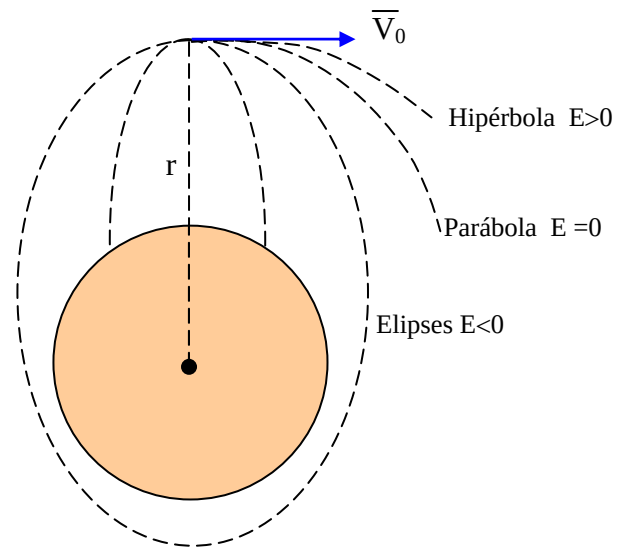
Esta energía mecánica es negativa porque el satélite está ligado a la Tierra. De forma general, cabe caracterizar energéticamente tres situaciones posibles entre un objeto y un cuerpo central que lo atrae gravitatoriamente:

a) La energía mecánica es negativa. $E = -\frac{GMm}{r} + \frac{mv^2}{2} < 0$

Es decir, la energía potencial en valor absoluto es mayor que la energía cinética. Si el satélite se aleja de la Tierra (aumentando su energía potencial) irá cada vez más lento (su energía cinética disminuirá) y esto ha de ocurrir de forma que la suma de ambas energías se mantenga constante y, en este caso, negativa. Por tanto ha de existir una distancia máxima, más allá de la cual no podrá alejarse el satélite. En esta situación el satélite sigue una trayectoria elíptica con el centro de la Tierra en uno de los focos de la elipse, como hacen los planetas en torno al Sol o las lunas de un planeta.

b) La energía mecánica es nula. $E = -\frac{GMm}{r} + \frac{mv^2}{2} = 0$

Es decir, el valor absoluto de la energía potencial coincide en todo momento con el valor de la energía cinética. En este caso, el satélite se puede alejar indefinidamente de la Tierra y cuando su velocidad tiende a 0, también tiende a 0 la energía potencial. A una distancia infinita de la Tierra la velocidad del satélite sería 0 (no tendría energía potencial ni cinética). Podemos pensar también que si se emplease toda la energía cinética que posee el satélite en tratar de alejarlo de la Tierra, podría llegar al infinito (a una zona en la que la atracción gravitatoria terrestre sería nula) pero le vendría "justo" hacerlo ya que llegaría allí con velocidad 0. El satélite tiene exactamente la velocidad de escape.



c) La energía mecánica es positiva. $E = -\frac{GMm}{r} + \frac{mv^2}{2} > 0$

Es decir, la energía cinética siempre supera al valor absoluto de la energía potencial. Al objeto le sobra energía cinética para escapar de la atracción gravitatoria terrestre y describe una trayectoria abierta en forma de hipérbola.