DEDUCCIÓN DE LAS LEYES DE KEPLER USANDO LA MECÁNICA DE NEWTON

PRIMERA LEY: Los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas, estando el Sol situado en uno de los focos.

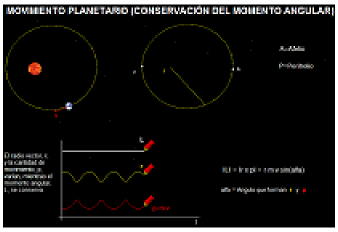
La fuerza que se ejerce sobre el planeta es una fuerza central (dirigida siempre hacia el Sol) y se calcula aplicando la ley de gravitación universal:

$$\mathbf{F} = -\frac{G \cdot M_{Sol} \cdot m_{planeta}}{r^2}\mathbf{u}_r$$

Por tanto, aplicando el segundo principio de la Dinámica de Newton, se deriva la siguiente ecuación diferencial del movimiento del planeta respecto del Sol:

$$\mathbf{F} = m_{planeta} \cdot \mathbf{a} = -\frac{G \cdot M_{Sol} \cdot m_{planeta}}{r^2}\mathbf{u}_r \quad \rightarrow \quad m_{planeta}\frac{d^2\mathbf{r}}{dt} + \frac{G \cdot M_{Sol} \cdot m_{planeta}M}{r^2}\mathbf{u}_r = 0$$

Para cada distancia o posible posición inicial y para un cierto rango de valores de la velocidad inicial del planeta (con respecto al Sol), la solución de esta ecuación diferencial viene dada por una trayectoria elíptica. Este resultado se puede comprobar, además de realizando el desarrollo matemático, con un simulador informático, por ejemplo: *Modellus* (introduciendo la ecuación anterior como modelo físico-matemático de una animación y comprobando que el planeta virtual sigue esa trayectoria en determinadas condiciones).

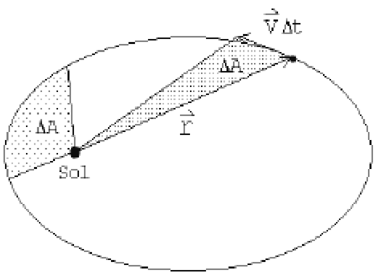


SEGUNDA LEY: El radio vector que une el planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

El principio de conservación del momento angular dice que si el momento de la fuerza total que actúa sobre un sistema respecto de un punto, **M** (**M**=**r** x **F**), es nulo, entonces el momento angular total del sistema, **L** (**L**= **r** x **p**, con **p**=*m*·**v**), respecto del mismo punto, no cambia. Las fuerzas internas de un sistema pueden variar las velocidades de las partículas que lo componen, pero no la cantidad de movimiento total. Similarmente, dichas fuerzas internas pueden variar el momento angular de las partículas componen un sistema, pero no pueden modificar el vector momento angular total.

En el movimiento de los planetas con respecto al Sol, la fuerza que se ejerce sobre el planeta se dirige en cada punto hacia el Sol. Por ello, el radio vector, **r**, y la fuerza, **F**, tienen siempre la misma dirección y el momento total, M, es cero. Por tanto, el momento angular total, **L**, ha de ser constante.

De ello se desprende que el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales. Como el módulo del momento angular total respecto del Sol es:



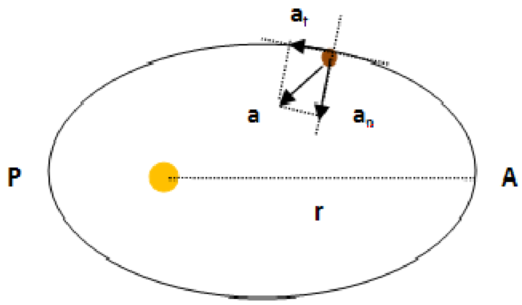
$$L = |L| = r \cdot m \cdot v \cdot sin\theta \quad (siendo\ \theta\ el\ ángulo\ entre\ \mathbf{r}\ y\ \mathbf{p})$$

El área ΔA que barre el planeta en un tiempo Δt es:

$$\Delta A = \frac{1}{2}|\mathbf{r}\ x\ (\mathbf{v} \cdot \Delta t)| = \frac{\Delta t}{2m}[\mathbf{r}\ x\ \mathbf{p}] = \frac{\Delta t}{2m}L$$

Así pues, como *L* es constante en toda la trayectoria la velocidad aerolar, ΔA/Δt, también es constante.

Se llega a la misma conclusión analizando la orientación del vector aceleración (**a**) y de sus componentes, normal y tangencial, a lo largo de la trayectoria del planeta. Dicha aceleración se dirige siempre hacia el Sol y, al descomponerla sobre la dirección tangente y sobre dirección normal (perpendicular a la tangente), se obtiene:

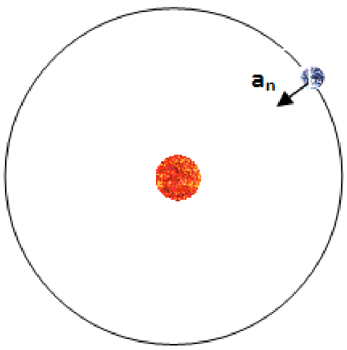


* La componente normal ($\mathbf{a_n}$) que indica que en cada instante se está modificando la dirección del movimiento.

* La componente tangencial ($\mathbf{a_t}$), cuyo módulo es igual a la derivada del módulo de la velocidad respecto del tiempo.

El sentido de dicha componente tangencial de la aceleración indica que la velocidad del planeta aumenta cuando éste se dirige en el sentido del afelio (A) al perihelio (P) y disminuye cuando el planeta se dirige en sentido opuesto.

TERCERA LEY: El cuadrado del período orbital es directamente proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita.



Consideramos el caso simplificado de una órbita circular, donde el módulo de la aceleración del planeta con respecto al Sol es:

$$a = \frac{F}{m_{planeta}} = \frac{G \cdot M_{Sol} \cdot m_{planeta}/r^2}{m_{planeta}} = \frac{G \cdot M_{Sol}}{r^2}$$

Con la trayectoria circular el movimiento es uniforme (ley de las áreas) y la aceleración es siempre normal, de modo que se cumple la siguiente relación entre la velocidad y el radio de la órbita planetaria:

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{G \cdot M_{Sol}}{r^2} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{Sol}}{r}}$$

El periodo es el tiempo que tarda el planeta en recorrer la órbita. Como la longitud de la órbita es L=2πr, y el módulo de la velocidad, v, es constante, tenemos:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{Sol}}{r}} = \frac{2\pi r}{T}$$

Desarrollando esta expresión se llega a la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot M_{Sol}} = K \cdot r^3$$

Al sustituir los valores de la constante G y la masa del Sol, se obtiene el valor de la constante de Kepler:

$$K = 3.35 \cdot 10^{15}\ m^3/s^2$$