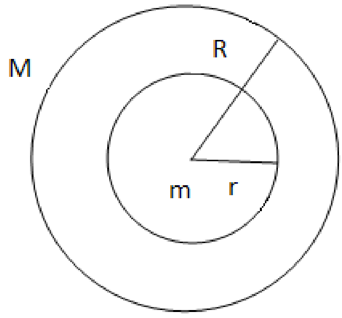
# MODELOS PARA LA GRAVEDAD EN EL INTERIOR DE LA TIERRA

## 1. Modelo para una Tierra con densidad constante




Si la masa de la Tierra se distribuyera de forma homogénea (densidad constante), el valor del módulo de g por debajo de la superficie terrestre dependería linealmente de la distancia al centro de la Tierra. En efecto, el campo gravitatorio a cualquier distancia r del centro por debajo del suelo (r<R), es el producido por la masa esférica que queda debajo de esa distancia (teorema de Gauss). Por tanto, su módulo es:

$$|\mathbf{g}| = \frac{G \cdot m}{r^2} \text{ (1)}$$

Y, si la masa se distribuye homogéneamente, la densidad de la Tierra (ρ) es la misma en todos los puntos:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}} = \frac{m}{\frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}} \quad \rightarrow \quad \frac{M}{R^3} = \frac{m}{r^3} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), se obtiene:

$$|\mathbf{g}| = \frac{G \cdot M}{R^3} r = \frac{4}{3} \rho \mathrm{G r}$$

Expresión que dice que el módulo del campo gravitatorio en el interior de la Tierra es proporcional a la distancia al centro (r).

## 2. Modelo para una densidad constante de las dos capas principales de la Tierra (núcleo y manto).

La densidad de la Tierra no es, ni mucho menos, uniforme. Realmente nuestro planeta está estratificado en capas, de diversa composición y estructura. Sabiendo esto, el modelo más sencillo consideraría dos capas principales: el núcleo, una esfera interior de radio *3490 km*, y el manto, una capa esférica que iría del núcleo hasta la superficie. Hay un salto muy brusco en el valor de la densidad media del núcleo (11.0 $g/cm^3$) y la del manto (4.44 $g/cm^3$). Considerando estos datos, cabe adoptar un modelo simplificado de la Tierra dividida en las dos capas citadas, bajo la suposición de que cada una de ellas tiene densidad constante.

Así, la masa encerrada por debajo de cualquier esfera de radio r (volumen V) en el núcleo es:

$$\mathrm{m} = \rho_{\text{núcleo}} \mathrm{V} = \rho_{\text{núcleo}} \frac{4}{3} \pi \mathrm{r}^3 \qquad (\mathrm{r} < \mathrm{R}_{\text{núcleo}})$$

Con lo que, en el núcleo el módulo de la aceleración de la gravedad se calcula con la siguiente expresión:

$$|\mathbf{g}| = \frac{G \cdot m}{r^2} = \frac{4}{3} \pi \mathrm{G} \rho_{\text{núcleo}} \mathrm{r} \qquad (\mathrm{r} < \mathrm{R}_{\text{núcleo}}) \text{ (1)}$$

Por su parte, la masa encerrada por debajo de cualquier esfera de radio r en el manto es:

$$\mathrm{m} = \mathrm{m}_{\text{núcleo}} + \mathrm{m}_{\text{manto}} = \rho_{\text{núcleo}} \frac{4}{3} \pi \mathrm{R}_{\text{núcleo}}^3 + \rho_{\text{manto}} \frac{4}{3} \pi (\mathrm{r}^3 - \mathrm{R}_{\text{núcleo}}^3) \qquad (\text{para } \mathrm{R}_{\text{núcleo}} < \mathrm{r} < \mathrm{R}_{\text{Tierra}})$$

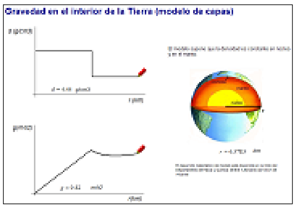
Por tanto, en el manto, el módulo de la aceleración de la gravedad se calcula la siguiente expresión:

$$|\mathbf{g}| = \frac{G \cdot m}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G \left[ \left( \rho_{\text{núcleo}} - \rho_{\text{manto}} \right) \frac{R^3_{\text{núcleo}}}{r^2} + \rho_{\text{manto}} r \right] \qquad (2)$$

Sustituyendo en (1) y (2) los valores que tienen las constantes en el S.I., se obtiene para los correspondientes módulos de g (en $m \cdot s^{-2}$):

$$|\mathbf{g}| = 19.577 \frac{r}{R_{\text{Tierra}}} \qquad (r < R_{\text{núcleo}}) \qquad\qquad |\mathbf{g}| = 1.920 \left( \frac{R_{\text{Tierra}}}{r} \right)^2 + 7.898 \left( \frac{r}{R_{\text{Tierra}}} \right) \qquad (R_{\text{núcleo}} < r < R_{\text{Tierra}})$$

El resultado muestra el hecho curioso de que *g* alcanza su valor máximo (superior a *9.8m/s²*) donde termina el núcleo y empieza el manto, es decir, a una distancia de *3490km* del centro de la Tierra. En el manto *g* también varía: toma un valor mínimo de *9.32m/s²* y desde ahí vuelve aumentar hasta llegar a la superficie, donde *g* vale *9.8m/s²* (El valor medio de *g* en el manto es *9.57m/s²*). El modelo se puede ver en una animación *Modellus* del Departamento de Física del IES "Leonardo Da Vinci".




## 3. Modelo para una densidad que disminuye gradualmente desde el centro de la Tierra hasta su superficie.

En lugar de considerar dos (o más) capas de densidad uniforme, cabe plantear una disminución gradual de la densidad de la Tierra desde el centro hasta la superficie. Una expresión bastante ajustada que refleja esta hipótesis es:

$$\rho = \rho_o \left( 1 - \frac{3r^2}{4R_T^2} \right)$$

Implica una disminución paulatina de la densidad desde el núcleo de la Tierra ($\rho = \rho_o = 10000 kg/m^3$) hasta la superficie ($\rho = 0.75 \cdot \rho_o = 2.5\ Kg/m^3$)

En este caso, como la densidad varía con la altura, la masa m se calcula con la siguiente integral:

$$m_{(desde\ x=0, hasta\ x=r)} = \int_0^r \rho dV = \int_0^r \rho 4\pi x^2 dx = \int_0^r \rho_o \left( 1 - \frac{3x^2}{4R_T^2} \right) 4\pi x^2 dx \qquad (1)$$

Realizada la integral (1) y sustituido el resultado en la expresión que calcula el campo, se obtiene una expresión del módulo del campo gravitatorio en función de la densidad en el centro y la distancia al mismo. Finalmente, aplicando expresión a una distancia $r=R_T$ (es decir, en la superficie de la Tierra, se obtiene:

$$g = g_0 \frac{60}{11} \frac{r}{R_T} \left[ \frac{1}{3} - \frac{3r^2}{20R_T^2} \right]$$

Siendo $g_o$ el valor de g en la superficie de la Tierra; *9.8m/s²*. Para un valor del radio de la Tierra igual a *6370km*, este resultado dice que la aceleración de la gravedad aumentaría al desplazarnos desde el centro de la Tierra hacia afuera. Alcanzaría un valor máximo (10.22 m/s²) a 5420m del centro (950 m de profundidad, con respecto al suelo) y, a partir de ahí, decrecería hasta la superficie (donde vale 9.8m/s²). El modelo se puede ver en una animación *Modellus* del Departamento de Física del IES "Leonardo Da Vinci".