

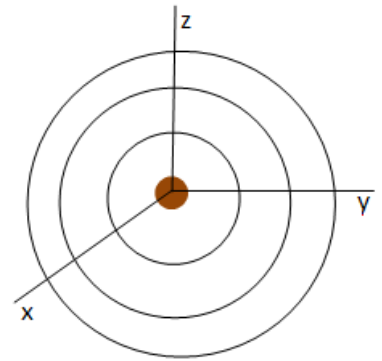
RELACIÓN ENTRE EL CAMPO Y EL POTENCIAL GRAVITATORIO

Aceptando que tuviera una superficie esférica y que su masa M se distribuyera homogéneamente por todo su volumen, el potencial gravitatorio V creado por un cuerpo celeste a una cierta distancia r de su centro es:

$$V = -\frac{G \cdot M}{|r|} = -\frac{G \cdot M}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

De acuerdo con esta expresión las

zonas de igual potencial (superficies equipotenciales) son superficies esféricas concéntricas alrededor del cuerpo celeste (como las trazadas en el dibujo adjunto), siendo el potencial mayor cuanto más lejos nos situemos del centro del mismo.



Por otra parte, la relación matemática entre el campo \mathbf{E} y el potencial V es:

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad \text{Siendo el operador } \nabla \text{ (gradiente): } \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Al aplicar esta expresión que relaciona el campo con el potencial, queda:

$$\mathbf{E} = GM \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right) \right]$$

Después de realizar las derivadas:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left((x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \right) = -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left((x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \right) = -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad \frac{\partial}{\partial z} \left((x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \right) = -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Se obtiene el siguiente resultado:

$$\mathbf{E} = -GM \left[\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{u}_x + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{u}_y + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z \right]$$

O, lo que es igual:

$$\mathbf{E} = -\frac{GM}{|r|^3} \mathbf{r}$$

El resultado dice que el módulo del campo gravitatorio es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro del cuerpo celeste y que el vector campo se dirige hacia dicho punto. Por tanto, tal como indica el dibujo adjunto, las líneas del campo atraviesan perpendicularmente las superficies equipotenciales y lo hacen en el sentido en que decrece el potencial.

