



# Estudio de la velocidad de escape

Un problema planteado como investigación

**Manuel Alonso Sánchez**  
Sección Local de Alicante de la RSEF

**Salvador Martínez Sala**  
IES Cid. Valencia

**Jaime Carrascosa Alís**  
Universidad de Valencia

**Presentamos un problema sobre la velocidad de escape planteado como investigación, en el que el alumnado ha de poner en juego aspectos fundamentales de la metodología científica. Se puede aplicar al lanzamiento de proyectiles y abre camino a otras cuestiones de interés, como la puesta en órbita de satélites y la previsión del tipo de atmósfera que puede albergar un determinado planeta.**

#### PALABRAS CLAVE

- VELOCIDAD DE ESCAPE
- LANZAMIENTO DE PROYECTILES
- SATÉLITES
- ATMÓSFERAS PLANETARIAS

Desde la década de los ochenta la resolución de problemas ha sido una línea de investigación didáctica muy fructífera en la enseñanza y aprendizaje de las ciencias, y hoy, los problemas de física planteados como investigación constituyen un instrumento muy eficaz para impulsar y desarrollar la competencia científica en el

alumnado (Carrascosa, Martínez y Alonso, 2020). Particularmente, el tema del campo gravitatorio permite plantear diversos problemas con esa orientación. Desarrollamos aquí uno sobre la velocidad de escape o velocidad mínima con la que habría que lanzar un cuerpo desde la superficie de un astro para que no volviese a caer de nuevo.

## DESARROLLO DEL PROBLEMA

### Possible enunciado

Para abordar el problema desde el inicio de forma tentativa, planteamos un enunciado abierto, sin datos numéricos:

➤ ¿Con qué velocidad mínima habría que lanzar un proyectil al espacio para que no volviese a caer a la Tierra?

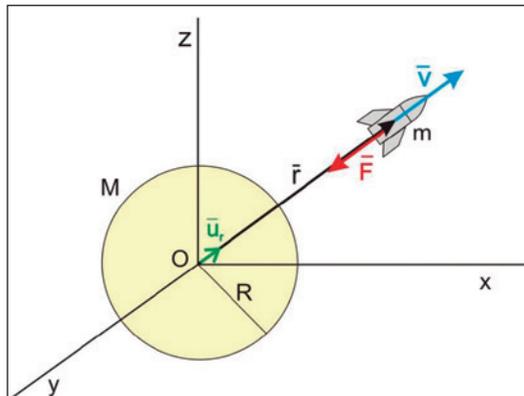
Y pedimos al estudiantado que realice un estudio cualitativo previo, precisando con claridad qué es lo que se pide, valorando el interés de la situación, y considerando algunas condiciones simplificadoras que convenga introducir para avanzar hacia la solución del problema.

### Planteamiento cualitativo

Empezamos admitiendo que en la situación planteada la Tierra se comporta como una masa puntual (lo que conlleva considerarla esférica) y referimos el movimiento del proyectil a ese punto. Aunque el movimiento de traslación de la Tierra no es rectilíneo ni uniforme, esta aproximación es razonable porque su aceleración es muy pequeña comparada con la inicial del proyectil. Para simplificar más el problema, se supone que el proyectil se lanza en dirección vertical y que sobre él solo actúa la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra. Ello implica, al menos, no tener en cuenta la influencia del rozamiento (aunque

■

**Los problemas de física  
planteados como investigación  
son un instrumento eficaz  
para impulsar y desarrollar la  
competencia científica**



**Imagen 1.** Esquema gráfico elaborado en el planteamiento del problema

su efecto es importante mientras se atraviesa la atmósfera), aceptar que el proyectil no tiene ningún sistema de empuje y despreocuparse de las fuerzas que le ejercen otros objetos del cosmos mucho más distantes que la Tierra.

Hay que apoyar el planteamiento sobre un esquema gráfico apropiado (imagen 1) que ayude a entender que, bajo las condiciones anteriores, la trayectoria del proyectil será rectilínea y «vertical» porque la fuerza que se ejerce sobre él también es «vertical» y dirigida hacia el origen del sistema de referencia (SR).

### Operativización

Los alumnos y alumnas saben que la fuerza ejercida sobre el proyectil se obtiene aplicando la ley de gravitación universal, lo que les permite obtener también su aceleración a lo largo de todo el movimiento (expresiones 1 y 2, donde  $G$  es la constante de gravitación universal,  $M$  la masa de la Tierra,  $m$  la masa del proyectil,  $r$  la distancia al centro de la Tierra, y  $u_r$  un vector unitario en la dirección de  $F$  y sentido opuesto).



$$\mathbf{F} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} \cdot \mathbf{u}_r \quad (1) \qquad \mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\frac{G \cdot M}{r^2} \cdot \mathbf{u}_r \quad (2)$$

Los módulos de la fuerza y de la aceleración son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia entre el proyectil y el origen del SR. Por tanto, a medida que el proyectil se va alejando, su velocidad y su aceleración disminuyen, y cabe imaginar dos posibles situaciones:

- Que en algún momento el valor absoluto de la aceleración sea suficiente para que la velocidad del proyectil llegue a ser cero a una altura determinada (altura máxima). Entonces, cuando el proyectil llegue ahí se detendrá y, a continuación, caerá.
- Que el ritmo de decrecimiento del módulo de la aceleración sea insuficiente para que la velocidad del proyectil se anule en ningún momento. Entonces, se alejará indefinidamente.

Se trata de obtener la velocidad mínima de lanzamiento para que ocurra esto último o «velocidad de escape», que es la magnitud buscada en el problema.

## Hipótesis: ¿De qué factores dependerá la velocidad de escape?

La emisión de hipótesis es una de las actividades más importantes en cualquier proceso investigativo. En este caso, los alumnos y alumnas suponen que la velocidad de escape  $v_e$  dependerá la masa  $M$  de la Tierra, de la distancia  $r$  desde la que se lanza el proyectil y de la masa  $m$  del proyectil. Para un lanzamiento desde el suelo, plantean concretamente que, a igualdad de los restantes factores, ve ha de ser tanto mayor cuanto mayor sea  $M$  y cuanto menor sea el radio terrestre  $R$  (porque la Tierra atraerá al proyectil con más fuerza).

Sobre la posible influencia de la masa del proyectil las hipótesis pueden variar, dependiendo de si anteriormente se han trabajado los conceptos de masa gravitatoria y masa inercial. Ya que, por una parte, cuanto mayor sea la masa gravitatoria del proyectil (la que aparece en la expresión (1), mayor es también la fuerza con la que es atraído y, por tanto, mayor deberá ser la velocidad de escape. Pero también debe tenerse en cuenta que cuanto mayor sea la masa inercial del proyectil (la que aparece en la expresión (2), menor es la aceleración en su movimiento de ascensión. En el proceso de operativización del problema, las influencias de ambas masas (cuantitativamente iguales) se han compensado y, por ello,  $m$  no aparece en la expresión final de la aceleración del proyectil. Por tanto, cabe esperar que tampoco lo haga en la expresión de la velocidad de escape.

Finalmente, también conviene plantear la influencia de la constante de gravitación  $G$ , ya que de ella dependen la fuerza y la aceleración del proyectil. Es interesante imaginar un universo alternativo donde el valor de  $G$  sea distinto al establecido en el nuestro: Si  $G$ , por ejemplo, aumentara, la velocidad de escape también debería hacerlo, porque la fuerza de atracción sobre el proyectil también aumentaría.

## Estrategias de resolución

En este punto, pedimos a la clase elaborar posibles estrategias que puedan conducir a la



**Es interesante imaginar un universo alternativo donde el valor de  $G$  sea distinto al establecido en el nuestro**

resolución del problema, argumentando sobre ellas y los pasos a seguir. Pueden plantear al menos tres:

- Partir de la aceleración del proyectil (expresión 2) y buscar qué valor inicial de la velocidad tendría un movimiento en el que este se alejara indefinidamente y justamente llegase al infinito con velocidad nula. Esta estrategia requiere un desarrollo operativo que supera el nivel del bachillerato.
- Relacionar el trabajo resultante realizado sobre el proyectil (por la fuerza gravitatoria) con el cambio de su energía cinética entre dos estados A (cuando es lanzado) y B (al llegar al infinito con velocidad nula). A continuación, despejar de la ecuación obtenida  $v_A$ , que, en este supuesto, será la velocidad de escape. Casi todos los textos de bachillerato deducen así la velocidad de escape.
- Plantear que, dependiendo de la velocidad de lanzamiento del proyectil, la energía total del sistema (aislado) que forman la Tierra y el proyectil puede ser positiva o negativa. Si es negativa el sistema estará ligado, en el sentido de que el proyectil no podrá escapar del campo gravitatorio de la Tierra, y si es positiva el proyectil escapará de dicho campo gravitatorio terrestre. El caso-frontera en el que la energía total del sistema Tierra-proyectil es igual a cero, corresponde a que este inicie su movimiento con la velocidad de escape.

Esta última estrategia conecta este problema con otras situaciones del mundo natural en donde también es fundamental considerar el signo de la energía de un sistema. Por ejemplo, al evaluar la ligazón (y consecuente estabilidad/inestabilidad) de un átomo, un núcleo, una sustancia, etc.

## Resolución propiamente dicha

Usando la segunda o tercera el alumnado llega a un resultado que es aplicable a cualquier astro de masa  $M$  y radio  $R$ , con las características que hemos considerado (expresión 3: expresión literal de la velocidad de escape):

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}} \quad (3)$$

Para la Tierra, al sustituir su masa y su radio (medio) se obtiene un valor de  $1.12 \cdot 10^4$  m/s = 40.320 km/h, que es algo inferior al real porque hemos despreciado la influencia del rozamiento con el aire. Para la Luna, en cambio, se obtiene un valor de  $2'37 \cdot 10^3$  m/s = 8.532 km/h, que resulta ser mucho más cercano al real, porque la Luna no tiene atmósfera. Estos valores tienen mucho interés en ingeniería espacial y, teniendo en cuenta cómo se ha obtenido la velocidad de escape (por consideraciones energéticas), no dependen de la dirección en la que se lance el proyectil.

## Análisis del resultado

El análisis del resultado obtenido a la luz de las hipótesis antes elaboradas es una etapa fundamental del proceso de investigación que involucra al problema. Puede comenzar con un análisis dimensional para comprobar que el resultado es dimensionalmente homogéneo ( $L \cdot T^{-1}$  en ambos lados de la expresión 3). Esta es una condición necesaria, pero no suficiente, para que sea correcto. Luego, los alumnos y alumnas comprueban que, de acuerdo con las hipótesis,  $v_e$  es tanto mayor cuanto mayor sea  $M$  o  $G$ , y cuanto menor sea  $R$ .

Respecto a la masa del proyectil ( $m$ ), ya hemos comentado por qué no aparece en el resultado.

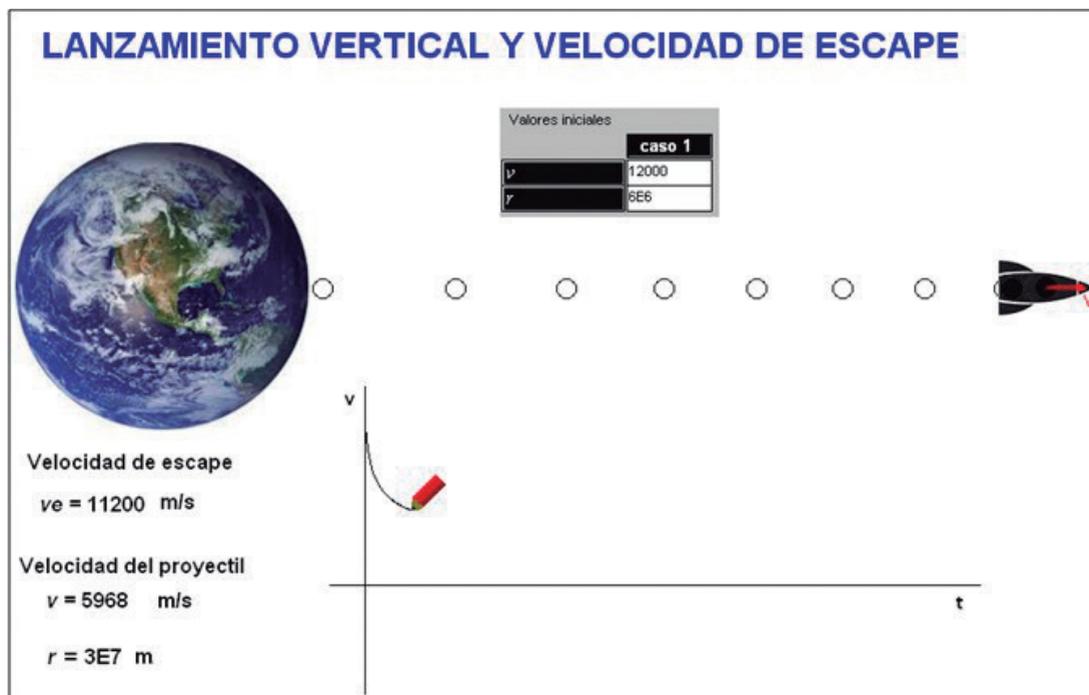
## Se pueden reforzar bastantes conceptos y procedimientos involucrados en el problema usando una animación informática: Modellus



Si ello entra en contradicción con las hipótesis del alumnado, nos dará una excelente oportunidad para aprovechar ese conflicto cognoscitivo y trabajar detenidamente los conceptos de masa inercial y masa gravitatoria, que intervienen en un número amplio de problemas de mecánica, realizables desde 4.º de ESO hasta 2.º de bachillerato (Alonso, 1996).

Se pueden reforzar bastantes conceptos y procedimientos involucrados en el problema usando una animación informática –Modellus– de elaboración propia que simula el movimiento del proyectil y representa las gráficas de las magnitudes cinemáticas que lo describen (imagen 2). El alumnado puede modificar los parámetros del problema y comprobar, por ejemplo, que el proyectil regresa hacia la Tierra solo si la velocidad del lanzamiento es inferior a  $v_e$ .

Una buena investigación no solo es útil por los problemas que resuelve sino, tanto o más, por abrir nuevas perspectivas. En este caso, empezamos planteando preguntas que derivan directamente de las limitaciones impuestas para hacer abordable el problema: ¿cómo será el movimien-



**Imagen 2.** Animación informática interactiva sobre el problema, detenida en un instante posterior a un lanzamiento de velocidad superior a la de escape



**Imagen 3.** Animación mostrando la trayectoria elíptica que puede seguir un satélite lanzado desde una cierta altura a velocidad inferior a la de escape

to del proyectil si se considera la fricción con la atmósfera?, ¿cómo podrían influir otros astros?, etc. Otras cuestiones de gran interés son las relativas al lanzamiento de satélites desde cierta altura (utilizando antes un cohete propulsor que los lleve hasta ahí) y las que se refieren a la posible existencia de atmósfera en un determinado planeta, sobre las cuales nos detendremos brevemente a continuación.

## La velocidad de escape y el lanzamiento de satélites

Para este tema hemos creado otra animación que permite lanzar un proyectil desde cualquier distancia a la Tierra y en cualquier dirección. En la pantalla se reproduce su movimiento y se puede modificar en todo instante su velocidad. El alumnado puede comprobar, por ejemplo, que siempre que esa velocidad sea inferior a la de escape, el sistema permanece ligado, y el proyectil (dependiendo de la velocidad que se le aplique) describe una trayectoria que termina en la Tierra, una trayectoria circular alrededor de nuestro planeta (como la de un satélite en órbita), o una trayectoria elíptica, como la que tienen los planetas alrededor del Sol (imagen 3).

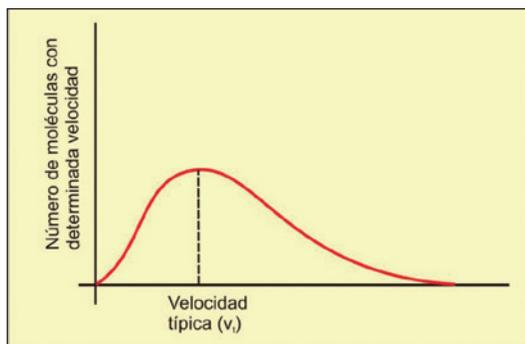
La animación también es útil cuando se pretende cambiar la órbita que describe un satélite a otra de diferente radio (modificando su velocidad), y también nos muestra que, si la velocidad de lanzamiento es mayor que  $v_e$ , el satélite se aleja continuamente de la Tierra con una trayectoria hiperbólica abierta.

## La velocidad de escape y las atmósferas planetarias

Comenzamos el estudio de esta interesante cuestión preguntando a qué puede deberse el hecho de que, estando la Tierra y la Luna aproximadamente a la misma distancia del Sol, la mayor parte del agua de la Luna haya desaparecido, mientras que no ha ocurrido así con las moléculas de agua terrestres, que quedaron atrapadas por la atracción gravitatoria de nuestro planeta. Con los valores obtenidos de la velocidad de escape en ambos astros, los alumnos y alumnas deducen fácilmente que, durante un proceso de evaporación del agua, en la Luna muchas moléculas (debido al calentamiento del gas producido por la radiación solar) se mueven a velocidades superiores a  $v_e$  y logran vencer la atracción gravitatoria lunar.

Este razonamiento hace ver que interesa relacionar formalmente la velocidad de escape con la temperatura en las superficies planetarias porque ambos parámetros son determinantes para justificar la formación y el mantenimiento de una posible atmósfera.

Para establecer esta relación, podemos considerar al gas atmosférico como un gas perfecto, en el que las velocidades de todas sus moléculas tendrían un tipo de distribución estadística maxwelliana alrededor de una velocidad típica ( $v_t$ ) o velocidad más probable (imagen 4).

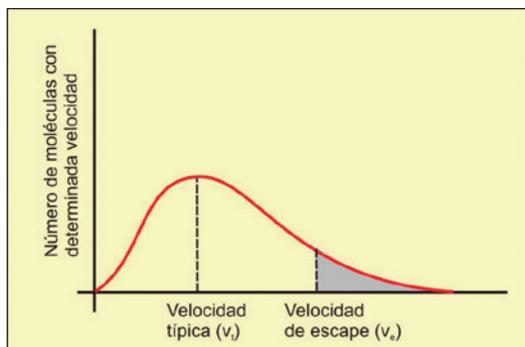


**Imagen 4.** Distribución Maxwelliana de las velocidades de las moléculas de un gas a una cierta temperatura

Como la teoría cinética de los gases establece que la energía cinética de esas moléculas con velocidad típica viene dada por:  $E_{c_t} = 3KT/2$  (donde  $K$  es la constante de Boltzmann y  $T$  la temperatura absoluta del gas), obtenemos, aplicando la expresión general de la energía cinética a una de dichas moléculas ( $E_{c_t} = m \cdot v_t^2/2$ ), una relación entre  $v_t$  y  $T$  (expresión 4):

$$\frac{3 \cdot K \cdot T}{2} = \frac{1}{2} m v_t^2 \rightarrow v_t = \sqrt{\frac{3KT}{m}} \quad (4)$$

Ahora bien, sea cual sea el valor de la velocidad de escape de un determinado planeta, siempre



**Imagen 5.** Moléculas con velocidad superior a la velocidad de escape

habrá partículas de su atmósfera con velocidad superior que, en consecuencia, podrán escapar (zona sombreada de la imagen 5). Pues bien, el criterio aceptado para que un planeta retenga su atmósfera durante mucho tiempo es exigir que la velocidad de escape supere en más de seis veces a la velocidad típica ( $v_e > 6 \cdot v_t$ ).

Finalmente, es muy instructivo construir un gráfico de velocidad frente a temperatura, situar en él a diversos astros del sistema solar, según sus valores de  $\frac{1}{6} \cdot v_e$  y temperatura superficial  $T$ , y trazar en ese mismo gráfico unas líneas (punteadas) que marquen los valores de la velocidad típica  $v_t$  de las moléculas en función de  $T$  (expresión 4), para algunos de los principales candidatos a ser componentes de una atmósfera. Como puede observarse (imagen 6), no hemos incluido en el gráfico ni Júpiter ni Saturno, que exigirían un rango mucho mayor en ordenadas. Tampoco hemos considerado el oxígeno, cuyos valores son muy similares al nitrógeno.

Cada astro (caracterizado por una temperatura superficial dada) se ubica por encima de la línea correspondiente a un determinado gas cuando  $\frac{1}{6} \cdot v_e > v_t$  (a dicha temperatura) y, por tanto, podrá retener a ese gas. Vemos así, directamente en el gráfico, que las atmósferas de los planetas jovianos (Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno) están dominadas por elementos ligeros, principalmente  $H_2$  y  $He$ , que son los gases más abundantes en el universo. Son atmósferas primarias, que se crearon cuando se formó el sistema solar. En cambio, las atmósferas de los planetas terrestres que las tienen (Venus, Tierra y Marte) son atmósferas secundarias, dominadas por moléculas como  $CO_2$  y  $N_2$ . Cuando se formaron esos planetas también tenían una atmósfera primaria, compuesta principalmente de  $H_2$  y  $He$ , pero

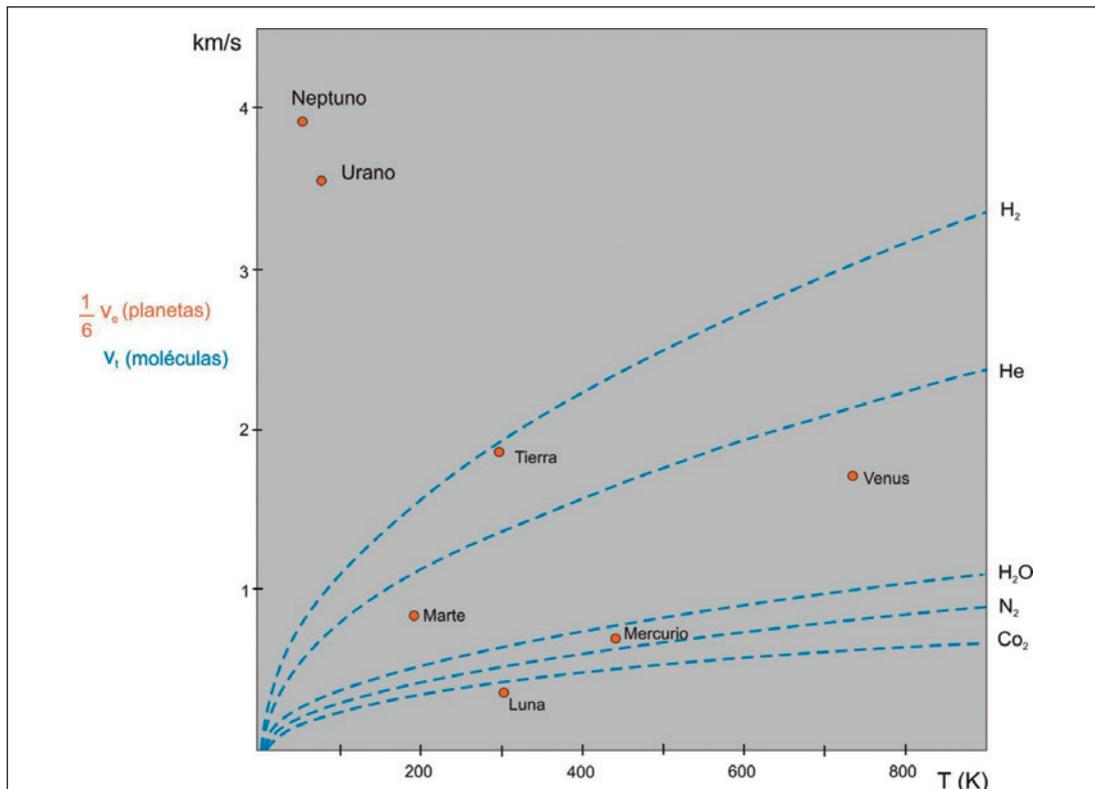


Imagen 6. Velocidad frente a temperatura. (Gráfico elaborado por los autores de este trabajo.)

ambos gases son muy livianos y poco a poco se perdieron hacia el espacio. Vemos también que ni el planeta Mercurio ni la Luna han podido retener una atmósfera.

## CONSIDERACIONES FINALES

El modelo de «resolución de problemas como investigación» ha sido puesto a prueba reiteradamente en distintos campos de conocimiento (mecánica, electricidad, química, etc.) y niveles educativos, y ha demostrado su mayor utilidad para impulsar y desarrollar la competencia científica en el alumnado de secundaria, quie-

nes coinciden mayoritariamente en valorar muy positivamente esta forma de enfocar y resolver los problemas (Martínez-Torregrosa y otros, 2018). En este trabajo nos hemos limitado a ilustrar algunos de sus rasgos más relevantes a través de un ejemplo concreto. Quienes estén interesados pueden acceder libremente a muchos otros ejemplos en la web «Didáctica de las Ciencias Experimentales. Física y Química» (<https://didactica fisica quimica.es/>) y en la web «Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física» (<http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm>), donde también se pueden descargar las animaciones. ◀

## Referencias bibliográficas

- Alonso, M. (1996). La enseñanza del concepto de masa a partir de un modelo de enseñanza por investigación. *Alambique. Didáctica de las Ciencias Experimentales*, 9, 109-119.
- Carrascosa Alís, J., Martínez, S. y Alonso, M. (2020). Competencia científica y resolución de problemas de Física. *Revista Científica*, 38(2). <https://doi.org/10.14483/23448350.16211>
- Martínez-Torregrosa, J. y otros (2018). ¿Podemos mejorar la enseñanza de la resolución de problemas de «lápiz y papel» en las aulas de Física y Química? *Educación Química*, 16(2). <https://doi.org/10.22201/fq.18708404e.2005.2.66116>

## Direcciones de contacto

**Manuel Alonso Sánchez**  
Sección Local de Alicante de la RSEF  
[manoloalonsosanchez@gmail.com](mailto:manoloalonsosanchez@gmail.com)

**Salvador Martínez Sala**  
IES Cid (Valencia)  
[salvmart50@gmail.com](mailto:salvmart50@gmail.com)

**Jaime Carrascosa Alís**  
Universidad de Valencia  
[Jaime.Carracosa@uv.es](mailto:Jaime.Carracosa@uv.es)

Este artículo fue solicitado por ALAMBIQUE. DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES en noviembre de 2021 y aceptado en abril de 2022 para su publicación.

# La participación educativa en centros de secundaria

## Conceptos, procedimientos y materiales

**Rosa Marí Ytarte, Rut Barranco Barroso (coords.)**

La participación social es un derecho de ciudadanía y como tal ha de ser enseñado y aprendido, este es el objetivo de este libro ya que plantea un recorrido por el proceso y la praxis educativa de la participación en centros de secundaria. Los modelos educativos que desarrolla muestran la participación educativa como una forma de hacer las cosas en el día a día de la vida cotidiana en los centros que implique al conjunto de la comunidad educativa. Vinculado a la idea de ciudadanía, el libro propone reflexiones, estrategias, buenas prácticas y guías educativas para desarrollar un programa de participación en el centro.

**GASTOS DE ENVÍO GRATIS**  
Península (mínimo 10€)



Hurtado, 29. 08022 Barcelona



[amacias@grao.com](mailto:amacias@grao.com)



[www.grao.com](http://www.grao.com)



934 080 464