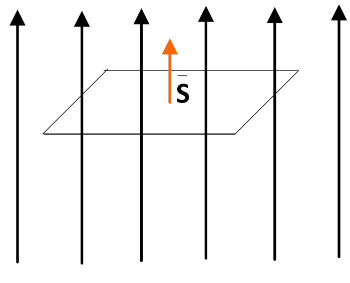
FLUJO ELÉCTRICO, TEOREMA DE GAUSS Y CAMPO ELÉCTRICO CREADO POR DIFERENTES DISTRIBUCIONES DE CARGA

1) FLUJO ELÉCTRICO

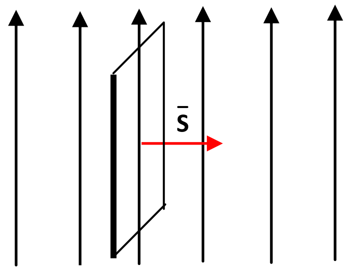
El flujo eléctrico "ϕ" a través de una superficie es una magnitud indicativa del número neto de líneas de fuerza del campo eléctrico que entran o salen atravesando dicha superficie. Si el campo eléctrico es uniforme y la superficie es plana, el flujo es igual al producto escalar del vector campo, **E**, por el vector superficie, **S**, (definido como un vector perpendicular a la superficie y de la magnitud de ella):



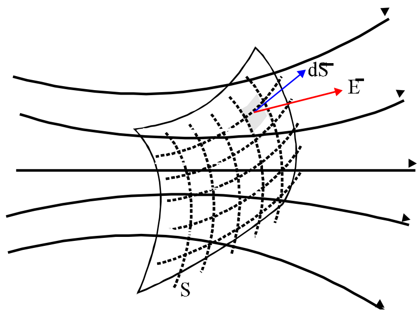
Flujo eléctrico máximo (α=0º)

$$\phi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} = E \cdot S \cdot \cos\,\alpha$$

Tal como muestran los dibujos adjuntos, esta definición tiene en cuenta que el número de líneas del campo que atraviesan la superficie es mayor cuanto mayor sea la intensidad del campo y, lógicamente, mayor también cuando mayor sea la superficie. Además es máximo, si las líneas del campo atraviesan la superficie perpendicularmente (α = 90º) y nulo si no la atraviesan por estar orientadas paralelamente a ella (α =0º, α =180º).



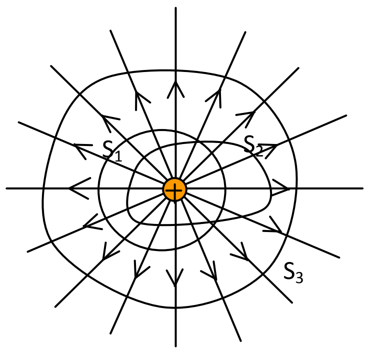
Flujo eléctrico nulo (α=90º)



En general, el campo eléctrico no es uniforme, ni la superficie plana. La intensidad del campo eléctrico no toma el mismo valor en todos los puntos de la superficie considerada y el ángulo que forma el campo con la superficie también varía de unos puntos a otros. En consecuencia, se requiere calcular el flujo eléctrico mediante una integral a lo largo de la superficie del producto escalar mencionado. Es decir:

$$\phi = \int d\phi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

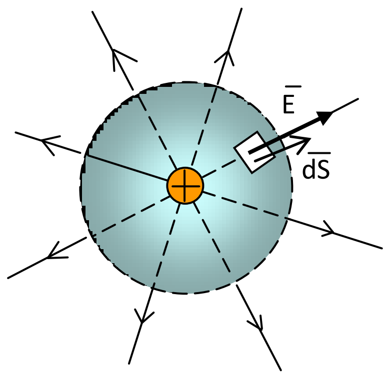
2) TEOREMA DE GAUSS



A la derecha se representan las líneas de fuerza del campo eléctrico producido por una carga positiva. Alrededor de la carga se han dibujado 3 superficies con formas variadas que la encierran. Como es evidente las mismas líneas del campo que emergen de la carga positiva y se dirigen radialmente hacia el infinito atraviesan a las tres superficies. Más en general, atraviesan a cualquier superficie cerrada que contenga a la carga Q. Por tanto, el flujo a través de las tres superficies dibujadas tiene el mismo valor, es decir: $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3$

Esta constancia del flujo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada en cuyo interior se disponga una carga, sugiere que dicho flujo se relaciona directamente con la carga encerrada (que es lo único que tampoco cambia). Para comprobar que así es, calculamos ese flujo constante eligiendo la superficie de geometría más sencilla: una esfera de radio r que rodee a la carga.

En este caso, el módulo del campo eléctrico producido por la carga Q en los puntos de la superficie es el valor del campo a la distancia r, el mismo en todos los puntos e igual a $|\mathbf{E}| = Q/4\pi\varepsilon r^2$. Por su parte, el área de la superficie esférica a esa distancia de Q es $S=4\pi r^2$. Como el vector que representa dicho campo es radial y dirigido hacia fuera, los vectores **E** y **dS** tienen la misma dirección y el mismo sentido en todos los puntos de la superficie S. Por lo tanto, el flujo del campo eléctrico producido por la carga Q a través de la superficie S es:



$$\phi = \int d\phi = \int \mathbf{E}\cdot\mathbf{dS} = \int |\mathbf{E}|\cdot|\mathbf{dS}| = |\mathbf{E}|\cdot\int|\mathbf{dS}| = |\mathbf{E}|\cdot|\mathbf{S}|$$

Teniendo en cuenta que $|\mathbf{E}| = Q/4\pi\,\varepsilon\, r^2$ y $|\vec{\mathbf{S}}| = 4\pi\, r^2$, queda:

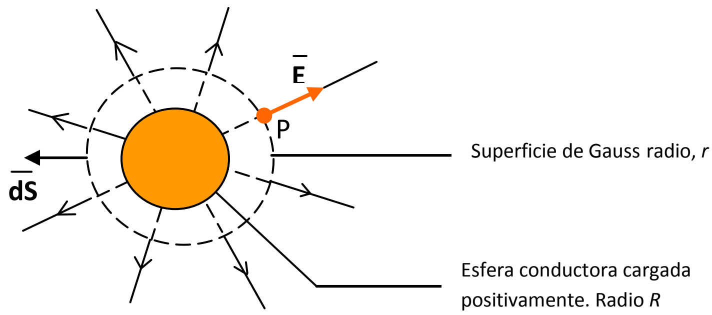
$$\phi = Q/\varepsilon$$

Como hemos dicho, aunque se ha obtenido usando una superficie esférica centrada en la carga, Q, este resultado vale para dar el flujo del campo eléctrico que atraviesa cualquier superficie cerrada que la contenga. Esta afirmación, que dice que el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual al resultado de dividir la carga encerrada dentro de esa superficie entre la permitividad eléctrica, ε, se llama “Teorema de Gauss”.

CAMPO ELÉCTRICO CREADO POR ALGUNAS DISTRIBUCIONES DE CARGA

Esfera conductora, cargada eléctricamente

Consideramos una esfera metálica de radio *R*, con una carga neta *Q*. Dicha carga se distribuye uniformemente en toda la superficie y, por ello, las líneas del campo que crea son radiales. Para calcular el campo eléctrico en un punto P, situado una distancia $r \geq R$, del centro de la esfera, tomamos una superficie esférica de radio r que encierra a la esfera conductora y es concéntrica con ella.



La simetría de la situación indica que el campo eléctrico tiene el mismo valor en todos los puntos de la esfera de radio, r, adoptada y que el vector **E** es paralelo al vector **dS** en todos los puntos de dicha esfera. Por tanto, el flujo del campo eléctrico a través de ella es:

$$\phi = \int |\mathbf{E}|\cdot|\mathbf{dS}| = |\mathbf{E}|\cdot\int|\mathbf{dS}| = |\mathbf{E}|\cdot|\mathbf{S}|$$

Por otra parte, el teorema de Gauss dice que ese mismo flujo vale:

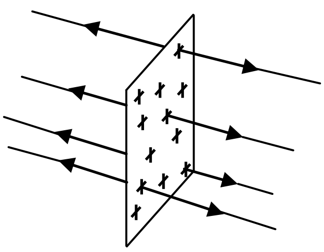
$$\phi = Q/\varepsilon$$

Igualando las dos expresiones se obtiene:

$$E\cdot S = Q/\varepsilon \rightarrow E\cdot 4\pi r^2 = Q/\varepsilon \rightarrow E = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Es decir, la esfera produce en el exterior un campo eléctrico de la misma orientación y del mismo valor que produciría ahí una carga puntual con la misma carga de la esfera y colocada en el centro de ésta. O, dicho de otro modo, el resultado es el mismo que se tendría si toda la carga de la esfera, en lugar de estar repartida por su superficie, estuviera concentrada en su el centro.

Superficie plana indefinida

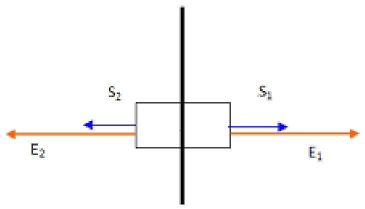


Consideramos ahora una lámina plana conductora y cargada homogéneamente con una carga neta Q. Es semejante a una de las placas de un condensador plano, excepto por el hecho de que la imaginamos con una superficie indefinida.

En la figura de la izquierda hemos dibujado un trozo de la lámina. Como su superficie es indefinida, las líneas de fuerza del campo son paralelas entre sí, perpendiculares a la lámina, y se alejan de ella por ambos lados.

Teniendo en cuenta esta geometría, para aplicar el teorema de Gauss (con objeto de calcular el campo eléctrico en un punto P a una cierta distancia de la lámina), dibujamos una superficie cerrada consistente en un paralelepípedo que la encierra y uno de cuyos lados tiene la longitud igual a la distancia de la superficie al punto P.

En el esquema siguiente se ha dibujado tal superficie, vista la lámina de perfil.



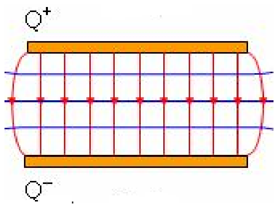
A la hora de aplicar el teorema de Gauss para calcular el flujo a través del paralelepípedo, tenemos en cuenta que dicho flujo es nulo por todas las superficies, excepto por las dos que se enfrentan a la placa. Es decir:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = E{\cdot}S_1 + E{\cdot}S_2 = 2{\cdot}E{\cdot}S \quad (S = S_1 = S_2) \quad (1)$$

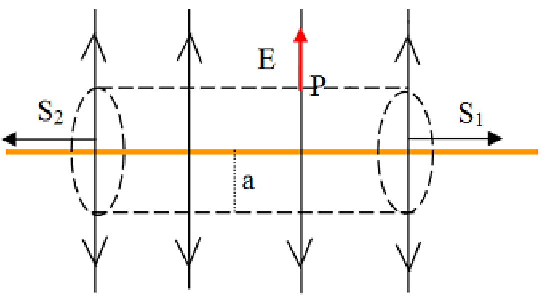
El teorema de Gauss dice que dicho flujo es: $\phi = Q/\varepsilon$ (2)

Igualando (1) y (2) se obtiene $2E{\cdot}S = Q/\varepsilon \rightarrow E = \frac{Q}{2\varepsilon S}$

Por tanto, el campo eléctrico creado por el pedazo de lámina que hemos considerado depende carga por unidad de superficie que contiene la misma, pero no de la distancia a ella. Esto es coherente con el hecho de que dicho campo se ha considerado uniforme. La conclusión es generalizable para cualquier superficie plana cargada, en la medida que se pueda seguir aceptando que el campo que produce es uniforme. Por tanto, se verifica mejor cuanto más centrado esté el punto donde se calcula el campo (o, lo que es igual, cuando más alejado esté de los bordes de la superficie). También se puede generalizar el resultado al cálculo del campo producido entre dos placas de un condensador, donde hay que contabilizar la contribución al mismo de cada una de las dos placas. Aquí, tal como indica el dibujo adjunto, el campo es prácticamente uniforme en el interior (entre las placas), pero no cerca de los bordes, donde las líneas del campo se curvan.



Conductor rectilíneo e indefinido



Como último ejemplo, consideramos un hilo conductor, cargado con carga neta Q, aislado y en equilibrio electrostático. Supondremos, para simplificar, que dicho hilo es indefinido. Entonces, las líneas de fuerza del campo eléctrico son perpendiculares al hilo y radian en todas direcciones.

Tal y como se indica en el esquema adjunto, en el cual sólo se han dibujado líneas del campo coincidentes con el plano del papel, para calcular el valor del campo a una distancia, *a*, del hilo, consideramos un cilindro de radio, *a*, cuyo eje coincide con el conductor y calculamos el flujo a través del mismo. Como el campo eléctrico es perpendicular a las bases del cilindro, el flujo a través de cualquiera de ellas es nulo. Por tanto, sólo existe flujo a través de la superficie lateral del cilindro. Aplicando el teorema de Gauss se obtiene:

$$\phi = E{\cdot}S = Q/\varepsilon$$

En este caso $S = 2\pi\, a{\cdot}\, L$ (superficie lateral del cilindro) Por tanto, se obtiene:

$$E = Q/2\pi a L\varepsilon$$