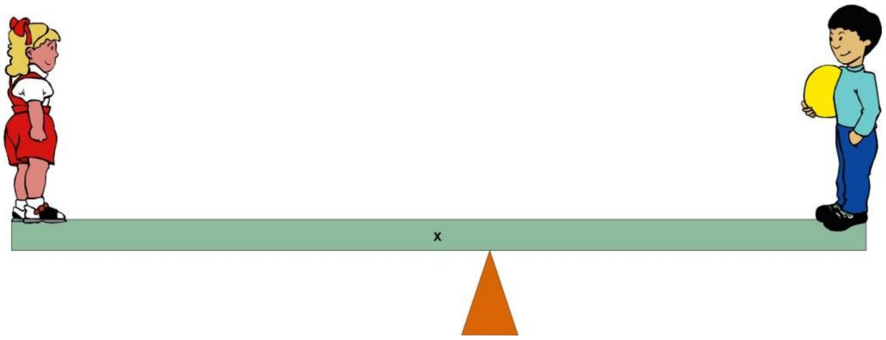
Sobre los extremos de una barra rígida y horizontal de 20 kg de masa y 2 m de longitud, se sitúan dos niños de masas 40 kg y 50 kg. Determinad en qué punto de dicha barra habría que colocar un apoyo para que el conjunto permanezca en equilibrio.



Planteamiento

Para poder decir en qué punto de la barra habrá que colocar el apoyo que se demanda, conviene elegir un origen O. Podemos tomar como tal, el extremo izquierdo de la barra (donde se encuentra la niña). Por otra parte, también podemos simplificar la situación considerando a los niños como masas puntuales y la barra de forma lineal, sin que ello altere la naturaleza del problema. Designaremos la longitud de la barra como L, la masa de la niña como m_1, la del niño como m_2 y la de la barra como m_3. Finalmente, utilizaremos el sistema de coordenadas cartesianas que se incluye en el esquema siguiente:

De esta forma, el problema se concreta a la determinación de la distancia "d" a la que debe encontrarse el apoyo, medida desde el origen O (extremo izquierdo de la barra).

Hipótesis. ¿De qué factores cabe esperar que dependa d

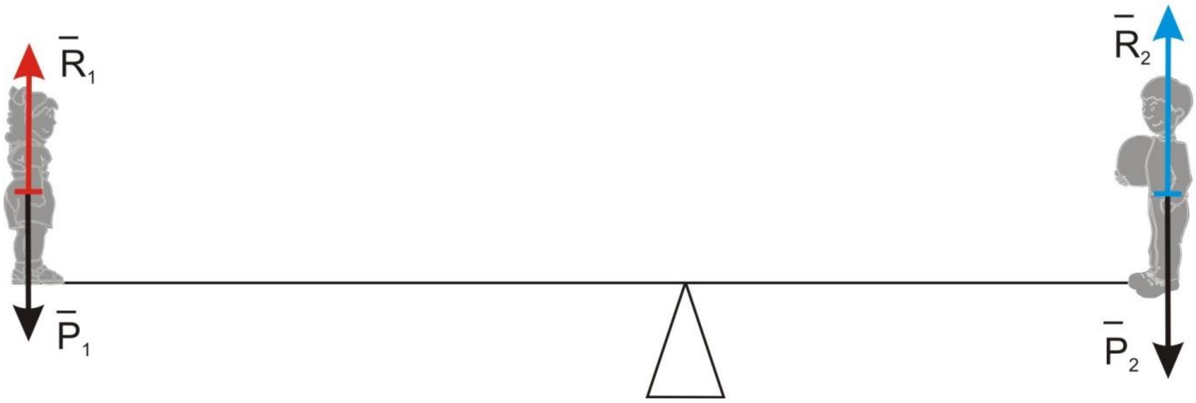
En principio, dado que $m_2 > m_1$, parece claro que el apoyo deberá estar más cerca de m_2 que de m_1 y que, por tanto, en las condiciones impuestas, d será mayor que L/2. Además, a igualdad de los restantes factores, cabe esperar que la distancia d:

- Aumente, cuanto mayor sea m_2
- Sea igual a L/2 en el caso de que $m_1 = m_2$
- Aumente, cuanto mayor sea L

Estrategia de resolución y resolución

Una forma de calcular la distancia que se nos pide, será analizar en primer lugar las fuerzas que actúan sobre cada parte del sistema formado por las tres masas consideradas y aplicar en cada caso la condición de equilibrio.

Sobre cada uno de los niños actúan las fuerzas representadas en la figura siguiente:



En la figura anterior se muestra la fuerza peso de cada uno ($\vec{P}_1$ y $\vec{P}_2$), junto con las fuerzas ejercidas sobre cada niño por la barra ($\vec{R}_1$ y $\vec{R}_2$). Para que se encuentren en equilibrio, deberá cumplirse que:

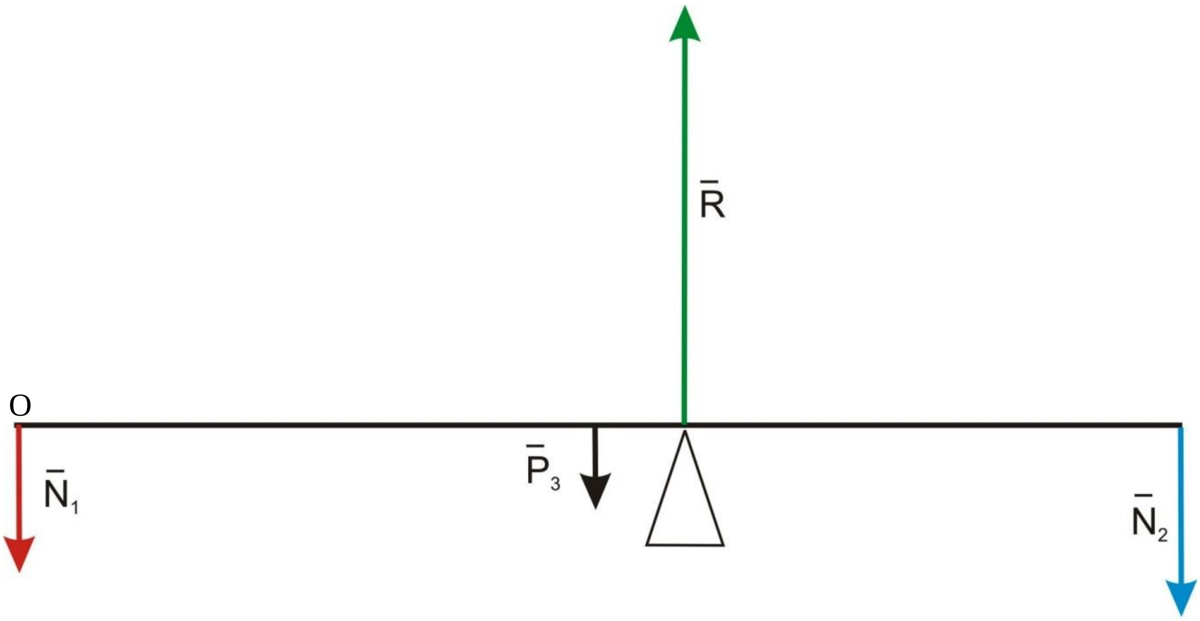
$$\vec{F}_{res1} = \vec{P}_1 + \vec{R}_1 = 0$$
$$\vec{F}_{res2} = \vec{P}_2 + \vec{R}_2 = 0$$

Y en componentes escalares:

$(0 , -P_1) + (0 , R_1) = 0 \rightarrow R_1 = P_1 = m_1 \cdot g$ (1)

$(0 , -P_2) + (0 , R_2) = 0 \rightarrow R_2 = P_2 = m_2 \cdot g$ (2)

Sobre la barra, en el equilibrio actúan las fuerzas representadas en la figura siguiente:



En la figura anterior $\vec{N}_1$ es la pareja (acción-reacción) de $\vec{R}_1$ y $\vec{N}_2$ lo es de $\vec{R}_2$ (por lo que $N_1 = R_1$ y $N_2 = R_2$). $\vec{P}_3$ es el peso de la barra y $\vec{R}$ la fuerza que el apoyo ejerce sobre la barra.

La barra debemos considerarla un cuerpo extenso, puesto que no podemos afirmar que las fuerzas actúan sobre un mismo punto de ella sin alterar la naturaleza de la situación física en estudio (como ocurría antes con cada niño). En este caso, no basta con que la suma de las fuerzas sea nula, también deberá serlo la suma de los momentos de dichas fuerzas (sea cual sea el centro de momentos que se tome). Así pues, para la barra en situación de equilibrio, se cumplirá:

$$\vec{F}_{res3} = \vec{N}_1 + \vec{P}_3 + \vec{R} + \vec{N}_2 = 0$$
$$\vec{M}_{res3} = \vec{M}_{N_1} + \vec{M}_{P_3} + \vec{M}_R + \vec{M}_{N_2} = 0$$

En componentes, la primera ecuación solo tiene componentes según OY y, por tanto, queda:

$-N_1 - P_3 + R - N_2 = 0 \rightarrow R = N_1 + N_2 + P_3 \rightarrow R = R_1 + R_2 + P_3$

Y, si tenemos en cuenta (1) y (2), podemos expresar R como: $R = (m_1+m_2+m_3)\cdot g$ (3)

En cuanto a la ecuación del momento resultante, ésta solo tiene componente según el eje OZ y si tomamos como centro de momentos el origen O (que coincide, como vemos, con el punto de aplicación de $\vec{N}_1$), tenemos:

$$0 \cdot N_1 - \frac{L}{2} \cdot P_3 + d \cdot R - L \cdot N_2 = 0 \rightarrow d = \frac{L \cdot N_2 + \frac{L}{2} \cdot P_3}{R}$$

Teniendo ahora en cuenta las ecuaciones (2) y (3) anteriores, obtenemos finalmente:

$$d = \left(\frac{2m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \right) \cdot \frac{L}{2}$$

Sustituyendo valores numéricos, con los datos del enunciado, resulta: d = 1’09 m

Análisis del resultado

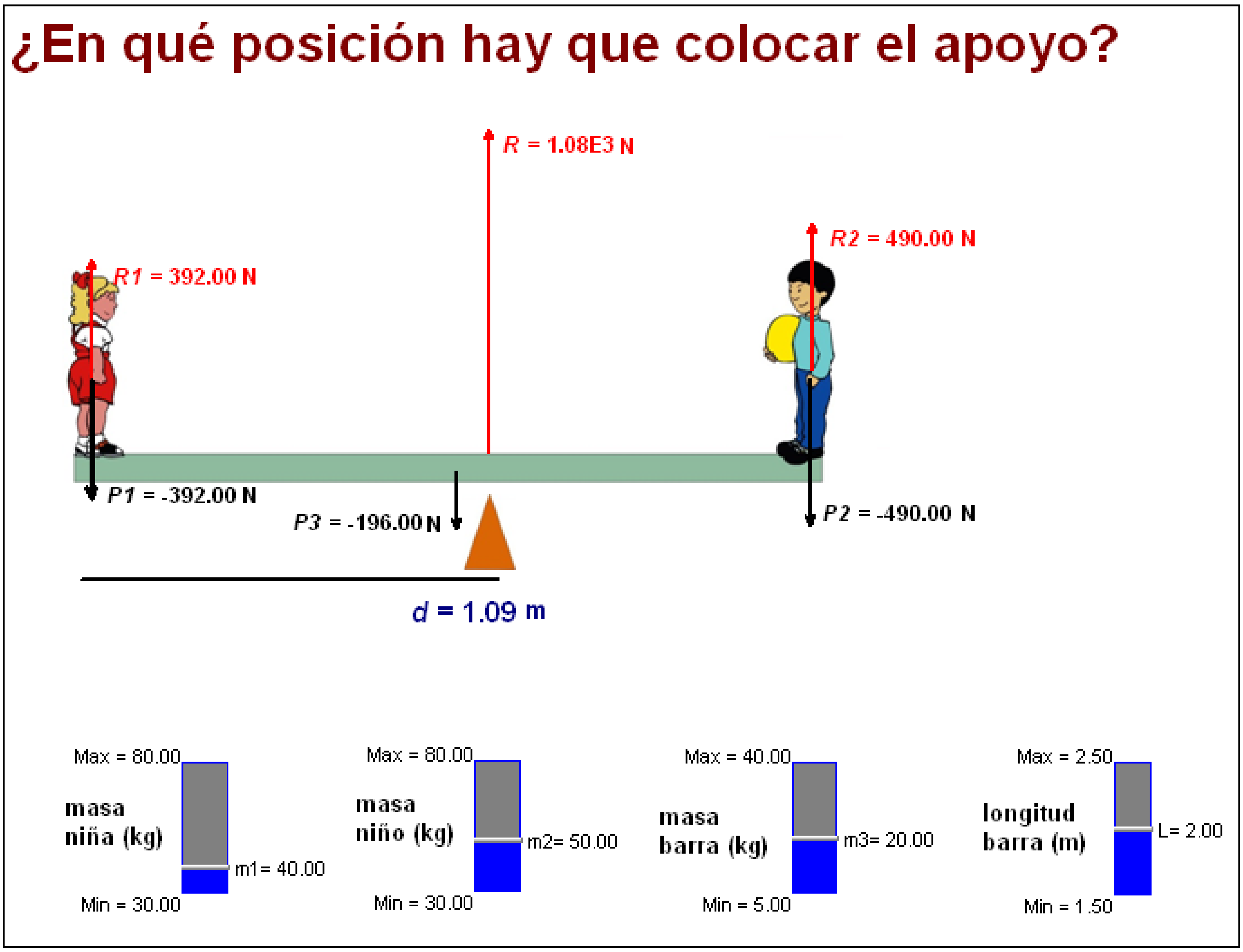
El resultado literal obtenido es dimensionalmente homogéneo (L en ambos lados) y también contempla las hipótesis de partida, así como los casos límite considerados. Por ejemplo, si se cumpliese que $m_1 = m_2 = m$, la distancia d valdría, precisamente, L/2. Además se observa que si m_2 aumenta, también lo hará d, y que lo mismo sucede con la longitud de la barra L (a igualdad de los restantes factores).

Finalmente, vemos también que el resultado confirma que la masa de la barra es un factor que se ha de tener en cuenta. Es lógico que así suceda, puesto que el peso de la barra equivale al de una tercera masa que se halle en el centro de una barra ideal de masa nula con lo que, en las condiciones imperantes en el problema, deberá ocurrir que d aumente cuanto menor sea la masa de la barra (siempre a igualdad de los restantes factores). Esto se puede comprobar fácilmente dando distintos valores numéricos a m_3 en el resultado literal.

Refuerzo

Hemos diseñado una animación *Modellus*, con la que los alumnos pueden reforzar los conceptos involucrados en este problema. Reproduce la situación, dibuja y calcula todas las fuerzas involucradas, y obtiene la solución del problema, es decir, la distancia d del punto de apoyo al origen de coordenadas, situado en la posición de la niña. En la pantalla, se dispone de cuatro controladores manuales, con los que los estudiantes pueden modificar los datos del problema: masa de la niña, masa del niño, masa de la barra y longitud de la barra y ver cómo afectan tales modificaciones a cada una de las restantes magnitudes y al resultado.

La imagen adjunta muestra el resultado cuando los datos coinciden con los que hemos usado en esta resolución.



La animación y el programa para hacerla correr están disponibles en la página “Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física”, de la Sección Local de Alicante de la RSEF http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm