Supongamos un enorme bloque de hielo flotando en medio de un pequeño lago de agua dulce a comienzos del verano. Si toda esa masa de hielo se fundiese, se puede afirmar que debido a este hecho el nivel del agua del lago (elige una de las opciones siguientes):

a) Disminuiría
b) Permanecería igual que antes
c) Aumentaría

Finalmente, justifica con el mayor detalle posible (cualitativa y cuantitativamente), la respuesta escogida. Más precisamente, suponiendo un bloque de hielo de 100m^3, calcula:

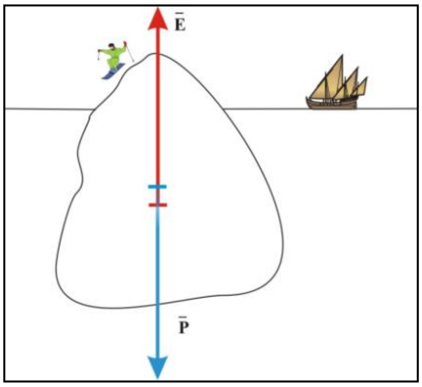
a) Los volúmenes de hielo sumergido y de hielo flotante.
b) El volumen de agua líquida que produce el bloque de hielo cuando se funde totalmente.

(Datos: Densidad del agua dulce líquida: d_a = 1000 kg/m^3, densidad del hielo: d_h = 916'8 kg/m^3)

Planteamiento

La propuesta correcta a la cuestión anterior es la b. En efecto, en este caso el volumen total de agua líquida que se genera es justamente igual al volumen de la parte sumergida del bloque de hielo y, consecuentemente, el nivel del agua del lago no debería variar por esta causa[1]. Esto es justamente lo que dice el principio de Arquímedes: "el volumen sumergido ha de ser igual al volumen de agua desalojada".

Esto es lo que habrá que demostrar cualitativa y cuantitativamente, y, a tal fin, consideraremos un bloque de hielo parcialmente sumergido y usaremos la siguiente nomenclatura: Volumen total del bloque de hielo: V_T, volumen de la parte de hielo sumergida: V_s, densidad del agua dulce líquida: d_a, densidad del hielo: d_h.



De acuerdo con el principio de Arquímedes, el empuje experimentado por el hielo es una fuerza vertical y hacia arriba, de valor igual al peso del volumen de agua que desaloja (el volumen de agua desalojada V_a coincide exactamente, como es lógico, con el volumen de hielo sumergido V_s, es decir: $V_a = V_s$).

Por otra parte, al encontrarse el bloque de hielo en equilibrio, se cumplirá que los módulos de la fuerza de empuje $\vec{E}$ y de la fuerza peso $\vec{P}$, han de ser iguales (E = P).

A partir de aquí estamos en condiciones de plantearnos cuanto valdrá el volumen de hielo sumergido V_s

Hipótesis

Teniendo en cuenta el planteamiento anterior es lógico esperar que el volumen sumergido de hielo, V_s, dependa de la densidad del hielo, d_h, de la densidad del agua del lago, d_a, y del volumen total del bloque de hielo, V_T:

[1] Naturalmente, sí podría variar por otras como la evaporación, aportes externos, dilatación del agua por aumento de la temperatura, etc.

$$V_s = f\,(d_h, d_a, V_T)$$

Concretamente, esperamos que V_s aumente cuando (a igualdad de los restantes factores):

La densidad del agua líquida del lago (d_a) disminuya
La densidad del hielo (d_h) aumente
El volumen total de todo el bloque de hielo (V_T) aumente.

También podemos imaginar algún caso límite como, por ejemplo, que si $V_T \rightarrow 0$ el volumen de parte sumergida V_s también tenderá a 0, o bien que si la densidad del hielo pudiera, hipotéticamente, aumentar hasta casi igualar a la densidad del agua líquida del lago ($d_h \rightarrow d_a$) el bloque sobresaldría cada vez menos y $V_s \rightarrow V_T$.

Estrategia de resolución y resolución

Las fuerzas que se ejercen sobre el bloque de hielo son el empuje y el peso. Ambas fuerzas dependen de los factores predichos en las hipótesis y, como el bloque de hielo flota en una posición de equilibrio estático, la resultante de ambas debe ser igual a cero. Por tanto, bastará con igualar los módulos de ambas fuerzas y despejar la magnitud buscada, V_s:

$$E = P \rightarrow V_s \cdot d_a \cdot g = V_T \cdot d_h \cdot g \rightarrow V_s = \left(\frac{d_h}{d_a}\right) \cdot V_T \quad (1)$$

Si analizamos el resultado anterior nos daremos cuenta de que no solo es dimensionalmente homogéneo (condición imprescindible para aceptarlo) sino también que en él se contemplan las hipótesis y casos límite considerados.

Y sustituyendo valores: $V_s = \left(\frac{916'8}{1000}\right) \cdot 100 \rightarrow V_s = 91'68\ m^3$

A partir de este resultado, para demostrar que el nivel del agua del lago no se altera si el hielo se funde completamente, nos planteamos:

¿Qué volumen V_a de agua líquida produce el bloque de hielo cuando se funde totalmente?

De acuerdo con el principio de conservación de la masa, está claro que aunque los volúmenes sean distintos ($V_a \neq V_h$), la masa de agua líquida (m_a) y la masa de hielo del cual procede (m_h) han de ser iguales ($m_a = m_h$). Calcularemos, pues, la masa de agua líquida y con ella y la densidad del agua líquida, el volumen de agua líquida, V_a, pedido:

$$m_a = m_h = d_h \cdot V_T \ ; \ V_a = \frac{m_a}{d_a} \rightarrow V_a = \frac{d_h \cdot V_T}{d_a} \quad (2)$$

Con las ecuaciones (1) y (2), comprobamos que $V_a = V_s$

Sustituyendo valores: $V_a = \frac{916'8 \cdot 100}{1000} = 91'68\ m^3$

Así pues, el volumen de agua líquida que produce la fusión total del hielo flotante, cuando se trata de agua dulce, coincide exactamente con el volumen de la parte sumergida de dicho hielo. Vale la pena darse cuenta de que (1) y (2) son iguales porque la densidad del agua del lago (ecuación 1) y la densidad del agua resultante de la fusión del hielo (ecuación 2), también lo son (por eso hemos utilizado para ambas el mismo símbolo, d_a).

Por tanto, en estas condiciones:

El hecho de que se funda el bloque de hielo flotante en un lago no tiene un efecto directo en el nivel del agua del lago.

A esta misma conclusión se puede llegar de forma cualitativa mediante una estrategia experimental, fácil de llevar a cabo en cualquier laboratorio escolar. Como inicio de la misma, se puede plantear a los alumnos que *propongan una posible experiencia destinada a mostrar que la fusión de hielo flotante sobre el agua dulce, no altera el nivel de la misma*. La realización de esta actividad por los alumnos distribuidos en pequeños grupos de trabajo, junto con la orientación del profesor, suele conducir a la propuesta de utilizar diversos recipientes como botellas o probetas grandes y trozos de hielo adecuados. Basta con, por ejemplo, introducir el trozo de hielo en una de tales probetas y añadir después agua líquida hasta un determinado nivel para comprobar que, una vez fundido totalmente el trozo de hielo, el nivel sigue siendo el mismo que inicialmente

Ampliación. ¿Ocurre lo mismo cuando hablamos de un gran bloque de hielo flotando en el océano?

Se trata de una pregunta muy importante, ya que si no ocurriese lo mismo y resultase que el agua generada por la fusión del bloque de hielo ocupase más volumen que la parte sumergida del bloque de hielo que la originó, tendríamos que la fusión del hielo del casquete polar ártico y de la banquisa de hielo antártica debido al calentamiento global, y al contrario de lo que piensan algunas personas[2], sí que estaría contribuyendo directamente, en alguna medida, al aumento del nivel del mar.

Y lo cierto es que tenemos razones para pensar que no es lo mismo. En efecto: el agua salada es más densa que el agua dulce, por lo que una misma masa de hielo flota más en el mar que en un lago de agua dulce. Acabamos de ver que en el caso del lago, el volumen de agua líquida generado coincide con el volumen de la parte de hielo sumergida. En el caso del mar, el volumen de agua generado será el mismo que en el caso del lago (hemos dicho que la masa de hielo es la misma en ambos), pero como el volumen de hielo sumergido en el mar es menor que en el lago, el agua líquida generada tendrá un volumen algo mayor. La diferencia entre ambos volúmenes $\Delta V = V_a - V_s$ es el volumen de agua que puede, en principio, afectar al nivel del mar contribuyendo a su elevación. Antes de proceder al tratamiento operativo que calcule la diferencia de volumen que contribuirá a dicha elevación, podemos avanzar no debe ser muy grande, ya que la diferencia entre la densidad del agua de mar y la densidad del agua dulce tampoco lo es.

Si llamamos d_{am} a la densidad del agua marina y aceptamos un valor medio de 1027 kg/m^3, calculad el volumen sumergido para un bloque de hielo cuyo volumen total sea de 100 m^3.

Teniendo en cuenta que el bloque de hielo se encuentra en equilibrio, la fuerza de empuje y el peso han de tener el mismo módulo (y sentidos contrarios), así que procediendo igual que anteriormente tenemos que:

[2] La idea alternativa más extendida es que la fusión de las banquisas de hielo ártico y antártico provocaría un gran aumento del nivel del mar. Se trata de una idea errónea que afecta a una gran parte de la población, incluso con formación científica. Frente a esto están quienes defienden la idea opuesta (muchos menos) pensando que el volumen de agua líquida resultante de la fusión ocupa el mismo volumen que la parte sumergida del hielo flotante que la originó (idea que también es errónea).

$E = P \rightarrow V_s \cdot d_{am} \cdot g = V_T \cdot d_h \cdot g \rightarrow$ $V_s = \left(\frac{d_h}{d_{am}}\right) \cdot V_T$ (3)

Y sustituyendo valores: $V_s = \left(\frac{916'8}{1027}\right) \cdot 100 \rightarrow V_s = 89'27 \text{ m}^3$

Como vemos, el hecho de que el agua de mar sea más densa que el agua dulce, implica que el volumen de hielo sumergido es menor que anteriormente (porque flota más) y, por tanto, también es menor que el volumen de agua líquida originado cuando se funde todo el bloque. Basta comparar las expresiones (2) y (3) para, sin necesidad de ningún cálculo, darse cuenta de ello. Además se ha utilizado para d_h el mismo valor que en el caso anterior (916'8 kg/m^3), sin distinguir si el bloque de hielo corresponde a un glaciar que desemboca en el mar (formado a partir de nieve caída) o bien se ha formado por congelación de agua marina (es decir, a partir de agua salada). Esta aproximación puede hacerse porque, debido a determinados procesos físicos, la densidad del hielo marino con el tiempo llega a ser prácticamente igual a la del hielo continental y cuando se funde, lo que resulta es fundamentalmente agua líquida dulce. No ocurre lo mismo con la densidad del agua marina, la cual, como sabemos, varía de unos lugares a otros.

¿En cuánto excede ahora el agua líquida producida al volumen de hielo sumergido?

Como es lógico este exceso vendrá dado por $\Delta V = V_a - V_s$

Sustituyendo V_a y V_s por sus expresiones correspondientes (2) y (3), tenemos que:

$$\Delta V = V_a - V_s = \left(\frac{d_h}{d_a}\right) \cdot V_T - \left(\frac{d_h}{d_{am}}\right) \cdot V_T$$

Y simplificando, obtenemos finalmente: $\Delta V = d_h V_T \cdot \left(\frac{1}{d_a} - \frac{1}{d_{am}}\right)$ (4)

Si analizamos el resultado obtenido, podemos darnos cuenta de que ΔV será nulo cuando las densidades del agua resultante de la fusión del hielo y del líquido en el que se encuentra flotando dicho hielo sean iguales (como ocurre, de hecho, cuando el hielo se encuentra en un lago de agua dulce). Si se trata de un bloque de hielo flotando en el mar, como $d_{am} > d_a$ ocurrirá que $\Delta V > 0$ y ese ΔV es el que incide en el nivel del agua aumentándolo.

Si sustituimos los valores numéricos pertinentes en la expresión (4), obtenemos:

$$\Delta V = 2'41 \text{ m}^3$$

A este mismo resultado numérico, podríamos haber llegado directamente sin más que tener en cuenta que el bloque de hielo marino de 100 m^3 de volumen genera, al fundirse totalmente, un determinado volumen de agua líquida, independientemente de cómo se haya originado o de dónde se encuentre. Como ese volumen ya se calculó anteriormente y era de 91'68 m^3, basta una simple resta para obtener el ΔV buscado:

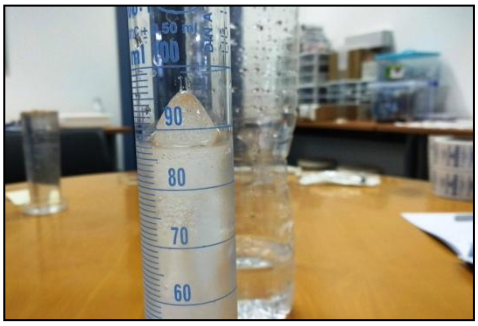
$$\Delta V_a = 91'68 - 89'27 = 2'41 \text{ m}^3$$

Esta pequeña diferencia, insistimos, sí que afecta al aumento del nivel del mar, aunque muchísimo menos que si se tratase de agua líquida procedente de un bloque de hielo continental. En efecto, acabamos de ver que 100 m^3 de hielo continental producen 91'68 m^3 de agua líquida y que toda esa agua al ser vertida en el mar actúa directamente aumentando el nivel de este, mientras que del mismo volumen de hielo flotante, al fundirse totalmente, solo 2’41 m^3 del agua líquida generada, inciden en el nivel del mar (el resto, hasta 91’68 m^3, ocupa el mismo volumen que ocupaba la parte sumergida del hielo).

En conclusión: En términos de aumento del nivel del mar, la fusión de cada m^3 de hielo flotante equivale a un aporte extra de 0’0241 m^3 de agua.

Otra posible estrategia para resolver este problema es optar por la vía experimental. Ello, además, es una forma de someter a prueba el resultado obtenido teóricamente. Al igual que en el caso anterior, se puede recurrir a la utilización de botellas de plástico o probetas grandes y trozos de hielo adecuados. Sin embargo aquí, en lugar de utilizar agua líquida dulce, se utiliza una disolución saturada de sal en agua. Obviamente, su densidad no es la misma que la del agua de mar, pero el experimento sirve igualmente para comprobar que al introducir un trozo de hielo en una probeta grande y después añadir el agua salada hasta alcanzar un nivel determinado, una vez completada la fusión del hielo, el nivel del líquido, al contrario que en la experiencia anterior, no es el mismo que inicialmente sino que ha aumentado.

En nuestro caso, hemos utilizado una probeta de 100 ml (sensibilidad = 1 ml), en la que se introdujo un bloque cilíndrico de hielo de 28’87 g de masa (previamente fabricado con agua destilada) e inmediatamente después se vertió parte de una disolución saturada de sal común en agua destilada (densidad 1’18 g/ml) hasta enrasar a 85 ml. Una vez fundido totalmente el hielo, se volvió a medir el volumen de agua salada resultante en el interior de la probeta, el cual resultó ser de 89 ml, lo que supone un aumento de volumen ΔV = 4 ml.



Introduciendo los datos experimentales en la ecuación 4 anterior:

$$\Delta V = d_h V_T \cdot \left(\frac{1}{d_a} - \frac{1}{d_{am}} \right) = 28'87 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1'18} \right) = 4'4 \text{ ml}$$

Calculando la impresión absoluta correspondiente, se obtiene ε (ΔV) = ± 0’5 ml, con lo que: ΔV = 4’4 ± 0’5 ml. Es decir, el resultado experimental (4 ml) está dentro del intervalo del resultado teórico (4’4 ml).

Perspectivas abiertas:

Podemos preguntarnos ahora, por la intensidad de este efecto. Para ello, puede ser útil situarnos en un escenario hipotético en el que se fundiese totalmente todo el hielo existente en el planeta, tanto continental como hielo marino flotante. Se pueden plantear las siguientes actividades:

Buscad los datos pertinentes y analizad cada caso (fusión del hielo continental y fusión del hielo marino) por separado, cuantificando y comparando la elevación del mar que se produciría.

Como punto de partida, también se pueden aceptar como válidos los valores medios que se dan en la tabla 2 siguiente, aunque no correspondan con los valores reales actuales (muy posiblemente, menores).

Hielo		Volumen (km^3)	% del total
Continental	Marino flotante		
Glaciares		87000	0’29
Groenlandia		2980000	9’95
Antártida		262777000	87’74
	Casquete ártico	20000	0’07
	Banquisa antártica	585500	1’95

A partir de la tabla anterior, calculad el volumen total de hielo continental total y el volumen total de hielo flotante existentes en el planeta para el periodo correspondiente a los datos de dicha tabla.

Simplemente sumando los datos correspondientes, se obtiene:

Volumen total de hielo continental ≈ 29’3·10^6 km^3

Pero si lo que nos interesa es el volumen de hielo continental realmente capaz de producir un aumento del nivel del mar cuando se funda, conviene tener en cuenta que en la Antártida hay unos 2’5·10^6 km^3 de hielo situados por debajo del nivel del mar y que, por tanto, su fusión no afectaría al nivel del agua marina. Restando, pues, este volumen del total, obtenemos que:

Volumen total de hielo continental efectivo = 29’3·10^6 - 2’5·10^6 = 26’8·10^6 km^3
Sumando también los datos correspondientes, se obtiene:
Volumen total de hielo flotante ≈ 605500 km^3

Teniendo en cuenta los dos últimos resultados numéricos obtenidos y admitiendo que la superficie estimada de los océanos y mares del planeta es de unos 360·10^6 km^2, calculad el aumento (en metros) que se produciría en el nivel del mar si todo el hielo continental se fundiese completamente y el agua líquida originada acabase en el mar. ¿Y si todo el hielo flotante en el mar se fundiese?

En cuanto al hielo continental (situado sobre tierra), basta aplicar la expresión (2) anteriormente deducida para obtener el volumen de agua que se produciría:

$$V_a = \frac{d_h \cdot V_T}{d_a} = \left(\frac{916'8}{1000}\right) \cdot 26'8 \cdot 10^6 = 24'57 \cdot 10^6 \ km^3$$

Utilizando ahora la expresión matemática que relaciona el volumen V con la superficie S y la altura h, se obtiene:

V = S·h → h= V/S → h = 24’57·10^6/360·10^6 = 0’06825 km = 68’25 m

Si tenemos en cuenta la imprecisión de las medidas, podemos situar dicho aumento, entre 60 y 70 m por encima del nivel actual.

Como la superficie marina no es la base de ningún cilindro, todo ese aumento de nivel haría que el agua del mar se adentrase kilómetros en todos los continentes, cambiando totalmente la configuración de los mapas. Naturalmente, hemos considerado un proceso hipotético, pero conviene no olvidar que el hielo continental, a consecuencia del calentamiento global, se está fundiendo y que eso ya está contribuyendo de forma importante al aumento del nivel del mar (que ha sido de unos 19 cm en los últimos 100 años) y a la disminución de su salinidad, ambas cosas de muy graves consecuencias para toda la humanidad y la biodiversidad en general.

Aplicando la misma expresión (2) pero con los datos relativos al hielo marino flotante:

$$V_a = \frac{d_h \cdot V_T}{d_a} = \left(\frac{916'8}{1000}\right) \cdot 605.500 = 555.122'4 \ km^3 \text{ de agua líquida}$$

Pero, según hemos visto anteriormente, ahora, a diferencia del hielo terrestre, solo una pequeña fracción de esta agua incide en el aumento del nivel del mar. Concretamente, 0’0241 m^3 de agua líquida por cada 1 m^3

de hielo marino flotante que se funda totalmente (equivalente a 0’0241 km^3 por cada 1 km^3). Teniendo esto en cuenta, obtenemos:

$\Delta V = 605.500 \cdot 0'0241 \approx 14\ 592'55\ km^3$

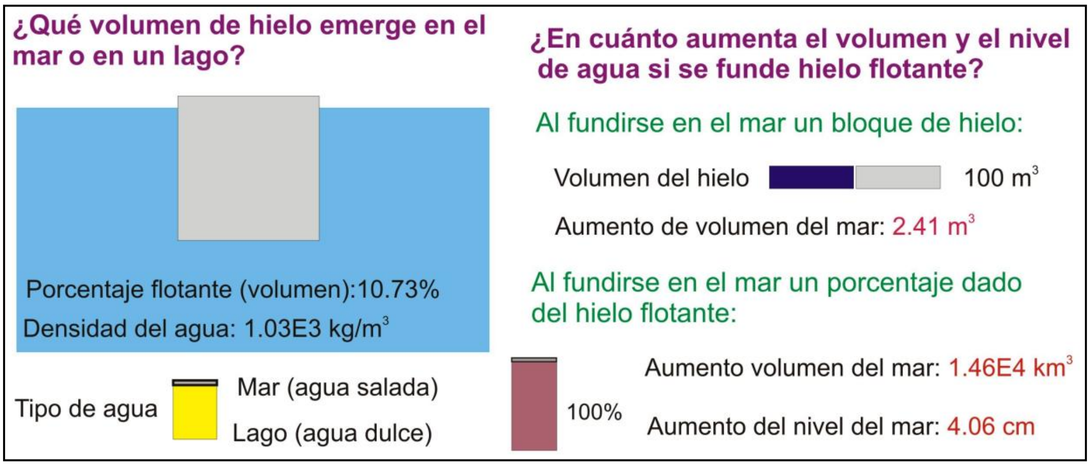
Con lo que $h = V/S = 4'05 \cdot 10^{-5}$ km $\approx$ 4 cm

Vemos, pues, que la subida del nivel del mar ocasionada directamente por la fusión de todo el hielo flotante (cualquiera que sea su origen) existente en un momento dado, se puede considerar despreciable si la comparamos con la subida ocasionada por la fusión del hielo continental asentado en tierra, por lo que, en lo que se refiere al calentamiento global, es perfectamente lícito ignorar la contribución directa de la fusión del hielo flotante al aumento del nivel del mar. No podemos ignorar, en cambio, su contribución indirecta, ya que, por ejemplo, la disminución progresiva de la superficie de ese enorme escudo protector que constituye el hielo flotante del Ártico, el cual refleja al espacio una gran parte de las radiaciones solares que llegan a la zona, además de otras consecuencias, hace que el agua se caliente más y, por tanto, se expanda, y esa dilatación térmica sí que incide notablemente en el aumento del nivel del mar.

Refuerzo

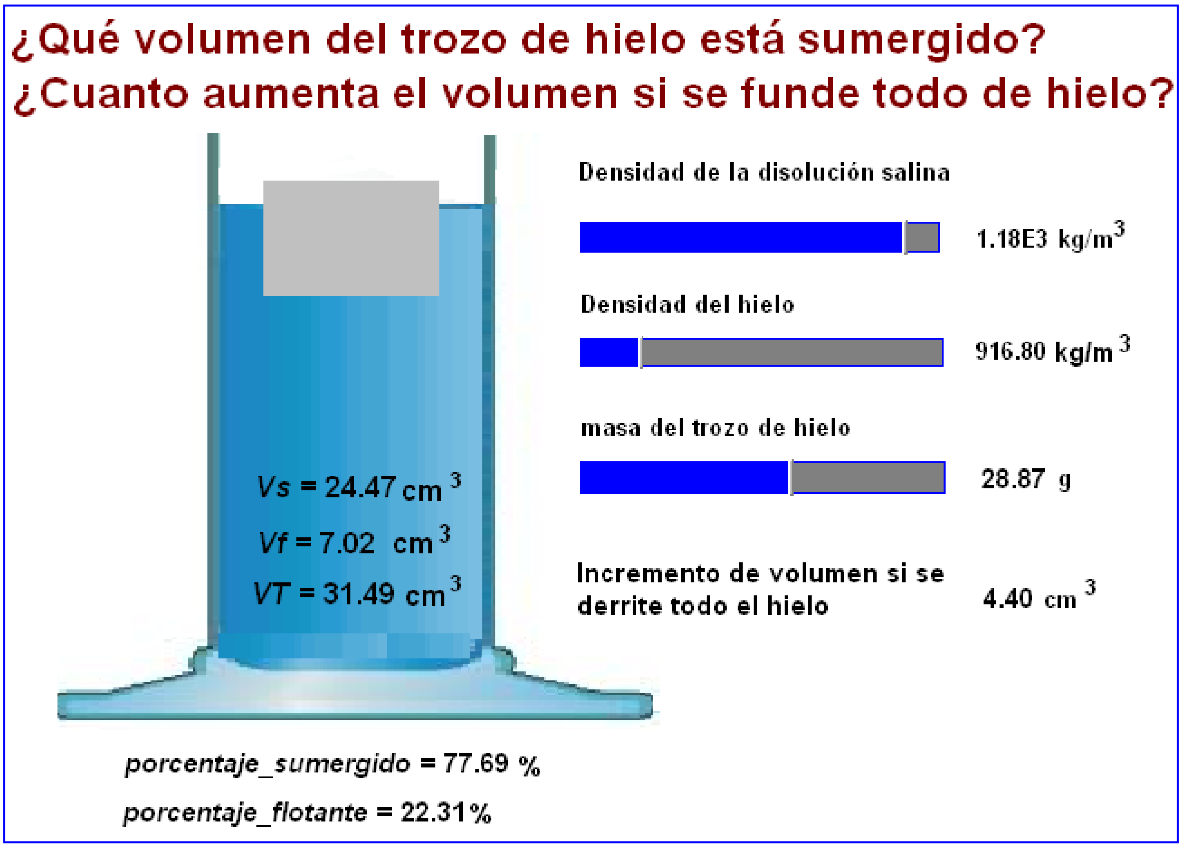
Para reforzar varios de los conceptos involucrados en este problema hemos creado dos animaciones interactivas *Modellus*.

En una de ellas, se representa en la pantalla un bloque de hielo flotando sobre una masa de agua. Los alumnos pueden usar un controlador manual para elegir entre agua marina y agua dulce, y otro para fijar el volumen total inicial del bloque de hielo flotante. La animación calcula y representa el porcentaje de hielo flotante, junto con el aumento del volumen de agua líquida que se produciría si se fundiera totalmente dicho bloque. Finalmente, la animación también permite obtener el incremento en el volumen y en el nivel del mar que tendría lugar si fundiera un porcentaje (que se puede determinar usando un tercer controlador manual) de todo el hielo flotante actual. La figura siguiente muestra los resultados cuando se adoptan los datos que se han usado en el problema:



La segunda animación, remite a la estrategia de resolución del problema por vía experimental. Representa un trozo de hielo flotante en una probeta llena de una disolución salina, y se pueden usar tres controladores manuales para modificar la densidad de la disolución, la masa del pedazo de hielo y la propia densidad del hielo. Además de calcular los porcentajes y los volúmenes de hielo flotante y sumergido, la animación también obtiene el incremento volumen que se produciría en la probeta si se derritiera el pedazo de hielo.

Los alumnos pueden realizar con esta segunda animación varias actividades interesantes e instructivas. Por ejemplo: pueden comprobar que al modificar la masa del pedazo de hielo flotante, éste permanece con el mismo grado de hundimiento (en este caso no cambian los porcentajes de hielo sumergido y flotante, aunque sí obviamente, el volumen de ambos); pueden probar casos límite como, por ejemplo, el que se obtiene al igualar las densidades del agua y del hielo (el bloque se sumerge completamente); y, por supuesto, también pueden comparar el resultado teórico del ascenso del nivel del agua que se ha de producir si se derrite todo el hielo, con el obtenido en el laboratorio, como muestra la siguiente imagen.



Las dos animaciones y el programa para hacerlas correr están disponibles en la página "Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física", de la Sección Local de Alicante de la RSEF http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm