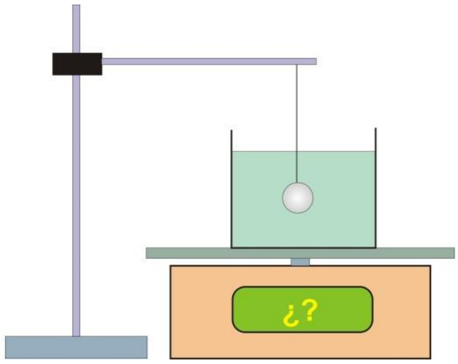
Sobre una balanza electrónica se coloca un recipiente con agua para, a continuación, introducir una bola de acero que cuelga mediante un hilo de un soporte fijo, tal y como se muestra en la figura.



En la situación descrita, la balanza marcará (señalad la propuesta que se estime más correcta):

a) Más que antes de introducir la bola
b) Igual que antes de introducir la bola
c) Menos que antes de introducir la bola

Una vez contestada la cuestión anterior, proceded a resolver el problema siguiente y utilizad el resultado obtenido para confirmar o cambiar vuestra respuesta.

Sobre una balanza electrónica se coloca un recipiente con agua, observando que la balanza señala entonces 264 g. Una vez hecho esto, se introduce en el agua una bola de 1'25 cm de radio y una masa de 64'5 g que cuelga mediante un hilo de un soporte fijo, tal y como se muestra en la figura anterior. Se pide:

En la situación descrita ¿qué marcará la balanza?
(Datos: densidad del agua $d_a = 1 g/cm^3$, $g = 9'81$ N/kg).

Planteamiento cualitativo

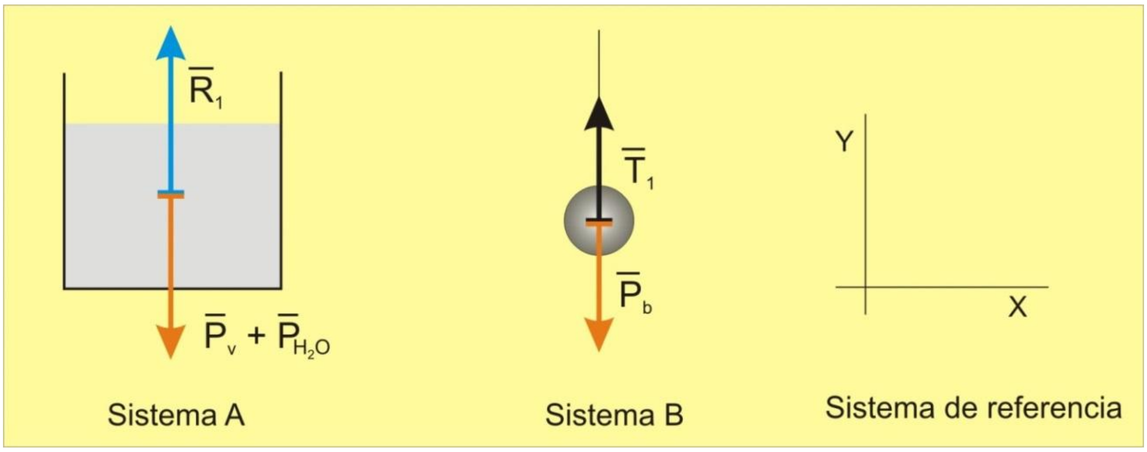
Para poder resolver la cuestión planteada hemos de reflexionar antes acerca de si por el hecho de introducir la bola en el vaso con agua, varía de alguna forma la fuerza vertical y hacia abajo que se ejerce sobre el plato de la balanza. En principio podríamos tener la tentación de pensar que no, dado que la bola está sujeta por el hilo. Pero, si analizamos la situación con cuidado hemos de concluir que sí varía al tener en cuenta que, al sumergir la bola en el agua, de acuerdo con el Principio de Arquímedes, comienza a actuar sobre ella una fuerza de empuje $\vec{E}$ hacia arriba. Dicha fuerza no afecta directamente a la fuerza normal que el conjunto vaso-agua ejerce sobre el plato de la balanza; no obstante, no podemos olvidar que, de acuerdo con el principio de acción-reacción, las fuerzas siempre se ejercen por parejas, de modo que, al igual que el agua empuja a la bola hacia arriba, la bola empujará simultáneamente al agua hacia abajo con una fuerza $\vec{E}'$ del mismo valor pero de sentido contrario. La presencia de la fuerza $\vec{E}'$ modificará el valor de la fuerza total (vertical y de sentido descendente) que se ejerce sobre el plato de la báscula. Por tanto, la magnitud buscada será la variación producida en esta fuerza, ya que su módulo tendrá un valor más alto después de haber sumergido la bola.

El problema queda pues precisado como:

¿En cuánto se incrementa la fuerza normal que se ejerce sobre el plato de la balanza una vez que hemos introducido la bola totalmente en el agua?

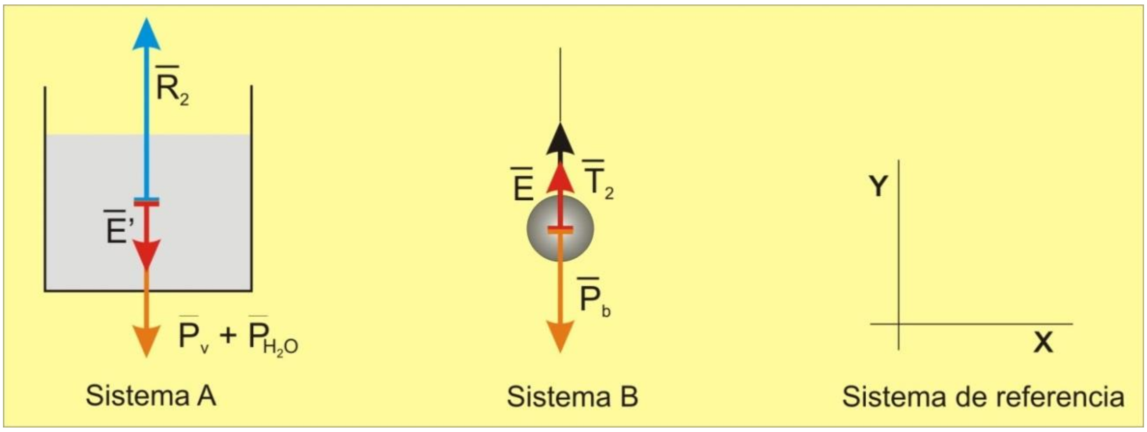
Para una resolución rigurosa del problema conviene analizar, en primer lugar, todas las fuerzas que actúan en cada caso, con objeto de comparar la fuerza normal que se ejerce sobre el plato de la balanza antes y después de sumergir totalmente la bola en el agua. Para ello consideraremos como sistema "**A**" el conjunto agua-vaso y como sistema **"B"** la bola. Supondremos que el hilo del que cuelga la bola es inextensible y de masa despreciable y trabajaremos en un sistema de coordenadas cartesianas en el plano. En los esquemas siguientes se han representado las fuerzas que actúan sobre ambos sistemas, antes (1) y después (2) de introducir la bola en el agua:

Esquema 1: Fuerzas antes de sumergir la bola en el agua



En el esquema anterior, $\vec{P}_b$ representa el peso de la bola, $\vec{P}_v$ el peso del vaso, $\vec{P}_{H_2O}$ el peso del agua, $\vec{T}_1$ la tensión del hilo del que cuelga la bola y $\vec{R}_1$ la fuerza que ejerce el plato de la balanza sobre el vaso (igual y de sentido contrario a la fuerza $\vec{N}_1$ que ejerce el vaso sobre el plato de la balanza y que no se ha representado en el esquema).

Esquema 2: Fuerzas después de sumergir la bola en el agua



En este segundo esquema $\vec{R}_2$ representa la fuerza vertical y hacia arriba que ejerce el plato de la balanza sobre el vaso **después** de haber introducido la bola (igual y de sentido contrario a la fuerza $\vec{N}_2$ que ejerce el vaso sobre el plato de la balanza y que no se ha representado en el esquema). Como podemos ver, aparece también una nueva fuerza que no existía en el anterior esquema, antes de introducir la bola dentro del vaso con agua. Se trata de la fuerza de empuje que, de acuerdo con el Principio de Arquímedes, actúa sobre la bola sumergida empujándola hacia arriba y que hemos designado como $\vec{E}$. Dicha fuerza tiene su correspondiente pareja (acción-reacción) en otra fuerza del mismo módulo pero de sentido contrario a ella, que actúa sobre el agua y que hemos designado como $\vec{E}\,'$.

A la derecha de ambos esquemas hemos incluido también el sistema de referencia de coordenadas cartesianas con el que vamos a trabajar durante todo el ejercicio.

Resolver este ejercicio supone comprender previamente que lo que indica la balanza viene determinado por el valor de la fuerza $\vec{N}$ que se ejerce sobre el plato de la misma hacia abajo. Esta fuerza no hay que confundirla con el peso de lo que hay sobre dicho plato (aunque su valor numérico pueda coincidir en muchos casos) y, de acuerdo con el principio de acción-reacción, su módulo será siempre igual al de la fuerza hacia arriba $\vec{R}$ que ejerce el plato sobre el vaso. Por tanto, una forma de resolver el problema planteado será determinar los valores (módulo) de $\vec{R}$ en las dos situaciones planteadas, que designaremos como R_1 (antes de introducir la bola) y R_2 (después de introducir la bola) para compararlos.

Hipótesis

Puesto que hemos planteado que la diferencia en la lectura de la balanza se ha de deber a la existencia de la fuerza de empuje, hemos de usar el principio de Arquímedes y considerar que la variación producida en la fuerza que se ejerce sobre el plato de la balanza dependerá de los factores que determinan el valor de dicho empuje, es decir: el radio r de la bola, la densidad d_a del agua, y la gravedad, g.

Más concretamente:

- ✓ El valor del empuje (y el de la correspondiente lectura de la balanza) aumentará en el caso de que (a igualdad de los restantes factores), aumente el radio de la bola, r, ya que dicho aumento supone un aumento del volumen de la bola, V_b, que, como sabemos, al estar totalmente sumergida, será igual al volumen de agua desalojada.

- ✓ Del mismo modo, si varía la densidad del agua, d_a, (podríamos, por ejemplo, sustituir agua dulce por agua salada, o, más en general, por cualquier otro líquido), el resultado del problema también debe variar. Si d_a aumenta se incrementará el valor de la lectura y si d_a disminuye, disminuirá dicho valor.

- ✓ Finalmente, si aumentase el valor de la gravedad también debería aumentar el valor del empuje (puesto que aumentaría el peso del agua desalojada) y el correspondiente incremento en el valor de la lectura de la balanza.

El resultado también debería contemplar algún caso límite evidente como, por ejemplo, que si el radio de la bola tiende a 0, lo mismo deberá ocurrir con el empuje y la lectura de la balanza sería cada vez más parecida a la inicial (antes de introducir la bola).

Conviene tener en cuenta que en la situación descrita, la masa de la bola, m_b, no debe influir en el resultado. Y ello por dos razones: En primer lugar, porque (a igualdad de los demás factores) ninguna modificación del valor de dicha masa afectará al peso del agua desalojada por la bola (y, por tanto, tampoco afectará al empuje). En segundo lugar, porque la bola pende de un hilo sujeto a un soporte exterior y, por ello, es indiferente que pese más o pese menos, puesto que no descansa sobre ninguna parte del recipiente. Ahora bien, en el caso extremo en que la masa de la bola fuera cero, la situación cambiaría radicalmente, ya que hacer $m_b = 0$ significa eliminar la bola y por tanto, eliminar también su volumen. Así pues, si $m_b = 0$, ha de ser también $V_b = 0$ y, por tanto, $\vec{E}' = 0$

Estrategias de resolución y resolución

Tanto antes como después de sumergir la bola en el agua, los dos sistemas A y B considerados (véase esquemas anteriores) se encuentran en equilibrio. Por tanto, se cumplirá que la fuerza resultante sobre cada uno de dichos sistemas es nula. Podemos, pues, aplicar esa condición de equilibrio antes y después de introducir la bola, para tratar de hallar los valores de R_1 y R_2 que buscamos.

Otra posible estrategia para resolver este problema es optar por la vía experimental. En este caso, es posible realizar una contrastación experimental de forma rápida y sencilla en la propia aula. Basta con utilizar una balanza electrónica y realizar el montaje que se muestra en el mismo enunciado, para apreciar (y medir) el aumento que señala la balanza en cuanto se introduce la bola dentro del agua.

De acuerdo con la primera de las estrategias de resolución propuestas, en el equilibrio, **antes** de introducir la bola (ved esquema 1), tendremos:

Sistema A: $\vec{F}_{res\,A} = \vec{P}_v + \vec{P}_{H_2O} + \vec{R}_1 = 0$

Sistema B: $\vec{F}_{res\,B} = \vec{P}_b + \vec{T}_1 = 0$

Dado que todas las fuerzas se ejercen en la vertical, podemos trabajar únicamente con las componentes escalares según el eje Y de los vectores correspondientes, con lo que las ecuaciones anteriores quedan como:

Sistema A: $-P_v - P_{H_2O} + R_1 = 0 \rightarrow \boxed{R_1 = P_v + P_{H_2O}}$ (1)

Sistema B: $-P_b + T_1 = 0 \rightarrow T_1 = P_b$ (2)

Ahora seguiremos la misma estrategia para determinar el valor de $\vec{R}_2$. En el equilibrio, después de sumergir totalmente la bola colgada del hilo (ved esquema 2), tendremos:

Sistema A: $\vec{F}_{res\,A} = \vec{P}_v + \vec{P}_{H_2O} + \vec{R}_2 + \vec{E}' = 0$

Sistema B: $\vec{F}_{res\,B} = \vec{P}_b + \vec{T}_2 + \vec{E} = 0$

Y en componentes:

Sistema A: $-P_v - P_{H_2O} + R_2 - E' = 0 \rightarrow \boxed{R_2 = P_v + P_{H_2O} + E'}$ (3)

Sistema B: $-P_b + T_2 + E = 0 \rightarrow T_2 = P_b - E$ (4)

Teniendo en cuenta (1), la ecuación (3) queda como: $\boxed{R_2 = R_1 + E'}$ (5)

Por tanto, concluimos que, tal y como habíamos pensado, después de introducir la bola en el agua, la balanza señalará un valor más alto que antes de introducirla y que la diferencia es justamente igual al valor del empuje sobre la bola.

Estamos ahora en condiciones de obtener el valor de R_2, que es lo que se nos pide el enunciado. Dado que conocemos R_1 (es un dato del enunciado) y que sabemos que E' = E, obtener R_2 pasa por determinar el valor de la fuerza de empuje E que el agua ejerce sobre la bola. Como E coincide con el peso del agua desalojada por la bola, utilizaremos esta igualdad (en módulos de fuerzas) para obtener dicho valor:

$$E = P_{ad} = d_a \cdot V_{ad} \cdot g \rightarrow E = d_a \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot g$$

Si tenemos en cuenta que E = E', la ecuación (5) queda como:

$$R_2 = R_1 + d_a \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot g$$

Sustituyendo ahora los valores propuestos por el enunciado (en unidades internacionales), se obtiene:

$$R_2 = 2.59 + 0.08 = 2.67 \text{ N}$$

Lo que implica una nueva lectura (en gramos) de 272.45 en lugar de los 264 que indicaba la balanza antes de sumergir la bola.

Análisis del resultado y perspectivas abiertas

Es fácil ver que la expresión literal obtenida contempla todas las hipótesis consideradas y, además, es dimensionalmente homogénea (F en ambos lados).

Como ya se indicó anteriormente, R_2 coincide con el valor de N_2 o fuerza normal que se ejerce sobre el plato de la balanza (no representada en el esquema), que es la fuerza que realmente mide la balanza. Así, pues, el hecho de introducir la bola en la forma que se muestra en el enunciado, implica que la balanza señale inmediatamente una fuerza mayor que antes, siendo el aumento producido justamente igual al valor del empuje sobre la bola.

Perspectivas abiertas

En este problema, se ha reforzado la idea de que la balanza electrónica realmente no indica ni el peso ni la masa del objeto que se coloca encima de su plato, sino la fuerza normal ejercida por la base de este. No obstante, en la mayoría de situaciones cotidianas, el valor (módulo) de dicha fuerza normal, coincide con el de la fuerza peso y, por este motivo, las balanzas suelen calibrarse de forma que se puede leer directamente la masa del objeto. Podemos reforzar aún más esta idea, mostrando otras situaciones en las que ocurra lo mismo que aquí, es decir, en las que la lectura de la balanza no coincida con el peso. Por ejemplo, se puede plantear el uso de una balanza dentro de un ascensor, ya que ésta no indicará el peso si se efectúa la medida cuando dicho ascensor comienza a descender o cuando frena para pararse (sólo lo hará mientras el ascensor esté descendiendo con velocidad constante, que es la única de las tres situaciones en la que el valor de la fuerza normal sobre la balanza coincide con el valor del peso de la persona u otro objeto que se coloque encima de ella).

Otras posibles cuestiones a plantearse son:

¿Qué ocurre con la tensión del hilo?

Si comparamos la ecuación (4) con la (2), vemos que el hilo está menos tenso y que la diferencia es justamente el valor de la fuerza de empuje.

¿Qué ocurre si se rompe el hilo y la bola queda en reposo en el fondo del vaso? ¿Qué marcaría entonces la balanza?

Si consideramos ahora como único sistema el vaso junto con el agua y la bola sobre el fondo y que dicho sistema se encuentra en equilibrio, podemos expresar la fuerza resultante sobre el mismo como:

$$\vec{F}_{res} = \vec{P}_v + \vec{P}_{H_2O} + \vec{P}_b + \vec{E} + \vec{E}' + \vec{R} = 0$$

En la ecuación anterior, $\vec{R}$ representa la fuerza normal que el plato de la balanza ejerce sobre el vaso (igual y de sentido contrario a la que realmente buscamos). Dado que todos los vectores se encuentran sobre el eje Y de coordenadas, podemos trabajar con esta única componente, con lo que, teniendo en cuenta que las fuerzas E y E' son iguales y de sentido contrario, la ecuación anterior se puede expresar como:

$$-P_v - P_{H_2O} - P_b + R = 0$$

Y despejando, obtenemos $R = P_v + P_{H_2O} + P_b$ Teniendo en cuenta que:

$P_b = m_b \cdot g = 64'5 \cdot 10^{-3} \cdot 9'81 = 0'63$ N, y que $P_v + P_{H_2O} = R_1 = 2'59$ N podemos sustituir estos valores y obtener finalmente: R = 2'59 + 0'63 = 3'22 N. Como puede verse, un valor más alto que cuando la bola pendía del hilo.

En esta situación, la fuerza normal ejercida sobre el plato de la balanza sí que coincide numéricamente con el peso de lo que hay encima de ella, pero, naturalmente, siguen siendo fuerzas distintas, que responden a interacciones distintas y que se ejercen sobre cuerpos distintos.

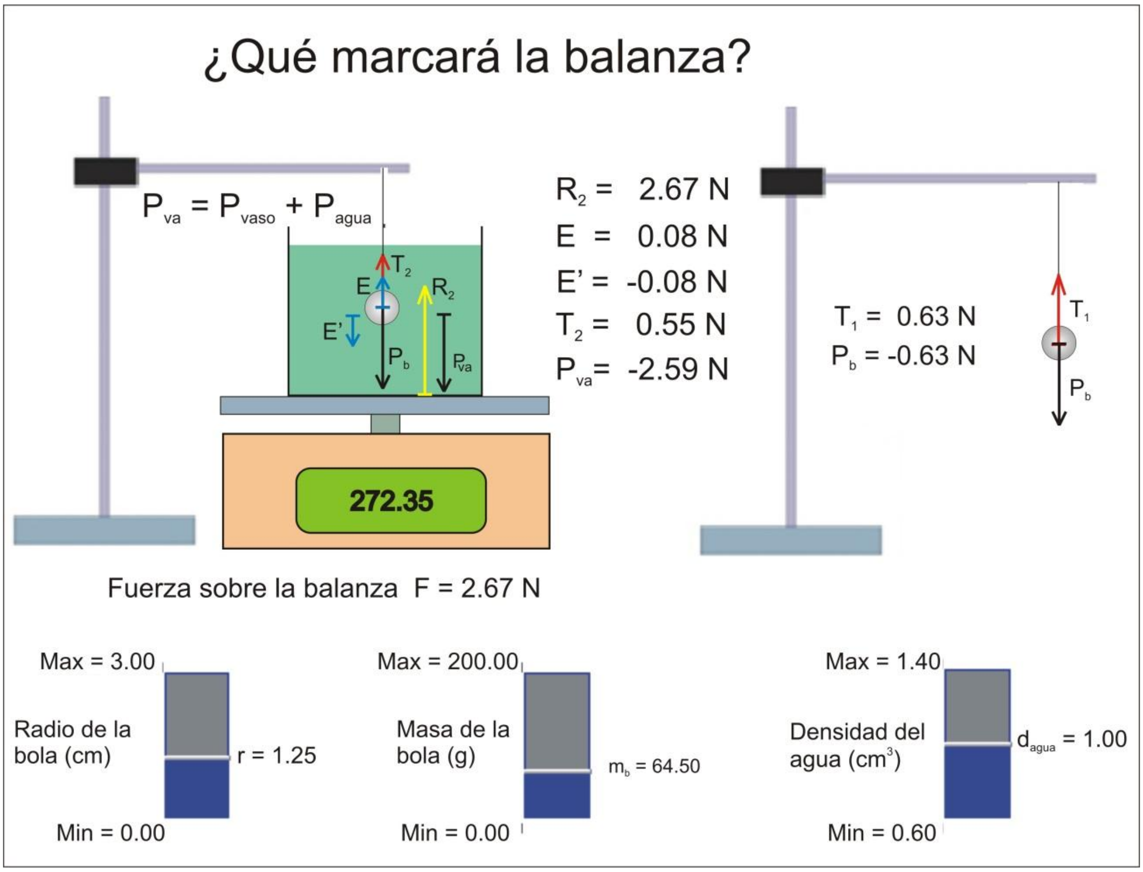
Refuerzo

Refuerzo

Para reforzar algunos de los conceptos involucrados en este problema hemos creado una animación *Modellus*. En la pantalla se muestra el montaje, incluyendo la lectura de la balanza (en gramos).

La animación es interactiva, de tal forma que los alumnos pueden modificar cualquiera de los parámetros del problema entrando en la ventana de las condiciones iniciales. Adicionalmente disponen en la propia pantalla de tres controladores manuales para modificar ahí directamente, si lo desean, el radio de la bola, la densidad del agua y la masa de la bola. Al intervenir sobre estos parámetros, pueden poner a prueba sus hipótesis y los casos límite. Por ejemplo: pueden constatar que si modifican la masa de la bola, no se altera la lectura de la balanza (pero sí el peso de la bola y la tensión del hilo). En cambio, si modifican la densidad del agua y/o el radio de la bola, constatarán que sí se altera la lectura de la balanza. El profesor les puede pedir que, antes de manipular la animación, adelanten estos resultados en términos cualitativos. También se pueden considerar otras situaciones interesantes e instructivas. Por ejemplo, se puede hacer que disminuya paulatinamente el radio de la bola, lo que equivale a hacer que también lo haga la fuerza de empuje y que, por tanto, se tienda a que no haya una diferencia de lecturas, por estar el cuerpo sumergido; también se pueden introducir datos reales, obtenidos experimentalmente, etc.

La imagen siguiente corresponde a la situación planteada con los datos del enunciado.



La animación y el programa para hacerla correr están disponibles en la página "Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física", de la Sección Local de Alicante de la RSEF
http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm