Se quiere lanzar un cohete al espacio. ¿Con qué velocidad inicial mínima habría que lanzarlo para que no volviese a caer a la Tierra?

Planteamiento cualitativo

Una primera aproximación consiste en admitir que, en la situación planteada, la Tierra se comporta como una masa puntual "M" situada en su centro (lo que conlleva considerarla esférica). En ese caso, se puede referir el movimiento del proyectil a ese punto. Aunque el movimiento de traslación de la Tierra no es rectilíneo ni uniforme, esta aproximación es razonable porque la aceleración de dicho punto es muy pequeña comparada con la aceleración inicial del proyectil.

Para simplificar más el problema, los estudiantes proponen suponer que el proyectil se lanza en dirección vertical y que sobre él solo actúa la fuerza de atracción gravitatoria que le ejerce la Tierra. Ello implica no tener en cuenta la influencia de la fuerza de rozamiento, aunque su efecto es importante en el tramo inicial del movimiento (mientras el proyectil atraviesa la atmósfera terrestre) y aceptar que el proyectil no lleva ningún tipo de motor ni sistema que le empuje. También implica despreciar las fuerzas que le ejercen otros objetos del Cosmos, lo cual es razonable porque estas fuerzas son muy débiles al estar dichos objetos mucho más distantes que la Tierra.

Es necesario que el planteamiento se apoye sobre un esquema gráfico apropiado (Figura 1), que ayuda a visualizar el hecho de que, aceptando todas las condiciones anteriores, la trayectoria del proyectil será rectilínea y vertical, porque la fuerza, $\vec{F}$, que se ejerce sobre él es una fuerza en la dirección de $\vec{r}$ y dirigida siempre hacia el origen "O" del sistema de referencia.

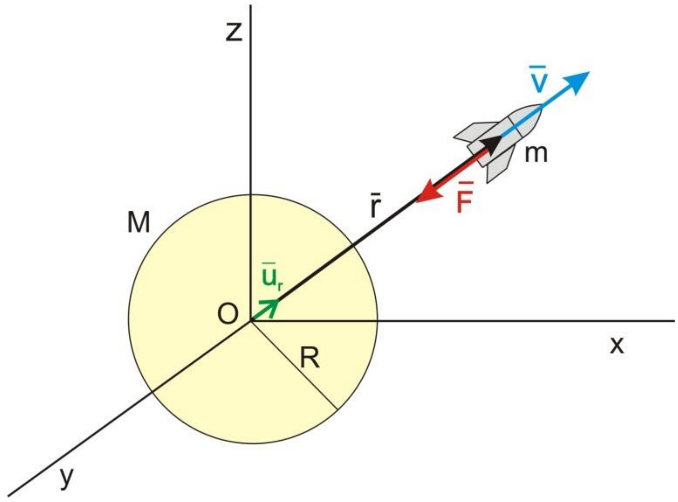

Figura 1: Esquema gráfico elaborado en el planteamiento del problema

Operativización

Dicha fuerza[1] la podremos calcular, aplicando la expresión vectorial de la ley de gravitación universal:

$$\mathbf{F} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} \cdot \mathbf{u_r} \quad (1)$$

Donde G es la constante de gravitación universal, M la masa de la Tierra, m la masa del proyectil, r la distancia al centro de la Tierra, y $\mathbf{u}_r$ un vector unitario en la dirección de **F** y sentido opuesto.

[1] En este problema se utiliza la letra negrilla para las magnitudes vectoriales como fuerza, aceleración, etc.

Por otra parte, a lo largo de su desplazamiento, el proyectil estará sometido en todo momento a una aceleración dada por:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\frac{G \cdot M}{r^2} \cdot \mathbf{u_r} \quad (2)$$

De acuerdo con las expresiones (1) y (2) anteriores, tanto el módulo de la fuerza como el de la aceleración correspondiente son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia, r, entre el proyectil y el origen del SR. Por tanto, a medida que el proyectil se vaya alejando, además de disminuir su velocidad, disminuirá su aceleración, y cabe imaginar dos posibles situaciones para su movimiento:

a) Que en algún momento el valor absoluto de la aceleración sea suficiente para hacer que la velocidad del proyectil llegue a ser cero a una altura determinada. Entonces, cuando el proyectil alcance esa posición (altura máxima), se detendrá y, a continuación, caerá.

b) Que el ritmo de decrecimiento del módulo de la aceleración, sea insuficiente para hacer que la velocidad del proyectil llegue a anularse en ningún momento. Entonces, el proyectil se alejará indefinidamente.

Se trata, pues, de obtener la velocidad inicial mínima necesaria que debería tener el proyectil para que ocurra esto último. A dicha velocidad se la conoce como "velocidad de escape" y es la magnitud buscada en el problema.

Hipótesis. ¿De qué factores dependerá y cómo dependerá la velocidad de escape?

Es razonable suponer que, a igualdad de los restantes factores, la velocidad de escape, v_e, dependa de la masa M y de la distancia, r, desde la cual se lanza el proyectil, distancia que, en el caso particular de que el lanzamiento se realice desde la superficie, coincidirá con el radio, R, de la Tierra (o del astro que, en general, se considere). Concretamente, cabe esperar que, en ese caso, a igualdad de los restantes factores, v_e sea tanto mayor cuanto mayor sea M y menor sea R.

También podemos prever que la constante de gravitación, G, estará incluida en la expresión de la velocidad de escape, puesto que determina la fuerza que se ejerce sobre el proyectil (ley de gravitación universal) y la correspondiente aceleración. Aunque G es una constante universal, podemos imaginar un universo en el que el valor de G fuera mayor o menor que el establecido en el nuestro. Entonces, si G aumentara, lógicamente v_e, también debería aumentar, puesto que, de acuerdo con la ley de Newton de la gravitación, la fuerza de atracción sobre el cohete (para unos valores dados de M, m y R) también aumentaría.

Finalmente, también deberíamos plantearnos una posible influencia de la masa del cohete en el resultado. Previsiblemente se habrán realizado antes que este, varios problemas en los que se hayan puesto de relieve las influencias de la masa gravitatoria y la masa inercial. Con esta base, aquí podemos aventurar que ambas influencias existirán y se compensarán en este problema. En efecto, por una parte, es lógico plantear que cuanto mayor sea la masa (gravitatoria) del proyectil (que es la que aparece en la expresión 1), mayor debería ser también la fuerza, F, con la que es atraído y, por tanto, mayor deberá ser la velocidad de escape, v_e. Pero, también debe tenerse en cuenta que cuanto mayor sea la masa inercial del proyectil (que es la que aparece dividiendo a F para obtener la expresión 2), menor será la aceleración en su movimiento de ascensión. En el proceso de operativización del problema, las influencias de ambas masas (al ser cuantitativamente iguales) se han compensado y, por ello, m no aparece en la expresión final de la aceleración del proyectil. Por tanto, es de esperar que tampoco lo haga en la expresión de la velocidad de escape.

Estrategias de resolución y resolución propiamente dicha

En este caso, se pueden plantear básicamente tres posibles estrategias de resolución:

a) Partir de la ecuación fundamental de la dinámica y de la ley de la gravitación universal, para obtener la ecuación de movimiento del proyectil:

$$\mathbf{F} = \mathrm{m}\cdot\mathbf{a} \rightarrow -\mathrm{G}\frac{\mathrm{M}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{r}^2}\cdot\mathbf{u_r} = \mathrm{m}\cdot\mathbf{a} \rightarrow -\frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{r}^2}\cdot\mathbf{u_r} = \mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{dt}}$$

A partir de la última expresión obtenida, se puede llegar a una ecuación diferencial (ecuación del movimiento) con la que podríamos resolver el problema. Esencialmente se trataría de buscar qué valor inicial de la velocidad correspondería a un movimiento en el que el proyectil pudiera llegar a distanciarse indefinidamente de forma que justamente cuando se diese $r = \infty$, su velocidad llegara a anularse ($v = 0$). El desarrollo operativo que se requiere para llevar adelante esta estrategia supera el nivel del Bachillerato.

b) Relacionar el trabajo resultante sobre el proyectil (realizado por la fuerza gravitatoria) con el cambio experimentado por su energía cinética entre dos estados A (cuando es lanzado) y B (cuando llegaría al infinito con velocidad final nula) y despejar de la ecuación obtenida v_A, que, en este supuesto, coincide con la velocidad de escape, v_e.

c) Plantear que, en términos de su energía, el sistema (aislado) que forman la Tierra y el proyectil puede ser (según cuál sea la velocidad de lanzamiento del proyectil) un sistema libre o ligado. Si es un sistema ligado el proyectil no podrá escapar del campo gravitatorio de la Tierra y la energía total de dicho sistema será negativa. En cambio, si es un sistema libre el proyectil escapará del campo gravitatorio terrestre y la energía total del sistema será positiva. El caso frontera entre ambas posibilidades (energía total igual a cero) corresponde justamente a que el proyectil inicie su movimiento con la velocidad de escape, v_e.

Esta última estrategia conecta este problema con otras situaciones del mundo natural en donde también es fundamental considerar el signo de la energía de un sistema. Por ejemplo, al evaluar la ligazón (y consecuente estabilidad/inestabilidad) de un átomo, un núcleo, una sustancia o un sistema biológico.

De acuerdo con la segunda estrategia: $W_{\mathrm{res}\,A}^{\;B} = \Delta Ec \rightarrow W_{F\,A}^{\;B} = \Delta Ec$

Como la fuerza gravitatoria es conservativa: $W_{F\,A}^{\;B} = -\Delta Ep$, de modo que: $-\Delta Ep = \Delta Ec$.

Esta expresión puede ponerse como $Ep_A + Ec_A = Ep_B + Ec_B$, en la que:

$Ep_A = -GMm/R$; $Ep_B = 0$; $Ec_B = 0$; $Ec_A = \dfrac{mv_A^2}{2}$ y sustituyendo:

$-GMm/R = -\dfrac{mv_A^2}{2}$. Despejando obtenemos $v_A = \boxed{v_e = \sqrt{\dfrac{2\cdot G\cdot M}{R}}}$ (3)

Expresión 3: Expresión literal de la velocidad de escape

En el caso de la Tierra, después de sustituir los valores de su masa y de su radio (medio) se obtiene un valor de $1.12\cdot10^4$ m/s = 40320 km/h, el cual resulta ser inferior al real (ya que en el proceso de resolución hemos despreciado la influencia del rozamiento con el aire). En cambio, se obtiene un valor mucho más cercano a la realidad al aplicar la expresión (3) a la Luna ($2'36\cdot10^3$ m/s = 8496 km/h), donde es perfectamente lícito considerar que no hay atmósfera. Obviamente, estos resultados tienen mucho interés en ingeniería espacial.

Análisis del resultado

El análisis del resultado obtenido a la luz de las hipótesis antes elaboradas es una etapa fundamental del proceso de investigación que involucra al problema. Puede comenzar con un sencillo análisis dimensional para comprobar que el resultado es dimensionalmente homogéneo ($L \cdot T^{-1}$ en ambos lados de la expresión 3). Esta es una condición necesaria, pero no suficiente, para que el resultado sea correcto. Luego, los estudiantes comprueban que, de acuerdo con las hipótesis, v_e es tanto mayor cuanto mayor sea M o G, y cuanto menor sea R.

Respecto a la masa del proyectil, m, ya hemos comentado por qué no aparece en el resultado, y es muy importante observar si ello entra en contradicción con las hipótesis de los estudiantes, ya que nos daría una excelente oportunidad de aprovechar ese conflicto cognoscitivo, para trabajar detenidamente en los conceptos de masa inercial y masa gravitatoria, que intervienen en un número amplio de problemas de mecánica, realizables desde 4º ESO hasta 2º Bachillerato.

Por otra parte, podemos reforzar bastantes conceptos y procedimientos involucrados en el problema, usando una animación informática *Modellus* que hemos diseñado “ad hoc” para él. Simula el movimiento del proyectil y va representando durante el mismo la gráfica de la evolución de su velocidad, mientras calcula los valores de esta y de la posición respecto del centro de la Tierra (Figura 2). Los estudiantes pueden modificar las condiciones iniciales del problema, comprobando, por ejemplo, que el proyectil regresa hacia la Tierra sólo sí la velocidad del lanzamiento es inferior a v_e.

Finalmente, señalar que tal y como se ha calculado la velocidad de escape (por consideraciones energéticas), esta será la misma con independencia de la dirección en que se lance el proyectil (siempre que no colisione con un obstáculo).

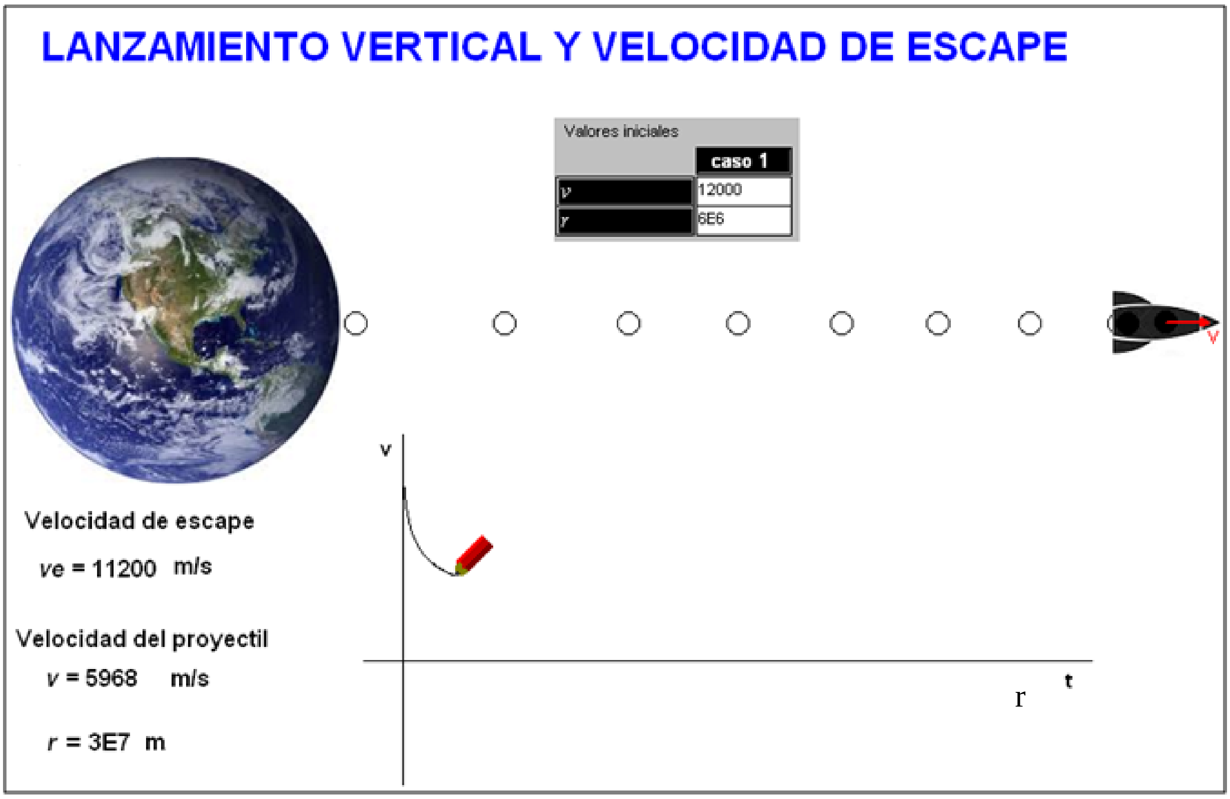

Figura 2: Animación informática interactiva sobre el problema, detenida en un instante posterior a un lanzamiento a velocidad superior a la de escape.

Algunas perspectivas abiertas

La velocidad de escape tiene otra implicación muy interesante, que está relacionada con una de las condiciones necesarias (aunque no suficiente) para que pueda existir vida en un cuerpo celeste: la presencia o no de una atmósfera idónea. Para ver esta relación entre la velocidad de escape y la posible presencia de atmósfera, podemos pensar concretamente en los casos de la Tierra y la Luna. Se sabe que en la Luna ha habido agua (todavía quedan restos de hielo en los cráteres en sombra de los polos). Es posible que esa agua proviniese de ciertos asteroides o cometas que impactaron sobre la Luna. También es posible que se produzca agua por los iones hidrógeno presentes en el viento solar que pueden reaccionar con el oxígeno de algunos minerales. En cualquier caso, la cuestión es por qué, si la Tierra y la Luna se encuentran a la misma distancia del Sol, el proceso de evaporación del agua ha hecho que la mayor parte del agua de la Luna haya desaparecido mientras que no ocurre así con las moléculas de agua terrestres que quedan atrapadas por la atracción gravitatoria de nuestro planeta. La explicación está relacionada, sin duda, con el hecho de que la velocidad de escape de la Luna es muy inferior a la velocidad de escape de la Tierra, por lo que durante el proceso de evaporación del agua en la Luna, muchas moléculas se mueven a velocidades superiores a la velocidad de escape y logran vencer así la atracción gravitatoria lunar sobre ellas.

El concepto de velocidad de escape no es aplicable únicamente al lanzamiento de objetos desde el "suelo" y en dirección vertical, sino también en otros casos, como, por ejemplo, el posible lanzamiento de objetos desde una determinada altura pero con velocidad horizontal (de especial importancia en la puesta en órbita de satélites en torno a la Tierra).

Desde la superficie terrestre lanzamos un satélite verticalmente hacia arriba y cuando se encuentra a una distancia r del centro de la Tierra, le comunicamos una cierta velocidad horizontal. Teniendo en cuenta que la energía potencial gravitatoria es siempre una cantidad negativa y la cinética es positiva, analizad qué posibilidades podrán darse en cuanto a la energía mecánica tras el lanzamiento horizontal y qué le ocurriría al satélite.

Una vez realizado el lanzamiento horizontal y considerando el sistema formado por la Tierra y el satélite (sistema aislado), caben tres posibilidades:

a) Que la energía mecánica sea negativa. $E = -GMm/r + mv^2/2 < 0$

En este caso la energía potencial en valor absoluto es mayor que la energía cinética de modo que al sumar las dos obtenemos un valor negativo para E. Al tratarse de un sistema aislado dicho valor se mantiene constante aunque el sistema evolucione. Eso significa que cuando el satélite se aleje de la Tierra (aumente su energía potencial) y vaya cada vez más lento (su energía cinética disminuirá), todo ha de ocurrir de forma que la suma de ambas energías se mantenga constante (y negativa); por tanto, existirá una distancia máxima, más allá de la cual no podrá alejarse el satélite. Se puede demostrar (mediante razonamientos cuya complejidad excede este nivel) que en esta situación, el satélite seguiría una trayectoria elíptica con el centro de la Tierra en uno de los focos de la elipse. Éste es el caso de los planetas en torno al Sol y de los satélites que se encuentran en órbita alrededor de la Tierra o de las lunas de un planeta. Son objetos que permanecen ligados a otro más masivo y que, aunque se empleara toda su energía cinética en tratar de alejarlos definitivamente de él, esto no se conseguiría.

b) Que la energía mecánica sea nula. $E = -GMm/r + mv^2/2 = 0$

En este caso el valor absoluto de la energía potencial ha de coincidir en todo momento con el valor de la energía cinética (que siempre es positivo) de forma que al sumar las dos energías el resultado sea E = 0. Esto puede interpretarse de la forma siguiente: El satélite se puede alejar indefinidamente de la Tierra de modo que cuando su velocidad tiende a 0, también tiende a 0 la energía potencial. En cualquier punto la velocidad que lleve el satélite será tal que sumando las energías potencial y cinética el resultado sea 0. A una distancia infinita de la Tierra la velocidad del satélite sería 0 (no tendría energía potencial ni cinética). En este caso, se puede demostrar que la trayectoria descrita por el satélite sería una trayectoria abierta en forma de parábola. El valor de la velocidad horizontal con que sale, sería también, el de la velocidad de escape y vendría dado (despejando de la ecuación anterior) por:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

c) Que la energía mecánica sea positiva. $E = -GMm/r + mv^2/2 > 0$

En este caso la energía cinética siempre supera al valor absoluto de la energía potencial. Ello hace que al satélite le sobre energía cinética para escapar de la atracción gravitatoria terrestre ya que para una distancia infinita (energía potencial nula) todavía tendría energía cinética (que coincidiría con el valor de la energía mecánica en cualquier otro punto). Se puede demostrar que en esta situación, el satélite describiría una trayectoria abierta en forma de hipérbola. Para un satélite interplanetario, por ejemplo, se requerirá una energía mecánica positiva. Así ocurrió, con el vehículo espacial Pioneer 10, al cual se le comunicó una energía cinética inicial suficiente como para que, tras su lanzamiento el 3 de marzo de 1972, pudiera escapar de nuestro sistema solar. Dicho vehículo atravesó la órbita de Plutón el 14 de junio de 1983. Las últimas señales del Pioneer se recibieron a comienzos de los años 2000 En la actualidad se encuentra ya muy lejos de nuestro sistema solar, viajando hacia la estrella Aldebarán.

Para trabajar sobre este tema hemos elaborado otra animación con la que los estudiantes pueden lanzar un proyectil desde cualquier distancia a la Tierra y en cualquier dirección. Mientras en la pantalla se reproduce su movimiento, también pueden modificar en cualquier instante su velocidad. Así pueden comprobar, por ejemplo, que, siempre que esa velocidad sea inferior a la velocidad de escape ahí, el sistema Tierra-proyectil permanece ligado, y el proyectil (según el valor y la dirección de la velocidad que se le aplique) describe una trayectoria que termina en la Tierra, una trayectoria circular alrededor de nuestro planeta (como la de un satélite en órbita), o una trayectoria elíptica, como la que tienen los planetas alrededor del Sol (Figura 3).

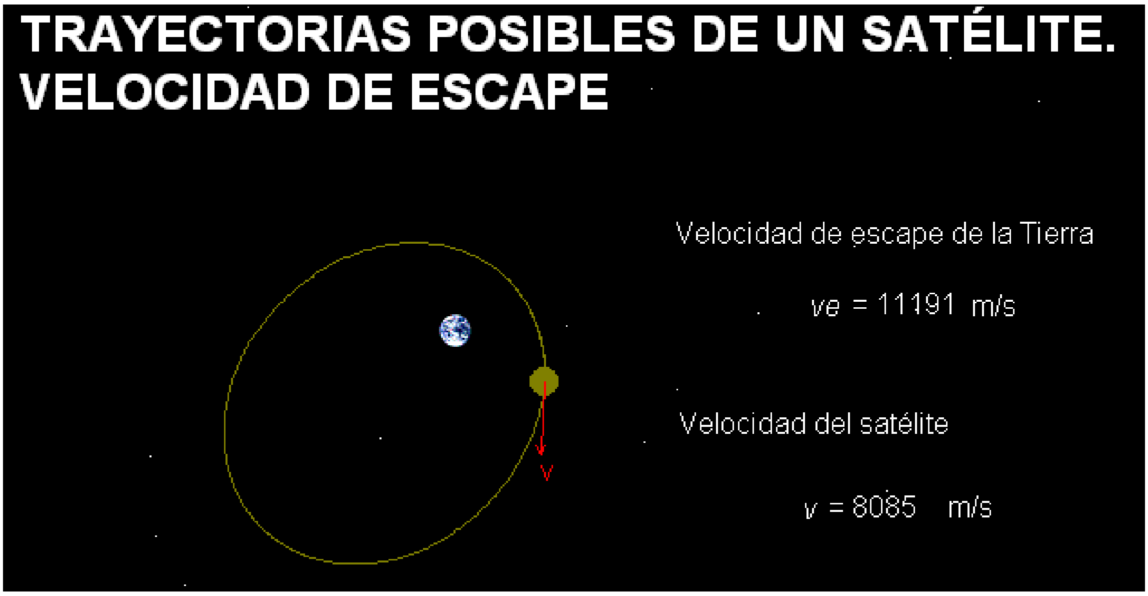

Figura 3: Animación mostrando la trayectoria elíptica que puede seguir un satélite lanzado desde una cierta altura a velocidad inferior a la de escape.

La situación planteada también tiene interés cuando lo que se pretende es cambiar la órbita que describe un satélite a otra de mayor o menor radio modificando convenientemente su velocidad. También permite comprobar que, si la velocidad de lanzamiento es mayor que la velocidad de escape, el satélite describe una trayectoria hiperbólica abierta alejándose de la Tierra, lo que pone en evidencia que, en ese caso, el sistema Tierra-satélite no está ligado.

Otro nuevo problema que se puede plantear relacionado con la velocidad de escape, es la existencia o no de determinadas atmósferas planetarias. Se puede comenzar, por ejemplo, preguntando a la clase a qué puede deberse el hecho de que, estando la Tierra y la Luna aproximadamente a la misma distancia del Sol, la mayor parte del agua de la Luna haya desaparecido mientras que no ha ocurrido así con las moléculas de agua terrestres que, como sabemos, quedaron atrapadas por la atracción gravitatoria de nuestro planeta. A la vista de los resultados numéricos obtenidos de la velocidad de escape en ambos astros, los alumnos deducen fácilmente que durante un proceso de evaporación del agua, en la Luna muchas moléculas (calentadas por la radiación solar) se mueven a velocidades superiores a la velocidad de escape y logran vencer la atracción gravitatoria lunar.

Este razonamiento hace ver que interesa relacionar formalmente a la velocidad de escape con la temperatura en las superficies planetarias, ya que ambos parámetros pueden ser determinantes para justificar la formación y el mantenimiento de una posible atmósfera.

En 2º Bachillerato, los estudiantes pueden establecer esta relación usando conceptos básicos de la teoría cinética de los gases. Según esta teoría, considerando el gas atmosférico como un gas perfecto, las velocidades de todas las moléculas tendrán un tipo de distribución estadística "maxwelliana" como el que se muestra en la figura 4 siguiente:

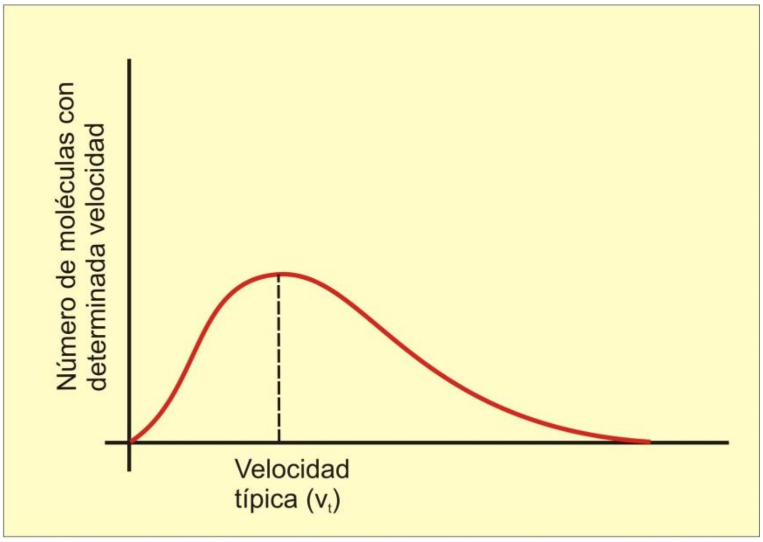

Figura 4. Distribución maxwelliana de las velocidades correspondientes a las moléculas de una gas a una cierta temperatura.

En la figura anterior se ha representado el número de moléculas con una determinada velocidad, frente a un amplio rango de velocidades que pueden tener las moléculas de un gas a cierta temperatura. A mayor altura de un punto de la curva, mayor es el número de moléculas con esa velocidad. En ella se denomina velocidad típica (v_t) a la velocidad más probable. Por otra parte, cabe notar que la curva no es simétrica (puesto que las moléculas se pueden mover con velocidades muy altas pero no menores que 0).

La teoría cinética de los gases también establece que la energía cinética de las moléculas con velocidad típica, viene dada por: $Ec_t = 3KT/2$, donde K es la constante de Boltzmann y T la temperatura absoluta del gas. Si tenemos en cuenta la expresión general de la energía cinética y la aplicamos a una de dichas moléculas, tendremos: $Ec_t = m \cdot v_t^2/2$, de modo que igualando las dos expresiones anteriores, podemos obtener v_t:

$$\frac{3 \cdot K \cdot T}{2} = \frac{1}{2} m v_t^2 \rightarrow v_t = \sqrt{\frac{3KT}{m}} \quad (5)$$

Por otra parte, sea cual sea el valor de la velocidad de escape "v_e" de un determinado planeta, siempre habrá partículas de su atmósfera cuya velocidad será superior y, en consecuencia, podrán escapar (zona sombreada de la figura 5 siguiente):

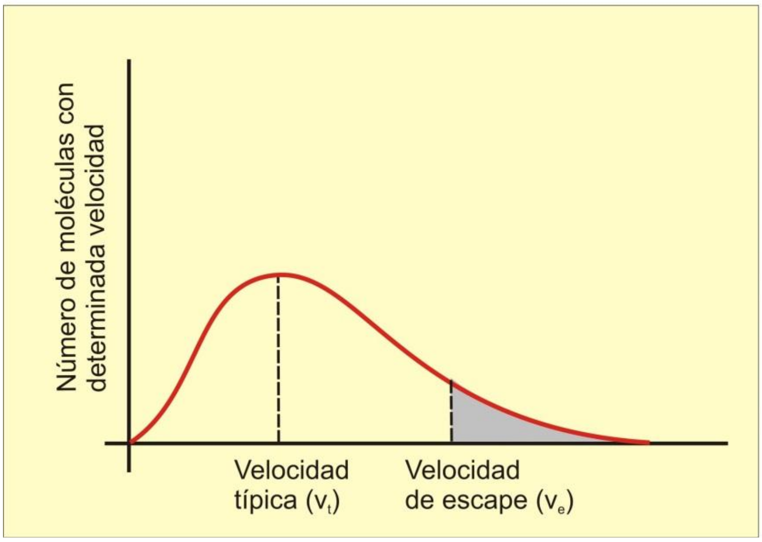

Figura 5. Moléculas con velocidad superior a la velocidad de escape

Las leyes de la estadística establecen entonces el criterio de que para que un planeta retenga su atmósfera durante mucho tiempo la velocidad de escape ha de superar en más de 6 veces a la velocidad típica ($v_e > 6 \cdot v_t$) o, dicho, de otro modo, que la velocidad típica límite sea 1/6 de la velocidad de escape. Sustituyendo las expresiones (3) de v_e y (5) de v_t en la desigualdad anterior, se obtiene al valor límite que ha de tener la temperatura superficial de un planeta para retener durante mucho tiempo a las moléculas de una determinada masa, m (expresión 6) que forman su atmósfera:

$$T < \frac{G \cdot M \cdot m}{54 \cdot K \cdot R} \quad (6)$$

Después de repasar estos sencillos desarrollos, es interesante construir un gráfico de velocidad frente a temperatura y empezar ubicando en él diversos astros del sistema solar, según sus valores de $\frac{1}{6} \cdot v_e$ y temperatura superficial T. A continuación, se puede usar la expresión (5) para trazar en ese mismo gráfico unas líneas (punteadas) que marquen los valores de la velocidad típica v_t de las moléculas en función de T, para algunos de los principales candidatos a ser componentes de una atmósfera. En la figura 6, siguiente, hemos reproducido este gráfico. Como puede observarse, no se han incluido en él ni a Júpiter ni Saturno (exigirían un gráfico con un rango mucho mayor en ordenadas). Tampoco se ha considerado el oxígeno (los valores son muy similares al nitrógeno).

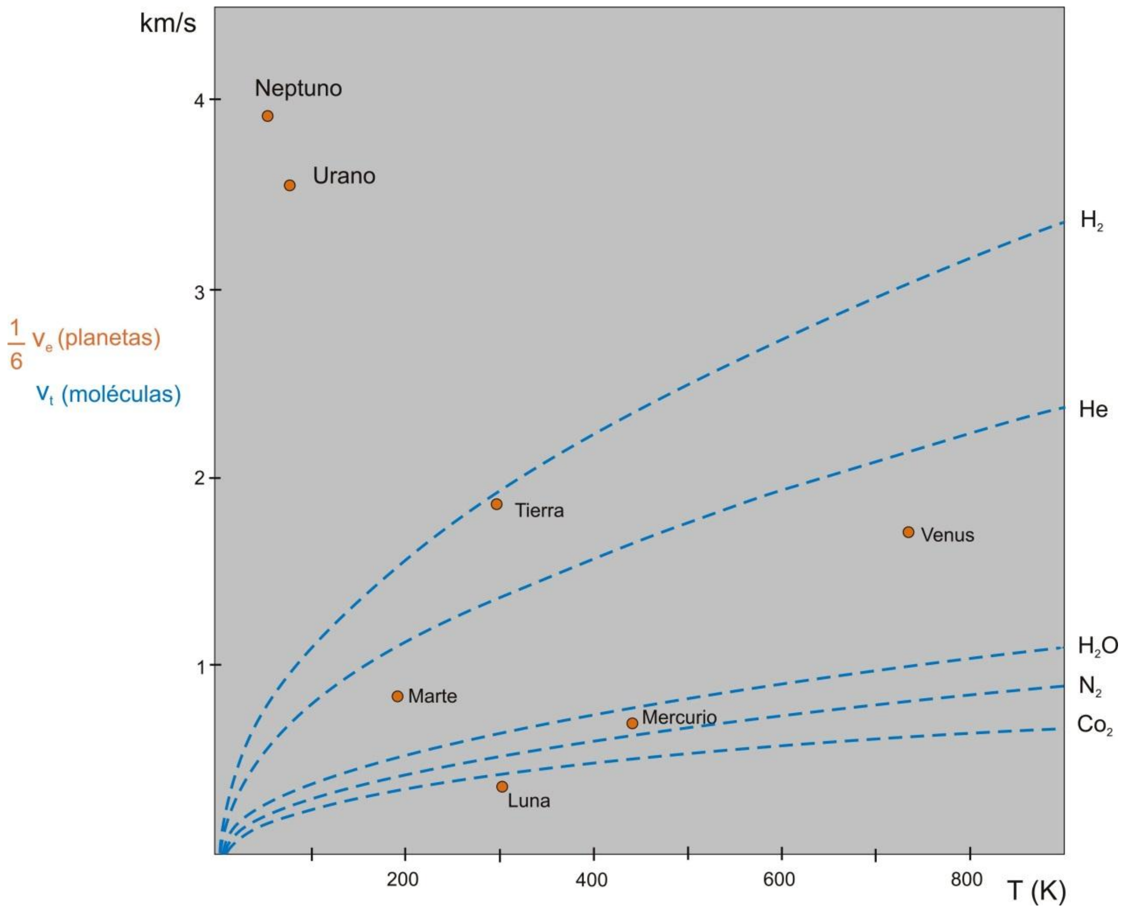

Figura 6. Velocidad frente a temperatura. (Gráfico elaborado por los autores de este trabajo)

Si un astro, caracterizado por una temperatura superficial dada, se ubica por encima la línea correspondiente a un determinado gas, se cumplirá que $v_e/6$ es mayor que v_t (a dicha temperatura) y, por tanto, podrá retenerlo. Así comprobamos directamente en el gráfico, por ejemplo, que las atmósferas de los planetas jovianos (Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno) están dominadas por elementos ligeros, principalmente H_2 y He, que son los gases más abundantes en el Sistema Solar. Son atmósferas primarias, que se crearon cuando se formó el Sistema Solar. En cambio, las atmósferas de los planetas terrestres, que las tienen (Venus, Tierra y Marte), son atmósferas secundarias, dominadas por moléculas como CO_2 y N_2. Estos planetas, tras su formación, también tenían una atmósfera primaria compuesta principalmente de H_2 y He. Pero, como vemos, ambos gases son muy livianos y poco a poco se perdieron hacia el espacio. Vemos también que ni el planeta Mercurio, ni la Luna han podido retener una atmósfera.

Las animaciones usadas en este problema se pueden descargar en la Web “Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física” de la SLA de la RSEF (http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm).