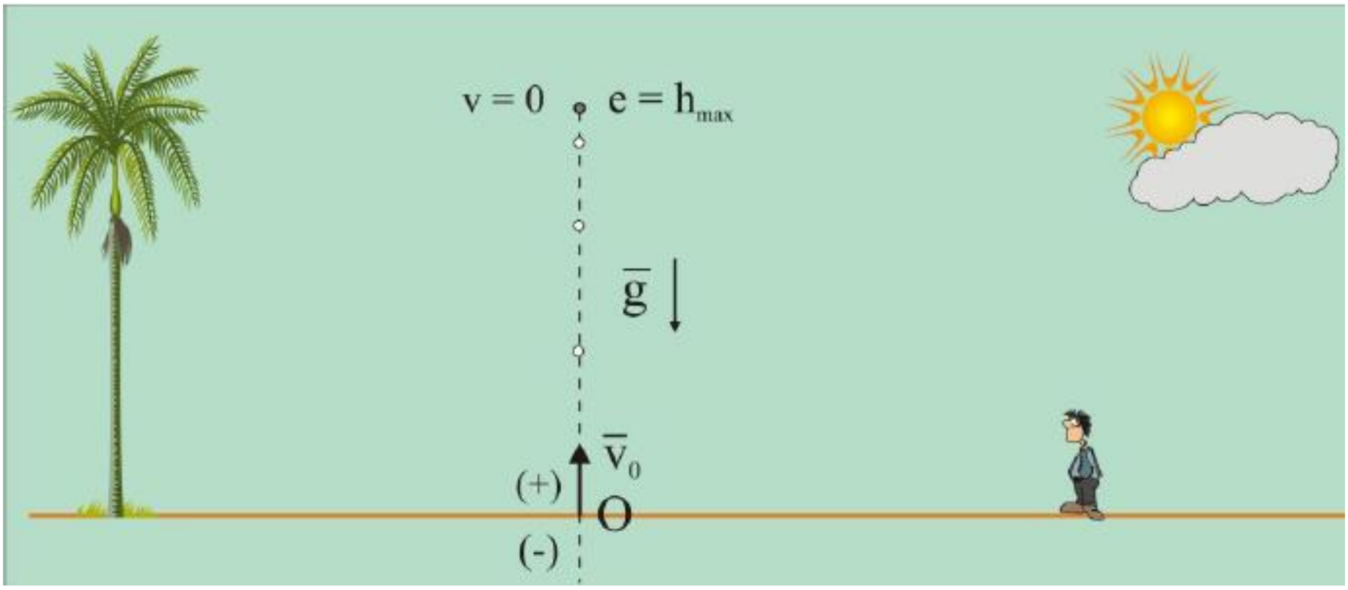
Se lanza un cuerpo hacia arriba. ¿Qué altura máxima alcanzará?

Presentación de la situación problemática, discusión de su posible interés, precisión del problema y análisis cualitativo de la situación.

La situación abierta que se plantea en el enunciado se puede relacionar con el problema del lanzamiento de proyectiles y comentar brevemente la importancia histórica de los trabajos de Galileo en este campo y sobre la caída de graves en general.

Podemos precisar el enunciado considerando una de las situaciones más simples: el lanzamiento vertical desde el suelo de un objeto pequeño y compacto de forma que podamos despreciar el efecto de rozamiento con el aire. Por otra parte supondremos que no llega tan alto como para que podamos medir ninguna variación en el peso de dicho objeto



Al lanzar el cuerpo hacia arriba desde el suelo, este sale con una rapidez inicial v_0 pero debido a la gravedad sube cada vez más lentamente, hasta que llega un momento en que se detiene y comienza a descender cada vez más aprisa. Tanto en la subida como en la bajada el objeto se halla sometido solo a la fuerza peso[1] y se mueve con la aceleración de la gravedad (que suponemos constante y dirigida siempre verticalmente hacia abajo).

En principio podemos suponer que el valor de la altura máxima alcanzada dependerá de la rapidez inicial con que se lance y del valor (en módulo) de la aceleración de la gravedad. Estas ideas se pueden resumir mediante la ecuación:

$$h_{max} = f\,(v_0, g)$$

Podemos incluso, tratar de profundizar un poco más haciendo alguna hipótesis respecto a cómo van a influir cada una de esas variables en la altura máxima alcanzada (siempre suponiendo que las demás permanecen constantes). Así, por ejemplo, cabe pensar que:

- Cuando v_0 aumente (se lance hacia arriba con mayor rapidez) más alto llegará.

[1] Algunos alumnos señalan también a “la fuerza que se le dio al lanzarlo”. Se trata de una idea alternativa relacionada con la concepción de fuerza como causa del movimiento.

- Cuando la gravedad (su módulo), g, disminuya, la aceleración del objeto también será menor y su rapidez irá disminuyendo más lentamente, por lo que la altura máxima aumentará (esto ocurriría, por ejemplo, si el lanzamiento se realizará en la Luna en lugar de hacerlo sobre la superficie terrestre).

Es muy posible que además de las variables anteriores se consideren otras, como el tiempo que esté subiendo y la masa del objeto. En cuanto a la primera, es fácil darse cuenta de que se encuentra ya implícita en las dos variables consideradas (no es posible, por ejemplo, variar la v_0 con que se lanza un objeto en un lugar dado y mantener constante el tiempo que dura la subida). Respecto a la segunda, hay que recordar que el movimiento de caída de los cuerpos (desde pequeñas alturas y con rozamiento despreciable) es un movimiento con aceleración constante independientemente de la masa que tenga el cuerpo.

Diseño de posibles estrategias de resolución

Dado que la trayectoria es conocida (línea recta perpendicular al suelo), podemos aplicar un tratamiento escalar para resolver el problema. Para ello escogeremos arbitrariamente un punto de la trayectoria como origen de espacios (por ejemplo el punto del suelo desde donde se lanza) y un sentido como positivo (por ejemplo hacia arriba), tal y como se indicó en la figura anterior.

La aceleración tangencial es constante y según el esquema anterior será negativa e igual a la aceleración de la gravedad. Se trata, pues, de un movimiento uniformemente acelerado, cuyas ecuaciones de movimiento son:

$v = v_0 + a\,(t-t_0)$ para la rapidez v en cualquier instante t.

$e = e_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$ para la posición e en cualquier instante t.

Teniendo en cuenta las condiciones imperantes en el problema los datos serían:

Un objeto de masa m que en el instante $t_0 = 0$ se lanza desde el suelo ($e_0 = 0$) verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial v_0 (positiva) y que se mueve con una aceleración sobre la trayectoria constante y negativa (-g).

De acuerdo con lo anterior, la ecuación de la rapidez v y de la posición e en cualquier instante, vendrán dadas respectivamente por:

(1) $v = v_0 - g \cdot t$

(2) $e = v_0 \cdot t - (g \cdot t^2)/2$

En las ecuaciones anteriores hemos optado por colocar el signo correspondiente (de acuerdo con el criterio arbitrario especificado al comienzo) antes de sustituir ningún valor numérico[2]. La altura máxima coincidirá en este caso con el valor de la posición e durante la subida en el preciso instante en que el objeto se pare. Ese instante puede calcularse haciendo v = 0 en la ecuación (1) y despejando t.

Otra posibilidad para resolver el problema es mediante consideraciones de trabajo y energía aplicadas al sistema objeto-Tierra. En este caso, de acuerdo con las condiciones del problema, la energía mecánica se conserva y la disminución de energía cinética en la subida ha de coincidir exactamente con el aumento de energía potencial gravitatoria. Manejando esta igualdad podríamos tratar de obtener la altura máxima.

[2] Atención: Esos signos correspondientes a los que nos referimos, se ponen únicamente a los datos (lo que determinará que la incógnita buscada salga ya, en su caso, con el signo adecuado) y el signo negativo, como es lógico, solo se coloca una vez (lo que evita que se convierta en positivo): o bien a las letras o bien, al final, a los datos cuantitativos correspondientes

Resolución, análisis de resultados, implicaciones y nuevas perspectivas

Mediante la primera estrategia, a partir de la ecuación (1) hacemos v = 0 y despejamos t (que coincidirá entonces con el tiempo que tarda en subir), con lo que:

$$0 = v_0 - g \cdot t \rightarrow t = \frac{v_0}{g}$$

Sustituyendo ahora en la ecuación (2) queda que:

$$h_{max} = v_0 \cdot \left(\frac{v_0}{g}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0}{g}\right)^2$$

Simplificando, obtenemos finalmente la expresión de la altura máxima:

$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Mediante la segunda estrategia, bastaría con tomar como nivel 0 de energía potencial gravitatoria el suelo y tener en cuenta que al alcanzar la altura máxima h, el objeto se para momentáneamente con lo que la energía cinética en ese punto será nula. Así pues:

$$Ep_0 + Ec_0 = E_p + E_c \rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_{max} \rightarrow h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Como vemos, mediante las dos estrategias propuestas se ha llegado al mismo resultado literal, lo que refuerza su validez. Por otra parte, esta forma de proceder nos permite analizar dicho resultado y darnos cuenta de si se cumplen o no las hipótesis de partida y los posibles casos límite considerados (cosa imposible sin una resolución literal). En primer lugar, la ecuación es dimensionalmente homogénea (L en ambos lados). Además cuanto mayor es la rapidez con que se lanza el objeto mayor altura máxima alcanzará, pero ahora, es posible analizar de una forma más precisa cómo influye esa variable, ya que al estar elevada al cuadrado lo que ocurres es que a doble rapidez inicial no se obtiene doble altura máxima[3] sino cuádruple. También hay que llamar la atención, en su caso, sobre la no presencia de la masa en el resultado. Finalmente, se pueden dar unos valores lógicos y obtener un resultado numérico. Además, es posible proponer nuevos problemas relacionados, que pueden resolverse en cursos de física posteriores, como podría ser el caso de que el lanzamiento no fuese vertical.

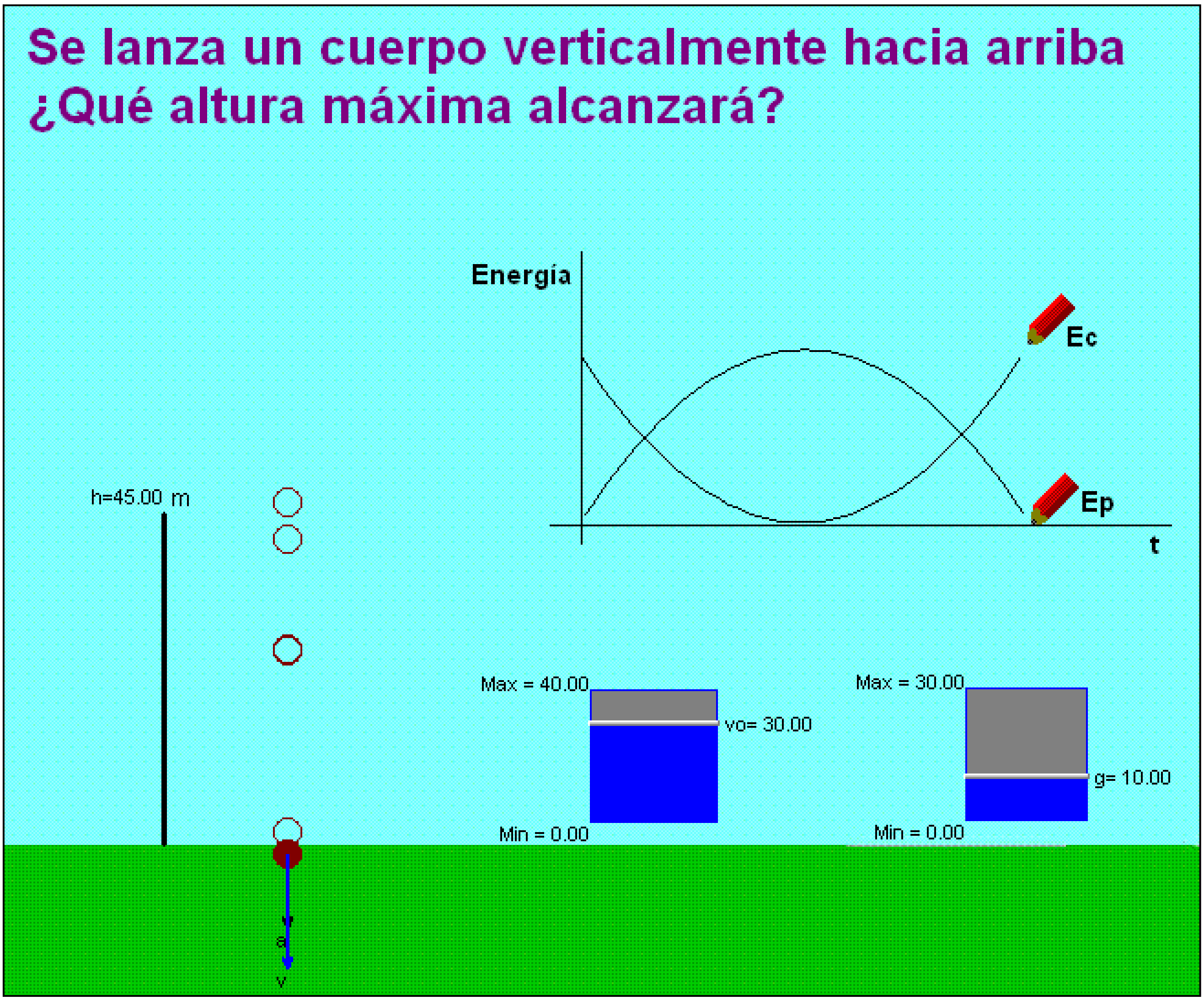
Refuerzo

Para reforzar los conceptos implicados en este problema, hemos elaborado una animación *Modellus*. Va representando paulatinamente el movimiento de ascensión y caída del objeto y dejando una huella estroboscópica de dicho movimiento (quedando así señaladas posiciones sucesivas del mismo a intervalos iguales de tiempo). Sobre el objeto también se dibujan (en todo instante) los vectores que representan la velocidad y la aceleración y en la pantalla también podemos ver cómo se van dibujando las gráficas de la evolución de la energía cinética y la energía potencial gravitatoria. Estas gráficas permiten al usuario comprobar que la suma de ambas energías proporciona en todo momento el mismo valor (conservación de la energía mecánica). Finalmente, en la animación también se aporta (a través de un segmento vertical

[3] Esta es la interpretación que intuitivamente hacen muchos alumnos antes de llegar a este resultado y es coherente con la idea de fuerza como causa del movimiento, la cual lleva a relacionar erróneamente la fuerza con la velocidad (doble velocidad implica doble fuerza) y no con la aceleración.

graduado) la altura máxima que alcanza el cuerpo, por tanto, la solución del problema. La animación es interactiva, de forma que los alumnos pueden entrar en la ventana reservada a las condiciones iniciales del movimiento para modificar los parámetros que influyen en este resultado (velocidad inicial y aceleración de la gravedad) o, si lo prefieren, pueden usar a tal efecto sendos cursores manuales de estas magnitudes.

La imagen adjunta muestra el estado final de la pantalla correspondiente a un movimiento en el que se ha lanzado verticalmente el cuerpo (desde el suelo) con una velocidad inicial de 30 m/s.



La animación y el programa para hacerla correr están disponibles en la página "Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física", de la Sección Local de Alicante de la RSEF http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm