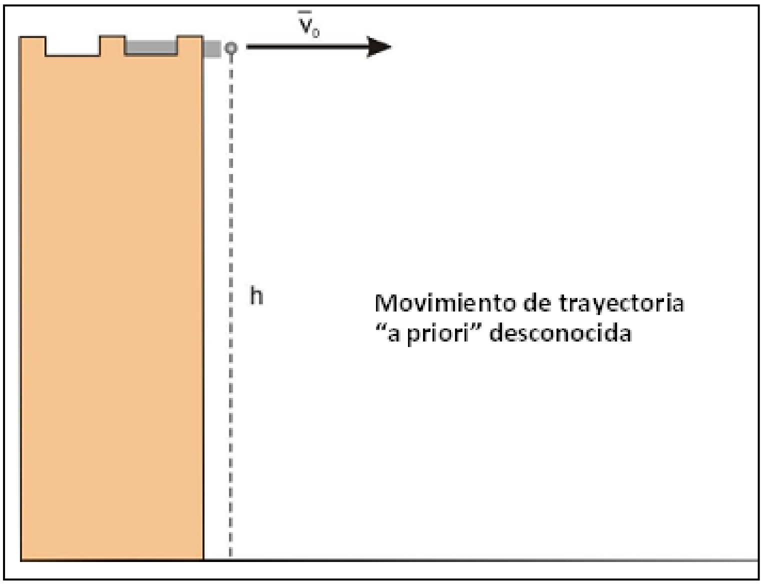
¿Cuál será el alcance de un proyectil lanzado desde lo alto de una torre?

Podemos referirnos a la importancia histórica que tuvo el estudio de este tipo de movimientos en la época en la que se empezó a desarrollar la artillería y, para concretar, centrarnos en el disparo horizontal de la bala de un cañón.



El alcance *A* lo mediremos como la distancia horizontal existente entre el punto del impacto y la base de la torre. Es de esperar que dicho alcance, aumente cuanto mayor sea la velocidad inicial v_0 con que sale el proyectil de la boca del arma, cuanto mayor sea la altura *h* de la torre y cuanto menor fuese la intensidad *g* del campo gravitatorio. Es decir:

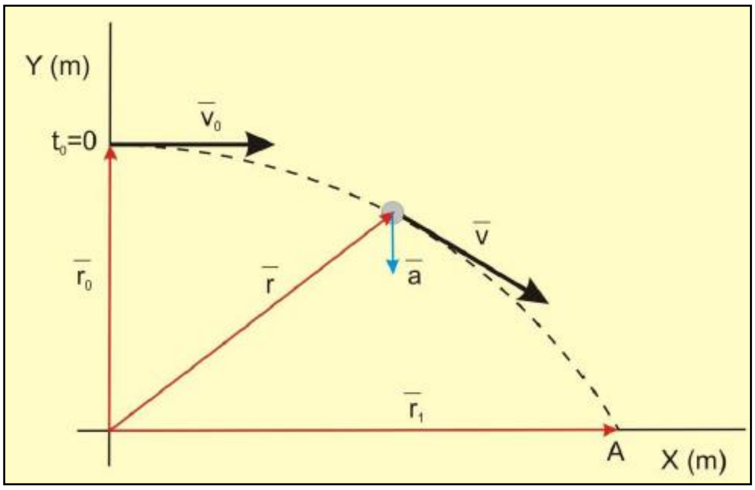
$$A = f(v_0, h, g)$$

Podemos aventurar también algún caso límite evidente como, por ejemplo, que *A* debería ser igual a 0 para $v_0 = 0$ o que *A* tendería a ∞ en el hipotético caso de que g tendiese a 0 (el proyectil caería cada vez menos), etc.

Dado que la trayectoria es, en principio, desconocida, será necesario un tratamiento vectorial para resolver el problema y si suponemos despreciable el rozamiento, la fuerza resultante sobre el proyectil a lo largo de su movimiento no será otra que la fuerza peso, con lo que:

$$\vec{F}_{res} = \vec{P} \to m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g} \to \vec{a} = \vec{g}$$

De igual manera que en los problemas que admiten un tratamiento escalar se pueden utilizar las componentes intrínsecas, aquí tendremos que establecer ahora un sistema de referencia (SR) en el que expresar las distintas magnitudes. En este caso, vamos a tomar un SR de ejes de coordenadas cartesianas, cuyo origen espacial coincida con la base de la torre y el suelo (que supondremos plano y horizontal), con el eje OX, y cuyo reloj se pone en marcha en el instante en que el proyectil sale de la boca del arma y se ve sometido a la gravedad, tal y como se aprecia en el esquema siguiente, en donde hemos dibujado mediante una línea de puntos la trayectoria que "intuimos" seguirá el proyectil una vez disparado.



Como datos tenemos pues:

$$\vec{a} = (0, -g), \quad t_0 = 0; \quad \vec{v}_0 = (v_0, 0); \quad \vec{r}_0 = (0, h); \quad y \quad \vec{r}_1 = (A, 0)$$

en donde, como puede verse, ya hemos tenido en cuenta los signos correspondientes de cada uno de dichos datos.

¿Cómo podríamos hallar el alcance A?

Para conseguirlo, podemos comenzar por determinar las ecuaciones de movimiento del proyectil v (t) y = r (t). El alcance corresponderá al valor de la componente x del vector $\vec{r}$ en el instante en que su componente y valga 0. Luego, una forma de hallar A será determinar el valor de t cuando y = 0 e introducir dicho valor en la componente x del vector $\vec{r}$.

A partir de $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ obtenemos que $\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_0^t \vec{a} \cdot dt \rightarrow \vec{v} - \vec{v}_0 = \int_0^t (0, -g) \cdot dt$

Y resolviendo la integral no queda que:

$\vec{v} = (v_0\,, 0) + \ (0, -g \cdot t) = (v_0\,, -g \cdot t) \rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + \ (g \cdot t)^2}$

A partir de $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ obtenemos que $\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v} \cdot dt \rightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 = \int_0^t (v_0, -g \cdot t) \cdot dt$

Y resolviendo la integral nos queda que:

$$\vec{r} = (0, h) + \ \left(v_0 \cdot t, -{}^1\!/_2\, gt^2\right) \rightarrow \vec{r} = (v_0 \cdot t, h \ - {}^1\!/_2\, gt^2)$$

Analizando la expresión obtenida para $\vec{r}$= r(t), nos damos cuenta que las coordenadas de cualquier punto de la trayectoria seguida por el proyectil, según el sistema de referencia que hemos escogido, vienen dadas en cualquier instante del movimiento por:

$$x = v_0 \cdot t \qquad y = h - \frac{1}{2} gt^2$$

Podemos ahora particularizar x e y para el instante t_1 en que la bala choca contra el suelo y despejar v_0. En efecto:

$$A = v_0 \cdot t_1 \rightarrow v_0 = {}^A\!/_{t_1}$$

Aunque no sabemos t_1, podemos hallarlo haciendo y = 0 en la expresión $y = h - {}^1\!/_2\, gt^2$, de forma que $0 = h - {}^1\!/_2\, gt_1^2$. Despejando en la expresión anterior, obtenemos:

$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ (el mismo tiempo que si la bola hubiese caído verticalmente al suelo)

Sustituyendo ahora t_1 en la expresión anterior $x = v_0 \cdot t$, podemos determinar A:

$$A = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

¿Cómo podemos analizar el resultado anterior?

En primer lugar, es posible darse cuenta de que lo que hay a la izquierda del signo igual, tiene las mismas dimensiones que lo que hay a la derecha (L en ambos casos). Ello no es una garantía de que el resultado sea correcto, pero si la ecuación no resultara dimensionalmente homogénea, sí que podríamos tener la seguridad de haber cometido algún error y deberíamos revisar el problema.

En segundo lugar, vemos que el resultado contempla adecuadamente ciertas condiciones límite evidentes. Por ejemplo: Si v_0 es 0, A = 0 y lo mismo ocurre si h = 0. Por otra parte, vemos también que si $g \rightarrow 0$ entonces $A \rightarrow \infty$.

Además, cuanto mayor sea la velocidad de lanzamiento v_0 (manteniendo constantes los valores de las restantes magnitudes) mayor será el alcance A conseguido y cuanto mayor sea la altura h desde la que se hace el lanzamiento para conseguir un alcance determinado, con menor velocidad inicial habrá que hacer el lanzamiento, etc.

Finalmente, podemos imaginar unos valores lógicos como, por ejemplo, h = 45 m, v_0 = 1200 m/s y junto con $g \approx$ 10 N/kg, calcular el alcance correspondiente. Si lo hacemos así, obtenemos un valor A = 3 200 m

El resultado, podemos expresarlo también en forma vectorial como $\vec{r}_1 = (3\,200, 0)\ m$

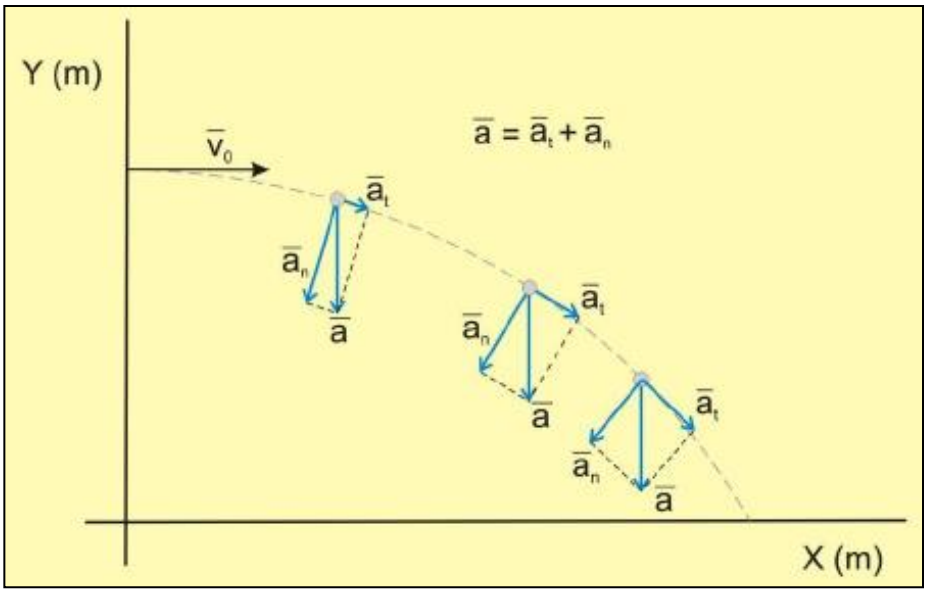
Es preciso tener en cuenta que al sustituir el valor de g, hemos puesto 10 y no -10 porque el signo negativo que le correspondía a esta componente escalar del vector aceleración (según el sistema de referencia escogido) ya lo hemos tenido en cuenta al principio poniendo - g en la expresión de dicho vector aceleración $\vec{a} = (0, -g) m/s^2$.

Otra cuestión importante que podemos plantearnos a raíz de este problema es *si se trata o no de un movimiento uniformemente acelerado*. Un análisis superficial de la situación podría llevar a pensar que, puesto que la aceleración es constante, sí lo es. Sin embargo, si obtenemos la expresión de a_t nos podemos dar cuenta de que no es constante y que, por tanto, **no se trata de un movimiento uniformemente acelerado** y el módulo de la velocidad (o la rapidez) varía de forma **no** lineal con el tiempo.

En efecto:

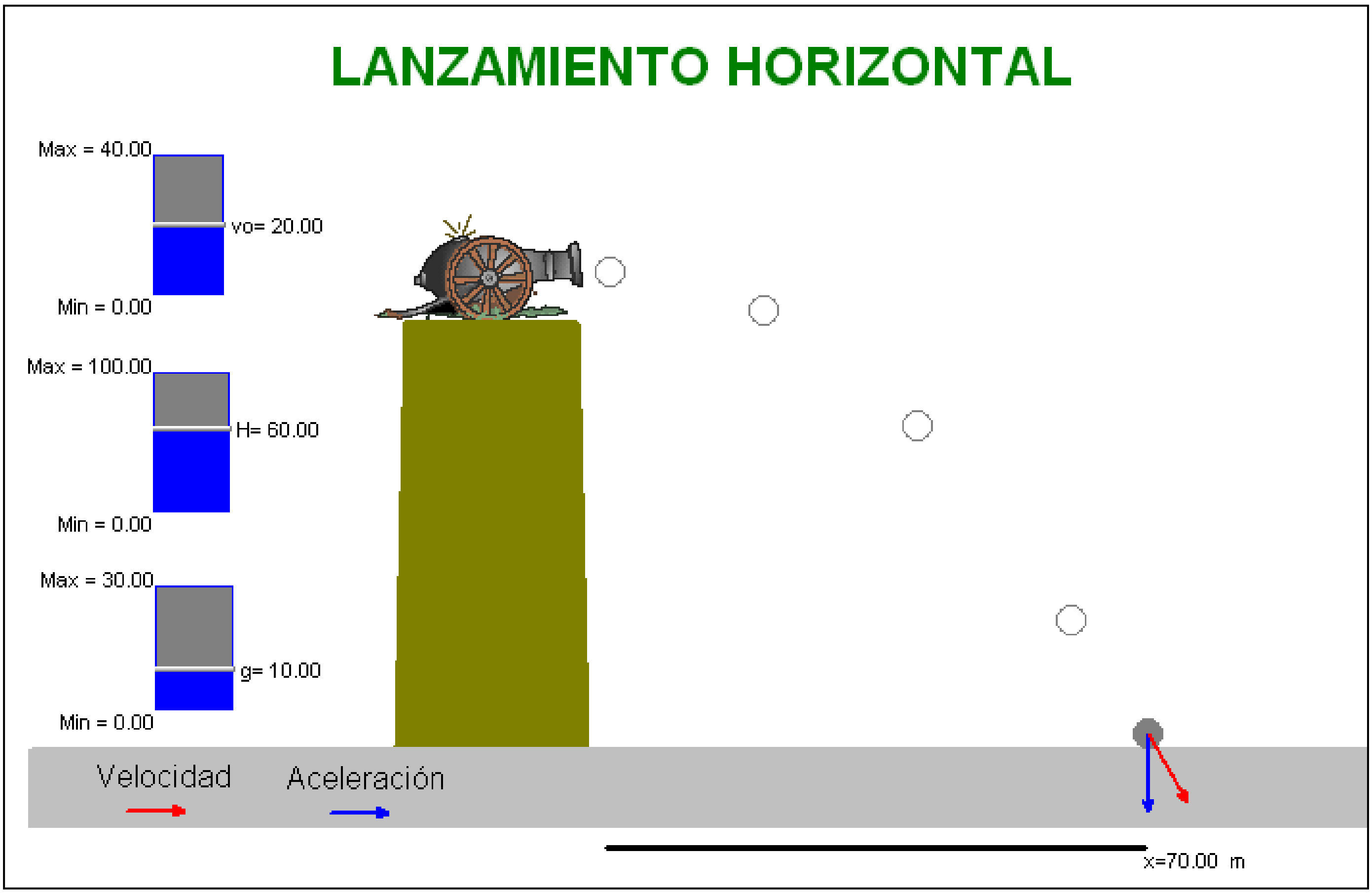
$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2g^2t}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}} \rightarrow a_t = \frac{1}{\sqrt{\frac{v_0^2}{g^4t^2} + \frac{1}{g^2}}}$$

El hecho de que, en este caso, la aceleración "total" sea constante sin que lo sea la aceleración tangencial, se debe a que la aceleración normal también cambia, pero de tal modo que la suma sí que se mantiene siempre constante. En el esquema adjunto se puede visualizar este hecho, comprobando cómo, efectivamente, el vector aceleración es constante pero no así sus componentes intrínsecas que van cambiando continuamente mientras que el proyectil se mueve, de forma que a_t va aumentando mientras que a_n va disminuyendo, pero su resultante siempre mantiene el mismo módulo dirección y sentido.



Refuerzo

Para reforzar el desarrollo de este problema, hemos elaborado una animación interactiva *Modellus*, que va dibujando la huella estroboscópica dejada por un proyectil después de haber sido lanzado horizontalmente por un cañón situado a una cierta altura. En la pantalla se dispone de cursores manuales para modificar los valores de los parámetros (altura inicial, velocidad inicial y gravedad) y, sobre el proyectil se dibujan en todo instante los vectores representativos de la velocidad y la aceleración. Finalmente, se utiliza un segmento variable graduado, para mostrar durante todo el movimiento el alcance horizontal que va teniendo el proyectil. Así vemos, por ejemplo: para una altura del lanzamiento de 60 m, una velocidad inicial del proyectil de 20 m/s, y supuesta una gravedad del orden de la terrestre (10 m/s^2), se obtiene un alcance final de 70 m, tal como muestra la imagen siguiente.



La animación y el programa para hacerla correr están disponibles en la página “Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física”, de la Sección Local de Alicante de la RSEF http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm