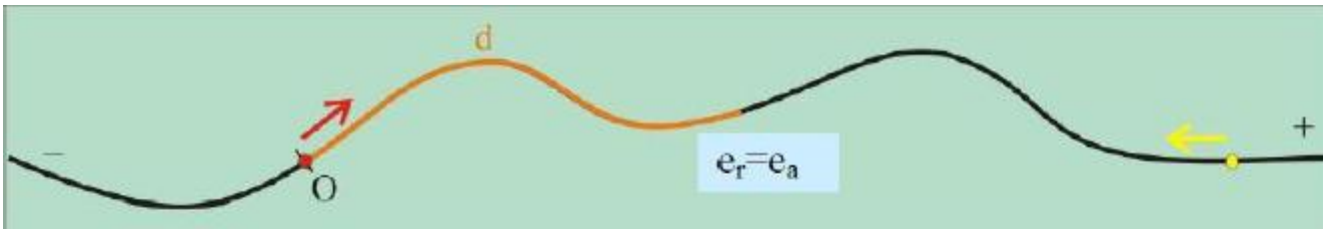
¿Dónde se cruzarán dos vehículos que circulan por la misma carretera?

Planteamiento: ¿Qué pasa ahí? ¿Cómo me imagino la situación?

En primer lugar, vamos a fijar las condiciones en las que vamos a trabajar: Supondremos que se trata de dos movimientos uniformes y que ambos móviles se desplazan por una trayectoria fija y conocida en sentidos opuestos, de modo que llegará un momento en el que se cruzarán. Lo que queremos saber es en qué punto ocurre eso. Es un problema que puede tener su interés en el control del tráfico de vehículos (trenes, autobuses, etc.).



Para resolver el problema es preciso elegir un sistema de referencia adecuado, así como un criterio de signos. Dado que se trata de una trayectoria conocida, realizaremos un tratamiento escalar. Para ello, escogeremos como origen O la posición inicial del móvil rojo y valores de la posición positivos hacia la derecha de ese punto y negativos a la izquierda. Como origen de tiempos ($t_0 = 0$) escogeremos también el instante inicial, cuando ambos están separados por una distancia D medida, claro está, sobre la carretera. Dado que cuan-do se cruzan ambas posiciones son iguales, el problema se puede operativizar como: ¿A qué distancia "d" del origen de espacios O, se cumple que $e_r = e_a$?

Hipótesis: ¿De qué factores dependerá d? Argumentad cómo cabe esperar que influya cada uno de ellos en el valor de d, y considerad también algún caso límite.

En principio, podemos pensar que d dependerá de la rapidez con que se mueva cada uno y de la distancia inicial D que los separe:

$d = f(v_r, v_a, D)$ donde v_r = rapidez del móvil rojo y v_a = rapidez del móvil amarillo

Es más, cabe esperar que si a igualdad de los restantes factores:

v_r aumenta → d aumentará
v_a aumenta → d disminuirá
D aumenta → d aumentará

También podemos pensar en algunos casos límite evidentes como, por ejemplo:

Si $v_r = 0 \rightarrow d = 0$; si $v_a = 0 \rightarrow d = D$; si $v_r = v_a \rightarrow d = D/2$

Estrategias de resolución

Se trata de dos movimientos uniformes, de modo que podemos saber dónde estarán los móviles rojo y amarillo en cualquier instante escribiendo las ecuaciones de sus movimientos. Hallar d equivale a calcular e_r (o e_a) en el preciso instante "t" en que ambas posiciones coinciden. Por tanto, una posible estrategia será:

Escribir las ecuaciones $e_r = f(t)$ y $e_a = f(t)$ y hallar el instante "t" en que $e_r = e_a$ y de ahí finalmente d.

También se puede intentar resolver el problema mediante una representación gráfica. Concretamente, se trataría de representar los valores de la posición de cada vehículo en función del tiempo, en una misma gráfica. Al tratarse de dos movimientos uniformes, se obtendrán dos líneas rectas de diferente pendiente. El punto en el que se crucen esas rectas, nos dará directamente los valores del instante en que se encuentran los vehículos y de la distancia d buscada (coincidente con la posición de cualquiera de ellos en dicho instante).

Resolución

Seguiremos la primera de las estrategias expuestas.

La ecuación general de la posición de un movimiento uniforme es: $e = e_0 + v\cdot(t - t_0)$ y para el móvil rojo, tenemos $t_0 = 0$, $e_0 = 0$, $v = v_r$, $e = e_r$, con la que sla ecuación será:

$e_r = v_r\cdot t$

Para el móvil amarillo, tenemos $t_0 = 0$, $e_0 = D$, $v = -v_a$, $e = e_a$, con lo que la ecuación será:

$e_a = -v_a\cdot t + D$

Obsérvese que al desplazarse en sentido negativo, la rapidez de A es negativa[4]. En el instante en que $e_r = e_a$, se tendrá que cumplir que:

$$v_r\cdot t = -v_a\cdot t + D \quad \text{de donde:} \quad t = \frac{D}{(v_r+v_a)}$$

Ahora basta sustituir este valor de "t" en la ecuación de la posición de cualquiera de los dos móviles, para tener la distancia "d" buscada. Si lo hacemos así, obtenemos:

$$d = D\,\frac{v_r}{(v_r+v_a)} \quad \text{o lo que es equivalente:} \quad d = D\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{v_a}{v_r}\right)}$$

Análisis del resultado

Si nos detenemos en analizar el resultado anterior, podemos comprobar fácilmente cómo se cumplen todas las hipótesis de partida (además de constatar que es dimensionalmente homogéneo). Es fácil ver, por ejemplo, que cuando ambos móviles se desplazan con la misma rapidez, se encontrarán justo a mitad de camino (D/2), o que si, por ejemplo, $v_A = 0$ ocurre que $d = D$, etc.

También es posible una resolución cuantitativa si asignamos a los datos unos valores numéricos. Por ejemplo, podemos suponer que el rojo se mueve a 90 km/h y el amarillo a 72 km/h y que la distancia inicial entre ellos es D = 5’4 km.

Comprobad que, en ese caso, se encontrarían en d = 3000 m y analizad este resultado cuantitativo.

Podemos ahora hacernos alguna nueva pregunta. Por ejemplo:

¿En qué cambiaría el resultado anterior si los dos vehículos se moviesen en el mismo sentido?

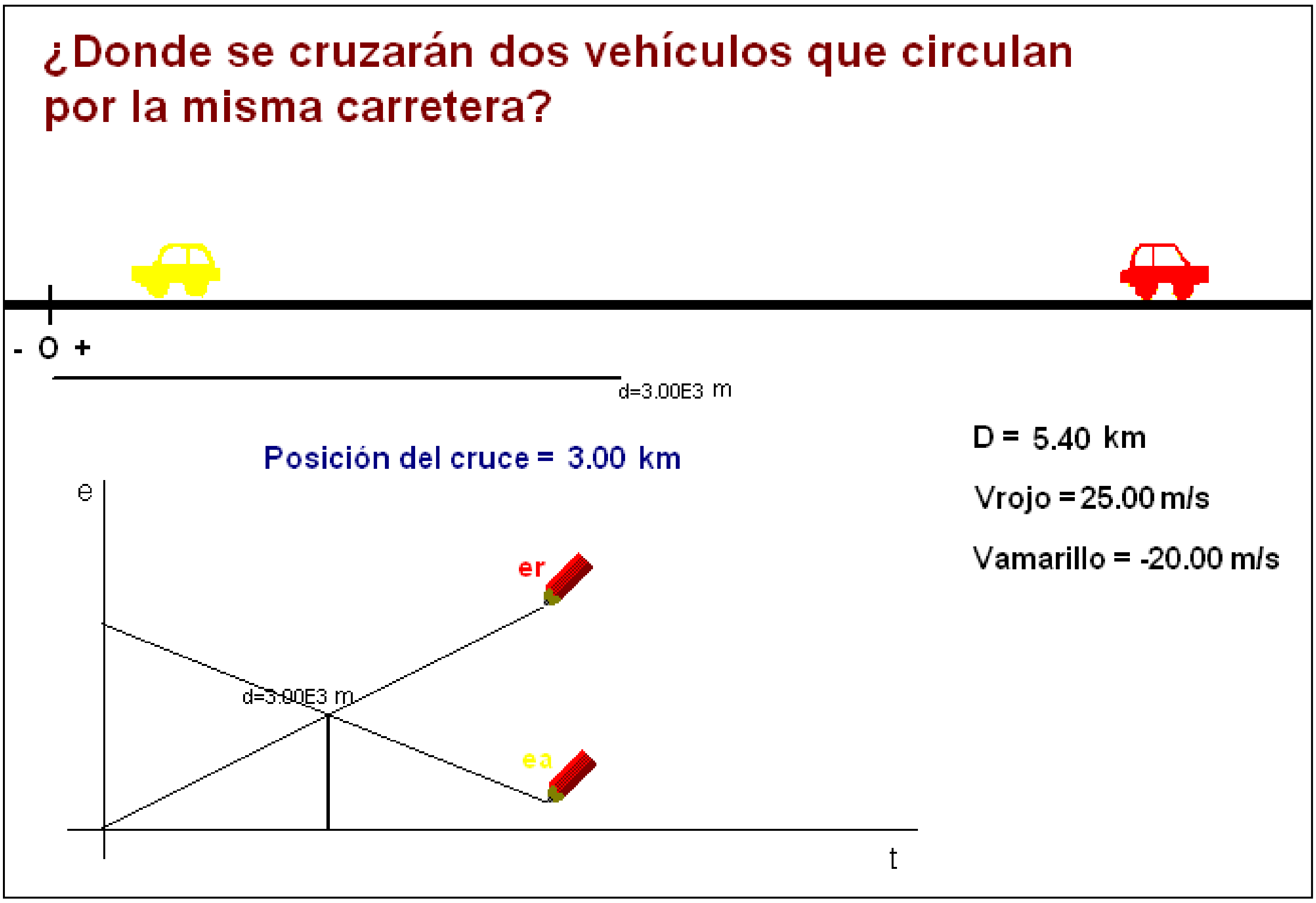
Se trata de una situación diferente. Ahora, si ambos se mueven en sentido positivo, la rapidez de cada uno es positiva y, como es lógico, para que puedan encontrarse, el que va inicialmente detrás deberá ir más rápido que el otro…

Refuerzo:

Como actividad de refuerzo, los alumnos pueden trabajar con una animación *Modellus*, que hemos elaborado sobre este problema y lo resuelve usando las dos estrategias que hemos planteado aquí. En la pantalla de se incluyen tres indicadores de los parámetros de los que depende el resultado (separación inicial entre los dos vehículos, D y velocidades de ambos, v_a y v_r). Los alumnos pueden variar cada uno de estos parámetros, poniendo a prueba las hipótesis enunciadas.

La imagen siguiente corresponde a una secuencia de dicha animación para un cierto instante posterior al cruce, suponiendo que los datos iniciales son los que hemos adoptado en esta resolución literal. Para entonces ya ha quedado reflejada en la pantalla la posición buscada (d = 3000m), en la que dicho cruce se produjo (tanto numéricamente, como gráficamente)

Por otra parte, la animación también puede usarse para resolver el problema en el que los vehículos se persiguen en lugar de cruzarse. Para ello, basta con introducir en la ventana de las condiciones iniciales, sendas velocidades de los vehículos que tengan el mismo signo)



La animación y el programa para hacerla correr están disponibles en la página "Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física", de la Sección Local de Alicante de la RSEF
http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm