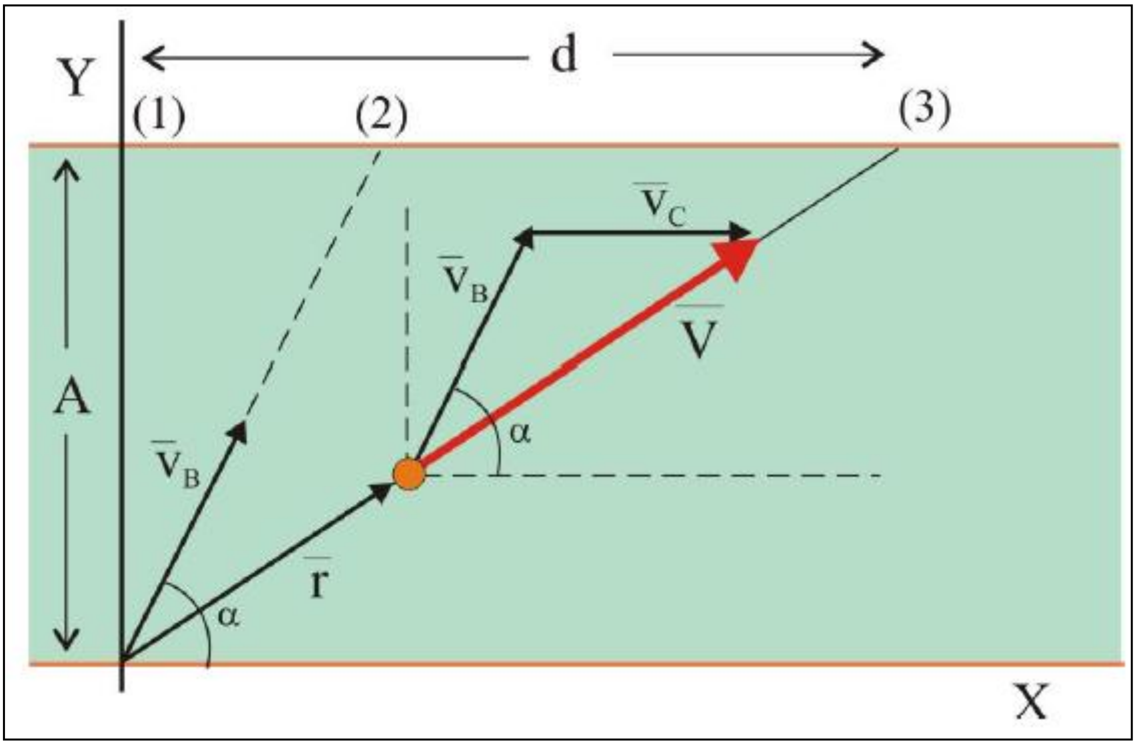
Una barca que se desplaza a 6 m/s sale de la orilla de un río de 60 m de ancho en una dirección que forma un ángulo de 60º con dicha orilla (en el sentido en que se desplaza la corriente). Determinad a qué punto de la otra orilla llegará la barca suponiendo que la rapidez de la corriente sea constante y su valor 2 m/s.

Presentación de la situación problemática, discusión de su posible interés, precisión del problema y análisis cualitativo de la situación.

En el esquema siguiente hemos representado la situación que plantea el problema. El punto (1) es al que llegaría la barca en caso de que no hubiese corriente y el ángulo α valiese 90º. El punto (2) corresponde también al caso de que no hubiese corriente, pero suponiendo que la barca toma un rumbo oblicuo (en este caso un ángulo 60 º). Sin embargo, como sí que existe corriente, la barca sufre una deriva en el rumbo inicial ya que a la velocidad de la barca $\vec{v}_B$ hay que sumar la velocidad de la corriente $\vec{v}_C$, lo que hace que se dirija hacia el punto (3) de la otra orilla, con una velocidad resultante de $\vec{v} = \vec{v}_B + \vec{v}_C$.

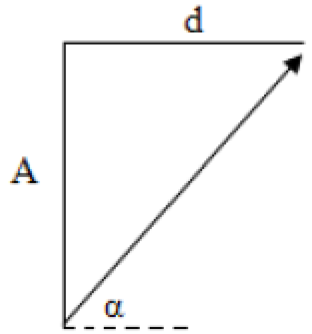


El problema nos pide a qué punto de la otra orilla llegará la barca. Se trata de un problema que tiene un indudable interés práctico en aquellas situaciones en las que hay que cruzar una extensión grande de agua y se desea conocer el rumbo para llegar a un punto determinado. Dicho punto puede determinarse mediante la distancia "d" existente entre los puntos (1) y (3). Para ello, simplificaremos el problema despreciando lo que ocurre en el instante inicial (salida de la barca) y final (llegada a la otra orilla) en los que habrá una cierta aceleración y consideraremos el movimiento como uniforme a lo largo de todo el trayecto.

Hipótesis. ¿De qué factores dependerá el valor de la distancia d?

Podemos suponer que dicha distancia dependerá de la anchura A del río, del ángulo α, de la velocidad $\vec{v}_B$ de la barca y de la velocidad $\vec{v}_C$ de la corriente, de manera que si, manteniendo constantes los restantes factores, aumentase, por ejemplo, la velocidad de la corriente, d también aumentaría y lo mismo ocurriría si aumentase la anchura del río o disminuyese el ángulo α.

Podemos considerar también algún caso límite interesante y de fácil interpretación. Por ejemplo, en el caso de que el agua esté estancada (sin corriente) se puede obtener muy fácilmente la distancia utilizando un esquema gráfico como el adjunto en que se puede ver que $tg(\alpha) = A/d$ y, por tanto, $d = A/\ tg(\alpha)$. Obsérvese que, en este caso particular el resultado no depende del módulo de la velocidad de la barca, pero sí, por supuesto, del rumbo que ésta tome (es decir, del ángulo, α). Obviamente si, además, ese ángulo valiese 90º, la distancia d valdría entonces 0 y la barca llegaría justo enfrente.



Diseño de posibles estrategias de resolución.

Si escogemos un sistema de coordenadas cartesianas como el que se representa en la figura de la página anterior, cuyo origen coincida con la posición inicial de la barca, podemos darnos cuenta de que la distancia d coincidiría con la componente cartesiana r_x del vector de posición de la barca $\vec{r} = (r_x\,,\ r_y)$ en el preciso instante en que ésta llegue a la otra orilla, es decir, cuando la componente r_y coincida con la anchura del río ($r_y = A$). Por tanto, una forma de obtener d, sería determinar en primer lugar la ecuación del movimiento de la barca $\vec{r} = \vec{r}\ (t)$ y a continuación tratar de calcular r_x en el instante en que $r_y = A$. La ecuación de movimiento puede determinarse integrando la función $\vec{v} = \vec{v}\ (t)$.

Otra posible forma de resolver el problema es mediante consideraciones geométricas.

Resolución, análisis de los resultados, implicaciones y nuevas perspectivas.

Resolveremos el problema según la primera estrategia. De acuerdo con la figura anterior, el vector velocidad resultante con que se mueve la barca puede expresarse como:

$$\vec{v} = (v_x\,, v_y) = (v_B \cos\alpha + v_C\,,\ v_B \,\mathrm{sen}\,\alpha)\,.$$

Integrando en $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ (teniendo en cuenta que para t = 0, $\vec{r}_0 = 0$ y que $\vec{v}$ es constante), nos queda que:

$$\vec{r} = (r_x\,, r_y) = \left[(v_B \cos\alpha + v_C)t,\ v_B t\cdot \mathrm{sen}\,\alpha\right]$$

que nos da el vector de posición de la barca en cualquier instante del tiempo que dura el trayecto. Descomponiendo ahora según los ejes:

$r_x = (v_B \cos\alpha + v_C)\ t$

$r_y = v_B\ t \cdot \mathrm{sen}\ \alpha$

Igualando r_y a la anchura del río A, obtenemos de la segunda expresión el tiempo t correspondiente al instante en que la barca llega a la otra orilla: $t = \dfrac{A}{v_B \,\mathrm{sen}\,\alpha}$

Sustituyendo en la primera expresión obtenemos:

$$\boxed{d = \frac{(v_B \cos\alpha + v_C)A}{v_B \operatorname{sen}\alpha}}$$

Y operando se llega finalmente a d = 57’74 m

Análisis del resultado literal obtenido

En primer lugar podemos comprobar que la expresión obtenida es dimensionalmente homogénea ya que en ambos lados de la igualdad las dimensiones son las de una longitud (L). Por otra parte, el resultado contempla algunos casos bien conocidos, como, por ejemplo, que si el ángulo α disminuyese la distancia d aumentaría tendiendo a ∞ cuando α tendiese a 0, y, en particular, el caso límite anteriormente considerado (si $v_c = 0$, entonces, d = A/ tg α). A partir de este caso, también constatamos que si además $\alpha = 90^o$ (siendo $v_c = 0$), se obtiene d = 0, llegando entonces justo enfrente del punto de partida. Este último aspecto nos permite plantear una cuestión particularmente interesante desde el punto de vista práctico:

¿Cuánto debería valer α para que la barca llegase justo enfrente de donde se halla inicialmente, teniendo en cuenta el efecto de la velocidad de la corriente?

Como la corriente del río desvía a la barca deberemos de tener en cuenta su efecto y tomar un ángulo mayor de 90º. En efecto, si llega justo enfrente se deberá de cumplir que la distancia d valga 0, luego haciendo d = 0 en el resultado del problema, podemos despejar α y obtener el ángulo pedido:

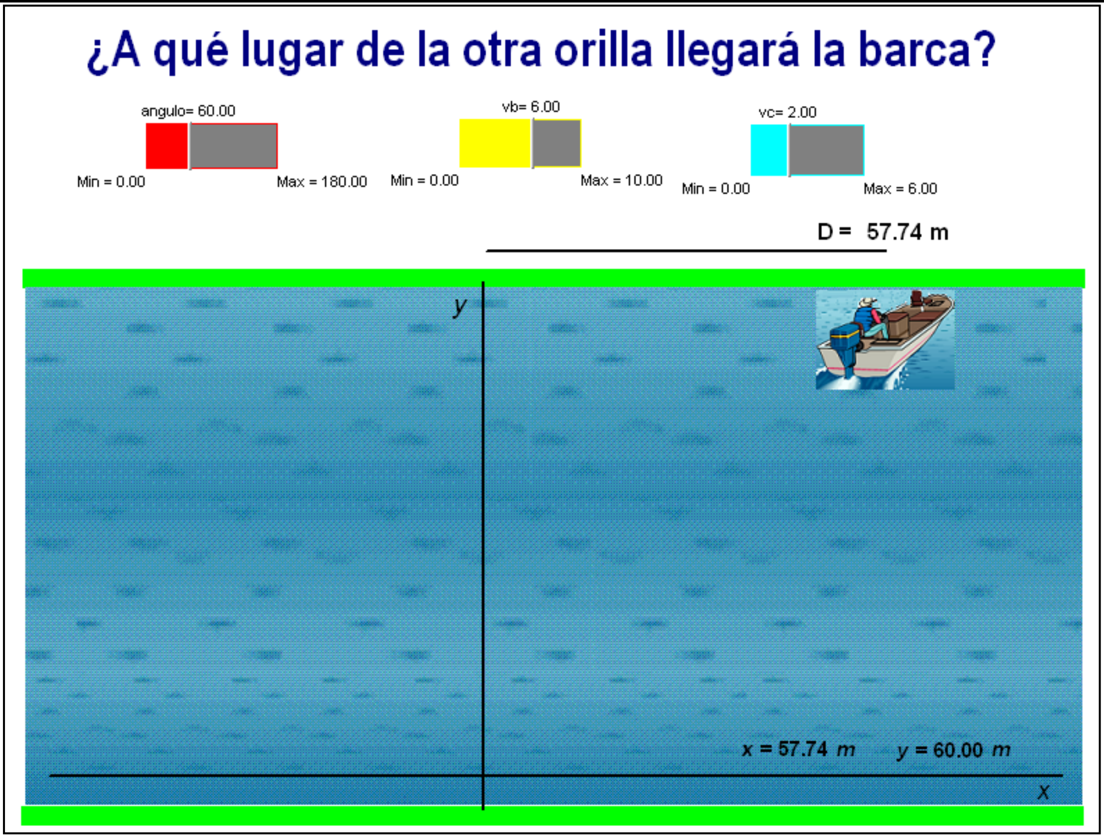
$$d = \frac{(v_B \cos\alpha + v_C)\,A}{v_B \operatorname{sen}\alpha} = 0 \rightarrow v_B \cos\alpha = -v_C \rightarrow \cos\alpha = \frac{-v_C}{v_B} \rightarrow \alpha = \arccos\frac{-v_C}{v_B} = 109'47^o$$

Refuerzo

Como actividad de refuerzo y ampliación, los alumnos pueden trabajar con una animación *Modellus*, que hemos elaborado, sobre este problema. Dicha animación reproduce el movimiento de la barca atravesando un río de 60m. El usuario puede modificar el resto de parámetros (ángulo, velocidad de la corriente y módulo de velocidad de la barca), bien entrando, antes de hacerla correr, en la ventana reservada a las condiciones iniciales del movimiento o bien, sobre la marcha, usando alguno de los tres controladores manuales para estas magnitudes, que están disponibles en la pantalla.

Por otra parte, en la animación se puede optar por dos pantallas alternativas, que corresponden a cada una de los dos rumbos de la barca que hemos estudiado: caso 1: ángulo de 60º, caso 2: ángulo de 109.47º. La imagen siguiente corresponde a la última imagen del primero de estos casos.

La animación y el programa para hacerla correr están disponibles en la página “Web de Materiales para la Enseñanza y la Divulgación de la Física”, de la Sección Local de Alicante de la RSEF http://rsefalicante.umh.es/fisica.htm


¿A qué lugar de la otra orilla llegará la barca?
angulo= 60.00
Min = 0.00
Max = 180.00
vb= 6.00
Min = 0.00
Max = 10.00
vc= 2.00
Min = 0.00
Max = 6.00
D = 57.74 m
y
x = 57.74 m
y = 60.00 m
x