Problemas de Dinámica Relativista y desarrollo de la Competencia Científica

3 authors:

Manuel Alonso Sánchez
University of Alicante

Jaime Carrascosa Alís
University of Valencia

Salvador Martínez Sala

PROBLEMAS DE FÍSICA

DINÁMICA RELATIVISTA

didacticafisicaquimica.es

MANUEL ALONSO SÁNCHEZ
SALVADOR MARTÍNEZ SALA
JAIME CARRASCOSA ALÍS

(7 de junio de 2018)

NOTA PREVIA

Los problemas que se presentan a continuación conforman un capítulo más del libro “Problemas de Física” (de libre acceso en la página Web: didacticafisicaquimica.es) y corresponden al tema de Relatividad. Como información básica y ampliación de conocimientos recomendamos utilizar:

- ✓ El tema 9 (Introducción a la teoría de la Relatividad) del libro Física de 2º de Bachillerato, de los mismos autores que este capítulo (también de libre acceso en didacticafisicaquimica.es).

- ✓ Los contenidos de http://rsefalicante.umh.es/relatividad.htm en los que se incluyen animaciones que conectan específicamente con muchas de las situaciones planteadas en estos problemas permitiendo una mejor comprensión de los conceptos y relaciones que se manejan en cada uno.

Entre estos problemas los hay adecuados para estudiantes de Física de 2º curso de Bachillerato (modelo educativo español) y también otros para estudiantes universitarios de los primeros cursos de Física.

Esperamos que todo ello sea de utilidad tanto al profesorado como al alumnado que lo utilice. Ese es nuestro principal objetivo.

Recomendamos que, antes de estudiar o hacer uso de los problemas propuestos, se proceda a una lectura atenta del documento que se expone a continuación, en el que se detalla y justifica el modelo de resolución utilizado lo que permitirá, sin duda, un mejor aprovechamiento de los mismos.

¿CÓMO DESARROLLAR LA COMPETENCIA CIENTÍFICA A TRAVÉS DE LOS PROBLEMAS DE LÁPIZ Y PAPEL?

Dentro del cuerpo de conocimientos de la Didáctica de las Ciencias Experimentales, la Competencia Científica en una materia determinada (Física, Química, etc.) se puede entender como *saber* (sus contenidos específicos), *saber hacer* (relacionado con aspectos procedimentales y metodológicos) y además, *saber ser y estar* (relacionado con aspectos axiológicos como, por ejemplo, una actitud positiva, un mayor interés hacia la materia en cuestión y su aprendizaje, trabajar bien en equipo, etc.).

Los profesores de ciencias hemos de impulsar y desarrollar la competencia científica entre los alumnos en todas sus dimensiones, no solo porque así se nos exige sino, sobre todo, porque es la mejor forma de aprender ciencias (con todo lo que ello conlleva). En cuanto a la metodología esto implica, entre otras actividades:

Plantear problemas de interés y saber precisarlos
Elaborar hipótesis fundadas
Elaborar posibles diseños experimentales para contrastar las hipótesis
Llevar a la práctica los diseños elaborados
Realizar análisis críticos, interpretar, argumentar, modelizar, búsqueda de coherencia y globalidad
…

Todo ello supone un cambio importante, que ha de romper con hábitos de pensamiento muy enraizados, fruto de la forma común de abordar e interpretar las situaciones de la vida cotidiana. Sin embargo, hay que ser conscientes de que dicho cambio conlleva unos determinados requerimientos y que no es posible avanzar en el mismo dejando de lado la adquisición de unos contenidos conceptuales que presenten una cierta amplitud, globalidad y coherencia interna. Es decir: No se puede enseñar nada de la competencia científica en abstracto, de igual forma que tampoco es posible llevar a cabo ninguna investigación científica fuera de un marco conceptual determinado, el cual desempeña un papel muy importante desde el mismo inicio hasta el final de la misma.

Tampoco es posible enseñar nada de la competencia científica de manera parcelada (por ejemplo, solo a través de los trabajos experimentales), sino que hay que hacerlo en todos aquellos aspectos que resultan claves para la enseñanza y aprendizaje de cualquier materia científica como la Física o la Química, lo cual incluye, obviamente, la resolución de problemas de lápiz y papel, que es el ámbito concreto en el que nos vamos a centrar aquí.

¿Con qué características y cómo deberían plantearse los problemas para que contribuyan realmente a desarrollar la competencia científica en el alumnado?

Para poder avanzar en el objetivo anterior es necesario abandonar la metodología de enseñanza y aprendizaje de los problemas en la que estos se tratan como meros ejercicios de aplicación y desarrollar un nuevo modelo de resolución, más coherente con la naturaleza de la ciencia y el trabajo científico. Ello supone esencialmente, prestar una atención particular a los siguientes aspectos:

Comenzar por un análisis cualitativo de la situación, planteando con claridad qué es concretamente lo que se pide en el problema, aquello que se busca, qué interés puede tener, precisando así mismo las condiciones que se consideran imperantes en la situación abordada para poder avanzar así en su solución, y apoyándose, siempre que sea posible, en representaciones o esquemas gráficos apropiados.

Esto es precisamente lo que realizan los expertos cuando se encuentran ante lo que para ellos es un verdadero problema, y también lo que en ocasiones (sin mucho éxito) se recomienda hacer a los alumnos.

Emitir hipótesis fundadas sobre los factores de que puede depender la magnitud buscada y sobre la forma de dicha dependencia imaginando, en particular, posibles casos límite de fácil interpretación física.

La emisión de hipótesis consiste en una de las actividades más importantes a realizar en cualquier investigación y constituye en la enseñanza de las ciencias una excelente ocasión para poner de manifiesto la existencia de posibles ideas alternativas. Los datos necesarios para la resolución del problema vendrán marcados precisamente por aquellos factores que se hayan considerado en las hipótesis emitidas. Finalmente, conviene tener en cuenta que el hecho de aventurar cómo pueden influir dichos factores y analizar algún caso límite evidente, contribuye especialmente a poder realizar después un mejor análisis del resultado (otro aspecto fundamental del trabajo científico).

Elaboración y exposición de manera clara y concisa, de una posible estrategia para la resolución del problema antes de proceder a esta, evitando recurrir al simple ensayo y error.

Se trata de que los alumnos, utilizando sus conocimientos de partida, elaboren de manera fundamentada una estrategia que pueda conducir a la resolución del problema y la expongan de forma resumida argumentando sobre ella y los pasos a seguir. Esta etapa sería equivalente a lo que en una investigación científica se considera como la elaboración de diseños para la contrastación de las hipótesis emitidas y es una actividad excelente para favorecer el desarrollo de la creatividad.

Hacer referencia cuando sea posible a otros métodos alternativos de resolución.

Buscar distintas vías para la resolución de un mismo problema y debatir sobre ellas es algo que no solo posibilita una mejor contrastación de los resultados obtenidos sino que, además, puede contribuir decisivamente a que los alumnos se den cuenta de la coherencia global y la validez del cuerpo de conocimientos que se va construyendo. Por otra parte, contribuye a desarrollar una imagen de la ciencia más cercana a la realidad, ya que las contrastaciones por distintas vías juegan un papel fundamental en el trabajo científico.

Proceder a la resolución del problema de acuerdo con la estrategia escogida, razonando lo que se hace y por qué se hace, sin caer en operativismos carentes de significado.

Se trata esencialmente de que se haga referencia a la información teórica disponible, se justifiquen las expresiones que se van a utilizar comprobando, por ejemplo, que su campo de validez es el adecuado según las condiciones que se consideran imperantes en la situación planteada y de que, sobre todo, no se proceda a una resolución mecánica o mimética del problema.

Efectuar, siempre que sea factible, una resolución literal del problema, evitando la tendencia a trabajar desde el principio con los valores numéricos.

Conviene tener en cuenta que no se trata de que los alumnos no manejen datos cuantitativos y obtengan un resultado final expresado numéricamente sino, más bien, de que hagan esto cuando corresponda. En muchos casos es posible efectuar una resolución literal antes de sustituir los valores numéricos. Para algunos alumnos, acostumbrados a operar con los números de forma inmediata, resulta un paso difícil. Sin embargo, se trata de algo esencial para conseguir, entre otras cosas, poder realizar un buen análisis crítico del resultado.

Analizar el o los resultados obtenidos mediante resolución literal, a la luz de las hipótesis elaboradas y, en particular, de los casos límites considerados. Realizar también un sencillo análisis dimensional.

El análisis de los resultados de un problema se puede realizar cuando estos vienen dados en forma de una expresión literal ya que entonces es posible comprobar, de acuerdo con las hipótesis y casos límite de partida, la influencia de las magnitudes que aparecen en ellos. Además, conviene tener presente que es aquí, precisamente, en donde se puede producir algún conflicto cognoscitivo (cuando, por ejemplo, en el resultado no aparece alguna magnitud que sí había sido considerada como influyente durante el planteamiento cualitativo), convirtiéndose así los problemas en poderosos instrumentos para un desarrollo realmente efectivo de la competencia científica.

Analizar los valores encontrados planteándose si son valores lógicos o no.

A veces es posible que un resultado numérico se desvíe tanto que se convierta en absurdo. Este es el caso de aquellos que, ante un problema determinado obtienen, por ejemplo, que un átomo de oxígeno tiene una masa de 16 g, o que el periodo de la Luna en su giro alrededor de la Tierra es de millones de años, sin que ello les suponga ninguna inquietud.

Considerar las perspectivas abiertas tras la resolución del problema.

Contemplar, por ejemplo, la posibilidad de abordarlo con un mayor nivel de complejidad, estudiando sus implicaciones teóricas (profundización en la comprensión de algún concepto), prácticas (situaciones similares de interés técnico), etc.

En el momento oportuno utilizar las nuevas tecnologías para mejorar el aprendizaje derivado de la resolución de problemas.

Se trata, por ejemplo, de búsquedas bibliográficas a través de internet para ampliar y profundizar sobre algún contenido concreto contemplado en el problema, utilizar applets y aplicaciones que permitan visualizar algún aspecto concreto (por ejemplo la influencia que tiene en el resultado cambiar una u otra variable), etc.

Relacionar, en su caso, el problema con aspectos científico-tecnológicos, sociales o del medio natural.

Siempre que la naturaleza de la situación plantada lo permita hay que incluir también en la resolución del problema alguna reflexión sobre su posible interés científico-tecnológico o sus implicaciones en la vida de las personas y en la naturaleza. Con ello se contribuye no solo a una toma más fundamentada de decisiones sino también a poner en cuestión una imagen descontextualizada de la Ciencia y el trabajo científico.

Conviene tener en cuenta que las orientaciones precedentes no pretenden ser ninguna receta cuyo seguimiento paso a paso garantice el éxito final. Se trata, por el contrario, de indicaciones muy generales que alertan contra determinados vicios metodológicos que impiden tratar los problemas como tales (algo para lo cual, de entrada, no se dispone de una solución evidente).

Para que las orientaciones anteriores se puedan contemplar en una programación y, lo que es más importante, para que el profesorado pueda apropiarse de ellas como punto de partida en el que apoyarse, es absolutamente necesario disponer de colecciones de problemas, acordes con dichas orientaciones.

En la página Web: didacticafisicaquimica.es

Existe un libro de problemas de Física resueltos y también otros elementos (materiales educativos y de didáctica) todos ellos de libre acceso, en los que se incluyen numerosos ejemplos de problemas planteados con esta metodología en muchos otros temas.

Es necesario tener en cuenta que no todos los problemas se pueden plantear así, ni tampoco se pueden contemplar siempre en un problema las 11 orientaciones comentadas anteriormente. De hecho, la mayor parte de los problemas planteados como investigación se han desarrollado principalmente en contenidos de mecánica newtoniana para Enseñanza Secundaria. Con estos temas de Relatividad, pretendemos ampliar el campo (y también el nivel educativo) en el que se ha venido aplicando esta metodología de resolución de problemas, abordando situaciones de mecánica relativista. Este capítulo en concreto se centra en dinámica, y es la continuación de otro anterior centrado en cinemática. En ambos se incluyen problemas apropiados para el nivel de estudiantes de Física de 2º de Bachillerato (español) junto con otros más adecuados para estudiantes universitarios de primeros cursos de Física.

Con ello se pretende esencialmente contribuir al desarrollo de la competencia científica del alumnado de Educación Secundaria y de Universidad, mediante un modelo con el que trabajar un aspecto concreto que resulta clave para la enseñanza y aprendizaje de las ciencias, como es la resolución de problemas de lápiz y papel, alejándonos de orientaciones excesivamente generalistas y abstractas, más propias de la Psicología o la Pedagogía generales que de la Didáctica de las Ciencias Experimentales.

Modestamente, abogamos por que se supere la "amnesia crónica" que con frecuencia afecta a la Didáctica de las Ciencias Experimentales y se ponga de nuevo el foco en el diseño, experimentación y evaluación de propuestas concretas con las que desarrollar la competencia científica entre el alumnado a través de los contenidos específicos de las asignaturas que el profesorado imparte, no solo mediante los problemas de lápiz y papel sino también en los restantes aspectos claves para enseñar y aprender ciencias como, por ejemplo, los trabajos prácticos o la introducción y manejo de conceptos científicos.

Para quienes se acercan a este tema por primera vez, recomendamos consultar la introducción del libro "Problemas de Física" el cual se encuentra en los materiales educativos presentes en la página Web: didacticafisicaquimica.es, en donde se ilustran muchas de las orientaciones expuestas a la vez que se va resolviendo un problema muy sencillo.

Nota final:

Para elaborar estos contenidos nos hemos basado fundamentalmente en diversos trabajos realizados sobre esta línea de investigación por los profesores Daniel Gil Pérez y Joaquín Martínez Torregrosa. Para ver la bibliografía concreta (y para una mayor información) se puede consultar el capítulo sobre Resolución de Problemas del Libro "Curso Básico de Didáctica de las Ciencias" incluido en la página web citada anteriormente.

14. PROBLEMAS DE DINÁMICA RELATIVISTA COMO INVESTIGACIÓN

Introducción:

El hecho de multiplicar la masa de una partícula por su aceleración es algo que contribuyó decisivamente al tránsito de la cinemática hacia la dinámica y en general hacia la construcción del cuerpo de conocimientos que conforman lo que se conoce como "mecánica de Newton". Dentro de ese marco teórico, y de acuerdo con el principio de Relatividad de Galileo, la aceleración de una partícula es invariante, lo que significa, como ya sabemos, que no depende del sistema de referencia inercial (en adelante SRI) escogido para medirla. Si tenemos en cuenta que la masa es invariante, ello supone que la fuerza resultante ($\mathbf{F}_{\mathbf{res}} = m\cdot\mathbf{a}$)[1] también ha de serlo. La ecuación anterior es la ley fundamental de la dinámica de Newton y al ser la fuerza resultante una magnitud invariante, hace que dicha ecuación se pueda escribir igual en todos los SRI y, por tanto, se pueda tomar como punto de partida para el estudio de cualquier movimiento.

La cuestión ahora es: ¿Existe alguna forma similar a la descrita en el párrafo anterior, para transitar de la cinemática relativista a la dinámica relativista? ¿Cuál sería, en ese caso, la ley fundamental correspondiente?

Las dos actividades siguientes nos permitirán contestar estas preguntas

1. Multiplicad el cuadrivector desplazamiento espacio-tiempo

$$\mathbf{\Delta s} = (c\ \Delta t\ ,\ \mathbf{\Delta r}) = (c\cdot\Delta t\ ,\ \Delta x\ ,\ \Delta y\ ,\ \Delta z)$$

por la cantidad $m\cdot c/\Delta t_0$, **(**m: **masa de la partícula**, c: **velocidad de la luz**, Δt_0: **intervalo de tiempo propio). A continuación ved las dimensiones del cuadrivector obtenido e interpretad su significado físico y el de cada una de sus componentes.**

Si multiplicamos el vector desplazamiento espacio-tiempo[2], $\Delta\mathbf{s}$, por la cantidad $m\cdot c/\Delta t_0$, como pide el enunciado, se obtiene:

$$(m\cdot c/\Delta t_0)\cdot\mathbf{\Delta s} = (m\cdot c^2\cdot\Delta t/\Delta t_0\ ,\ m\cdot c\cdot\mathbf{\Delta r}/\Delta t_0)$$

Como la velocidad de la partícula es $\mathbf{v} = \mathbf{\Delta r}/\Delta t$ y $\Delta t/\Delta t_0 = \gamma$ (ley de dilatación del tiempo), queda:

$$(m\cdot c/\Delta t_0)\cdot\mathbf{\Delta s} = (m\cdot\gamma\cdot c^2,\ m\cdot\gamma\cdot\mathbf{v}\cdot c)$$

Al realizar el análisis dimensional de la magnitud obtenida, se obtiene: $M\cdot L^2/T^2$, es decir, dimensiones de energía.

Con respecto al significado físico de cada componente y de la magnitud global, vemos que:

[1] En este tema usaremos indistintamente letra negrilla o una flecha para indicar vectores
[2] Este vector tiene cuatro componentes (las tres coordenadas cartesianas x, y, z y el tiempo) por lo que se le denomina cuadrivector espacio-tiempo.

La primera componente, $m \cdot \gamma \cdot c^2$, es una magnitud escalar que, como acabamos de ver, tiene dimensiones de energía. De hecho, es la definición de la energía total de una partícula:

$$\boxed{E = m \cdot \gamma \cdot c^2}$$

En la expresión anterior aparece el factor γ, lo que implica que la energía total de una partícula no es un invariante (dado que dependerá de la velocidad con que dicha partícula se mueve respecto de un SRI dado). No obstante, en el caso de que se adopte como SRI uno ligado a la propia partícula (con lo que $v = 0$ y $\gamma = 1$), la expresión se transforma en:

$E_0 = m \cdot c^2$ en la que E_0 representa la energía "propia" de la partícula, la cual sí es invariante.

En la segunda componente, $m \cdot \gamma \cdot \mathbf{v} \cdot c$, vemos que $m \cdot \gamma \cdot \mathbf{v}$ es una magnitud vectorial y es la definición del impulso (o cantidad de movimiento) **p** (minúscula) de una partícula:

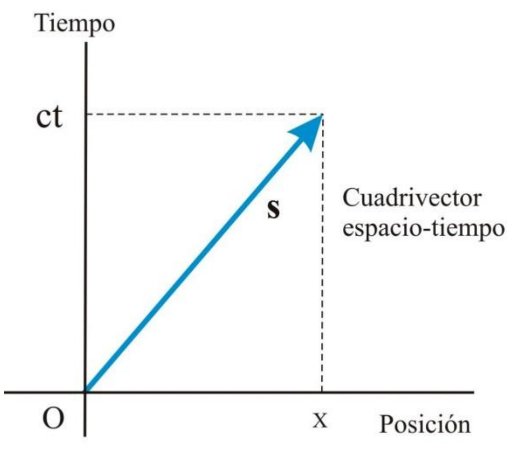
$$\boxed{\mathbf{p} = m \cdot \gamma \cdot \mathbf{v}}$$

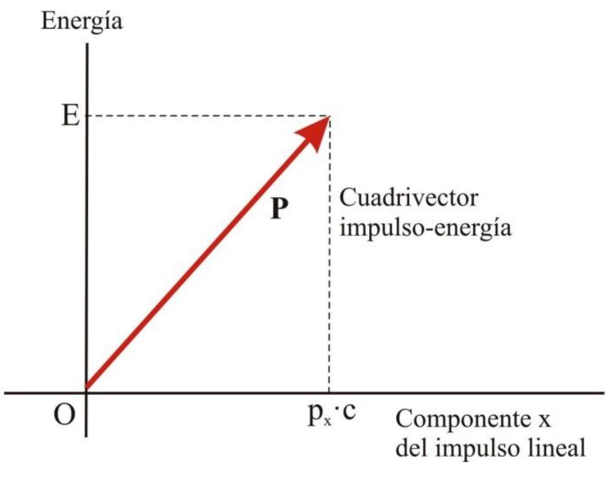
Este impulso sería igual al de la mecánica de Newton ($\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v}$) cuando $\gamma=1$, es decir, en el límite newtoniano.

Por todo ello, a este vector dinámico se le llama: **vector impulso-energía** y se representa con la letra **P** (mayúscula):

$$\boxed{\mathbf{P} = (E, \mathbf{p}c)}$$

Podemos representar comparativamente el vector desplazamiento espacio-tiempo en su diagrama de ejes ($c \cdot t$, x) (considerando sólo una dimensión espacial) y el vector dinámico impulso-energía en el suyo (E , $p_x \cdot c$), en cuyo caso se obtienen unos diagramas como los siguientes:





Como ambos cuadrivectores son proporcionales, tienen los dos las siguientes propiedades:

- ✓ La inclinación de ambos es la misma

- ✓ El valor de la inclinación ha de respetar que no pueda alcanzarse la velocidad de la luz, lo que supone (como ya vimos en los problemas de cinemática), que el ángulo que forme el vector con el eje de ordenadas, no iguale ni supere los 45º (valor absoluto).
- ✓ Su módulo al cuadrado se calcula restando al cuadrado de la componente escalar el cuadrado del módulo de la componente vectorial. Dicho módulo es invariante (vale lo mismo en todos los SRI).

2. Partiendo de la invariancia del módulo del cuadrivector dinámico impulso-energía, obtened una ecuación fundamental en la que se relacionen la masa, el impulso y la energía. A continuación, comparando el vector cinemático desplazamiento espacio-tiempo con el vector dinámico impulso-energía, obtened otra expresión en la que se relacione a la velocidad con las magnitudes dinámicas.

El cuadrado del módulo del cuadrivector dinámico impulso-energía $\mathbf{P} = (E, \mathbf{p}\cdot c)$ es:

$$|\mathbf{P}|^2 = E^2 - (\mathbf{p}\cdot c)^2 \;\rightarrow\; P^2 = E^2 - (p\cdot c)^2 \qquad (1)$$

Al ser invariante P^2 se puede adoptar cualquier sistema de referencia para calcularlo. Por ejemplo, en el sistema de referencia propio de la partícula (en cuyo caso γ=1 y p = 0) con lo que resulta:

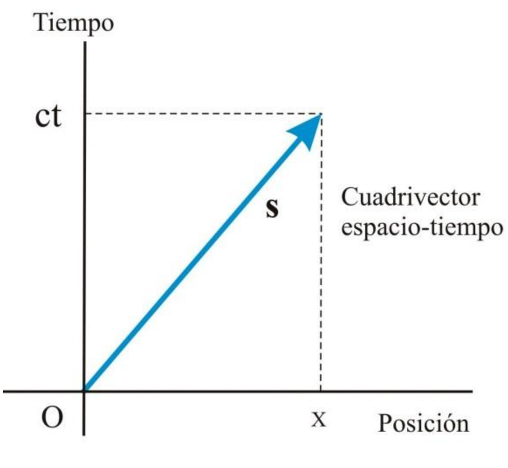
$$P^2 = (m\cdot c^2)^2 \qquad (2)$$

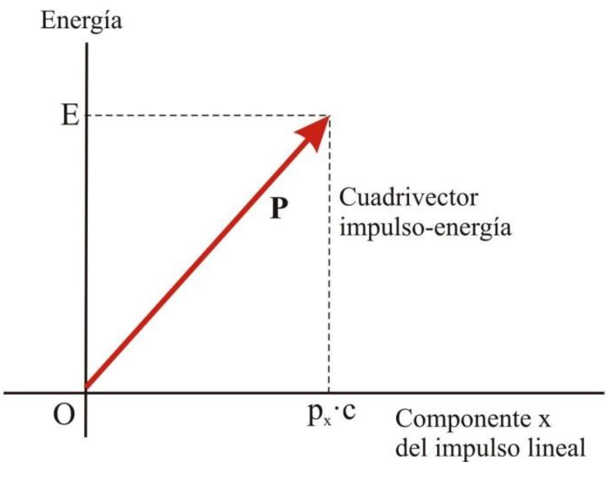
Igualando (1) y (2), se obtiene:

$$E^2 - (p\cdot c)^2 = (m\cdot c^2)^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{E^2 = p^2c^2 + m^2c^4}$$

La ecuación obtenida corresponde a la **ley fundamental de la dinámica** en Relatividad Especial, que relaciona la energía, la masa y el impulso de una partícula. Esta ley se utiliza en Relatividad para estudiar dinámicamente entidades individuales (una partícula, un pulso de luz) y, generalizándola adecuadamente, para estudiar también sistemas más complejos.

Para relacionar la velocidad con las magnitudes dinámicas, partiremos de la representación de los dos vectores en sus correspondientes diagramas que utilizamos en el problema anterior:





Como los dos cuadrivectores son proporcionales, tienen la misma inclinación y podemos establecer directamente la siguiente relación entre sus respectivas componentes:

$$\frac{\Delta x}{c \cdot \Delta t} = \frac{p_x \cdot c}{E}$$

Teniendo en cuenta que la componente x velocidad de la partícula es: $v_x = \Delta x/\Delta t$, la expresión anterior se puede expresar como:

$$\frac{v_x}{c} = \frac{p_x \cdot c}{E} \rightarrow v_x = \frac{p_x \cdot c}{E} \cdot c$$

Y considerando las tres componentes de los vectores **v** y **p**:

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathrm{c}}{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{c}}$$

3. Aplicad la ecuación fundamental de la dinámica relativista a una partícula en el SRI propio de ella e interpretad el resultado obtenido.

En el SRI propio de la partícula ocurre que p = 0. Sustituyendo este valor en la ecuación fundamental se obtiene:

$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \rightarrow E_0 = mc^2$

Como c es una constante universal, esta expresión pone en evidencia una equivalencia entre la masa y la energía propia de la partícula, según la cual esta propiedad física se puede expresar en unidades de masa, como, por ejemplo, kg o, alternativamente, en unidades de energía, como, por ejemplo, J.

La expresión anterior muestra un hecho de una gran importancia:

Un aumento (o una disminución) de la energía propia de un objeto, necesariamente ha de ir acompañado de un aumento (o disminución) de su masa, sea cual sea dicho objeto (desde una partícula elemental hasta un astro). Esto se puede expresar mediante:

$$\boxed{\Delta E_0 = \Delta m \cdot c^2}$$

Conviene tener en cuenta que el hecho de que la masa de un sistema[3] necesariamente aumente (o disminuya) cuando aumente (o disminuya) su energía propia, no cuestiona para nada el que la masa sea invariante, ya que el valor de esa nueva masa, también será el mismo sea cual sea el SRI en el que se encuentre.

En resumen: la masa de un sistema cambia cuando cambia la energía propia de dicho sistema pero no cambia cuando se pasa de un SRI a otro. Es posible, por tanto, modificar la masa de un sistema sin agregarle ni restarle constituyentes, a base de aportarle o restarle energía. Por ejemplo, para modificar la masa de un muelle podemos estirarlo o contraerlo, para modificar la de un gas podemos calentarlo o enfriarlo, etc.

Este contenido energético de la materia pasó desapercibido para la mecánica de Newton ya que en cualquier proceso ordinario destinado a obtener energía útil, debido al elevadísimo

[3] No confundir "sistema" (término utilizado para designar una partícula, un conjunto de partículas o cualquier cuerpo u objeto en general) con "sistema de referencia".

valor de c^2, el cambio de masa asociado (dado por $\Delta m = \Delta E_0/c^2$) era absolutamente indetectable. A continuación se propone un pequeño ejercicio en donde esto queda patente:

4. Un resorte de constante elástica K = 350 N/m se comprime por medio de una fuerza exterior hasta que su longitud disminuye en 20 cm. Calculad el cambio de masa asociado a esta transformación.

Inicialmente el resorte tiene una masa m y por tanto una energía propia $E_0 = mc^2$

A causa del trabajo exterior, su energía propia aumenta en:

$$\frac{1}{2}k \cdot (\Delta x)^2 = \frac{1}{2}350 \cdot 0'2^2 = 7\ \mathrm{J}$$

Este aumento de energía, supone un aumento de masa, el valor del cual será:

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{7}{(3 \cdot 10^8)^2} = 0'78 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{k}g$$

(Es decir, un aumento menor que la diezmilésima parte de una billonésima de 1 kg. Algo, real, pero absolutamente indetectable).

En contrapartida, el altísimo valor de c^2, también permitía pensar en la posibilidad de obtener ingentes cantidades de energía asociadas a la disminución de masa.

5. Calculad la energía equivalente a un gramo de materia. Comparadla con la energía que se puede obtener en la combustión de 1g de butano (masa molar del butano = 58 g/mol, poder calorífico ≈ 700 kcal/mol).

La energía propia correspondiente a un gramo de materia es:

$$E_0 = m \cdot c^2 = 0'001 \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 3 \cdot 10^{14}\ \mathrm{J}$$

Para calcular la energía térmica que se desprende en la combustión de 1g de butano bastará multiplicar el número de moles de butano correspondiente por el poder calorífico que se nos da en el enunciado:

$$n = \frac{m}{M} = \frac{1}{58}\ \text{moles} \rightarrow E = \frac{1}{58}\ \text{moles} \cdot 700\ \frac{\text{kcal}}{\text{mol}} = 12'07\ \text{kcal} = 50452'6\ \text{J}$$

La relación entre ambas cantidades es:

$$E/E_0 = \frac{50452'6}{3 \cdot 10^{14}} = 1'682 \cdot 10^{-10} \rightarrow E = \frac{E_0}{5'946 \cdot 10^{10}}$$

Es decir, que la energía térmica que se desprende al quemar un gramo de butano es casi 6000 millones de veces menor que la energía propia de ese mismo gramo de butano. Por lo tanto, un proceso ordinario de combustión sólo aprovecha una parte insignificante de la masa (o energía equivalente) de ese gramo de butano.

Cuando se desarrolló la teoría de la relatividad y se conoció la ley de equivalencia entre masa y energía, se sugirió rápidamente la idea de que mediante procesos adecuados se podrían obtener cantidades de energía mucho mayores. Esta expectativa, se confirmó poco tiempo después cuando se desarrollaron otras áreas de conocimiento de la física (concretamente la física nuclear y la física de partículas), que estudiaron mecanismos para obtener energía, especialmente reacciones nucleares de fisión y fusión.

6. Considerando que la masa del núcleo de deuterio ^{2}H es de 2'01355 u y la del núcleo de helio ^{4}He es de 4'00150 u. Se pide:

a) Calculad la energía que se obtiene en la fusión de 1g de deuterio para producir helio mediante la reacción: $2\,^{2}_{1}H \rightarrow \,^{4}_{2}He$ y comparadla con la energía propia de ese mismo gramo de deuterio.
b) Calculad la masa total de deuterio que sería necesaria diariamente en una hipotética central de fusión, para que generara una energía de $3'8\cdot10^{13}$ J diarios.

a) En cada reacción tenemos que:

La masa de los dos núcleos de deuterio iniciales es: 2·2'01355= 4'0271 u
La masa del núcleo de helio obtenido es: 4'00150 u
La cantidad de masa-energía que se desprende es: 4'0271- 4'00150 = 0'0256 u

Por tanto, la relación entre la masa-energía "desprendida" y la masa-energía inicial de deuterio en esta reacción nuclear de fusión es:

$$\frac{masa\ desprendida}{masa\ inicial} = 0'0256/4'0271 = 6'357\cdot10^{-3}$$

Esto es aproximadamente un 0'64 % de la masa-energía inicial de deuterio.

Siguiendo con esta misma proporción, en la fusión nuclear de 1g de deuterio se desprende una masa de $6'357\cdot10^{-3}$ g = $6'357\cdot10^{-6}$ kg, lo que equivale a una de energía de:

$E_{obtenida} = m_{desprendida}\cdot c^2 = 6'357\cdot10^{-6}\cdot(3\cdot10^{8})^2 = 5'72\cdot10^{11}$ J

Conviene darse cuenta de la enorme cantidad de energía que se obtiene tan solo a partir de un gramo de deuterio: más de medio billón de julios.

b) Para generar $3'8\cdot10^{13}$ J diarios, la hipotética central nuclear necesitaría consumir tan sólo:

$$3'8\cdot10^{13}/0'572\cdot10^{12} = 66'4 \text{ g de deuterio}$$

En este ejercicio hablamos de una hipotética central nuclear porque la utilización segura y eficiente de estas reacciones de fusión, es todavía una cuestión pendiente. La principal dificultad proviene del hecho de que para que se produzcan estas reacciones es preciso que los núcleos estén a una enorme temperatura (por esto estas reacciones se llaman termonucleares) y, en estas condiciones, es muy difícil mantener a los núcleos controlados en un espacio limitado.

Como se sabe, la fusión nuclear es el mecanismo principal de generación de energía de las estrellas. En su interior las temperaturas son cercanas a 15 millones de Kelvin, pero los núcleos se mantienen ahí porque dada la gran masa que acumula cada estrella, durante mucho tiempo de su proceso evolutivo existe un equilibrio hidrostático entre la fuerza de gravedad que actúa atrayendo el gas estelar hacia el centro y comprimiéndolo, y la presión estelar que esos núcleos ejercen hacia fuera intentando expandir el sistema.

El proceso inverso a la fusión nuclear es la fisión, que sí se ha podido utilizar desde hace ya varias décadas para la producción mundial de energía. La fisión de núcleos pesados es un proceso en el que se liberan cantidades sustanciales de energía, que se emite, tanto en forma de radiación gamma como de energía cinética de los fragmentos de la fisión, calentando la materia que se encuentre alrededor.

7. En cada reacción de fisión de U-235 se liberan aproximadamente 200 MeV. Se pide:

a) Calculad el porcentaje que representa esta energía con respecto a la masa-energía disponible. (Equivalente energético de la unidad de masa atómica, u, 931’5 MeV).
b) Calculad la energía total que se obtiene en una central nuclear como resultado de la fisión de 1 g de U-235 suponiendo que todos los núcleos se fisionan. (N_A = 6’02·10^{23} partículas/mol)

Rdo. a) 0’0914 % b) 5’12·10^{24} MeV

8. Aplicad las leyes fundamentales de la dinámica relativista al caso de un fotón

Podemos empezar aplicando la ley que relaciona la velocidad con las propiedades dinámicas:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p} \cdot c}{E} \cdot c$$

Como el fotón tiene la velocidad c, en módulo, sustituyendo v = c, en la ecuación anterior, se obtiene la siguiente relación entre su impulso y su energía:

$$E_{\text{fotón}} = p \cdot c$$

Si sustituimos esta relación en la ley fundamental de la dinámica:

$$(m \cdot c^2)^2 = E^2 - (p \cdot c)^2$$

obtenemos:

$$m_{\text{fotón}} = 0$$

Es decir, como ya sabíamos, el fotón no tiene masa, pero sí tiene energía e impulso. Así, la relatividad muestra que el hecho de que la luz no tenga masa, no impide que tenga impulso o cantidad de movimiento (dado por p = E/c), de tal forma que cuando interacciona con la materia, la luz, además de poder ser absorbida o emitida por ella, también la empuja.

Este hecho ya era conocido con anterioridad al establecimiento de la relatividad especial y, curiosamente, también es una consecuencia de la teoría electromagnética de Maxwell, que se contrastó experimentalmente al estudiar un fenómeno conocido como “presión de la radiación”: cuando la luz incide, por ejemplo sobre una lámina metálica le ejerce presión; si esa lámina es muy fina y se dispone de modo que pueda girar, la luz que incide sobre ella le provoca un giro y se puede deducir, del ángulo de torsión, el valor del impulso lineal del haz lumínico. El primer experimento cuantitativo sobre este fenómeno lo realizó Lebedev en el año 1901, pero fue algo más tarde cuando Gerlach y Golsen en 1923 obtuvieron las primeras medidas correctas de la presión de la luz.

Como se puede imaginar, la magnitud de la presión que puede ejercer la luz es casi insignificante, tal y como se muestra en el siguiente ejercicio:

9. Calculad la presión que ejerce la luz emitida por una bombilla de 500 W a una distancia de 1 m. Comparadla con la presión que ejerce un libro de bolsillo de 200 g apoyado encima de una mesa con una superficie de 200 cm^2.

La presión del libro de bolsillo apoyado en la mesa es:

$$P_{libro} = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{0'2 \cdot 9'8}{0'02} = 98\ \frac{N}{m^2}$$

El impulso de la luz que emite la bombilla es:

$$\mathrm{p} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{c}} = \frac{\mathrm{Pot} \cdot \Delta \mathrm{t}}{\mathrm{c}} \qquad \text{De donde:} \quad \frac{\mathrm{p}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{\mathrm{Pot}}{\mathrm{c}} = \frac{500}{3 \cdot 10^8} = 1'67 \cdot 10^{-6}\ N$$

Esta luz se propaga en todas las direcciones y a 1m de distancia forma un haz esférico, es decir, se reparte en una superficie de:

$S = 4 \cdot \pi \cdot R^2 = 4\pi\ m^2$ (R= 1m)

Por tanto, ejerce una presión: $P_{luz} = \frac{\frac{p}{\Delta t}}{S} = \frac{1'67 \cdot 10^{-6}}{4\pi} = 1'33 \cdot 10^{-7}\ N/m^2$

Así pues, la presión ejercida por el libro es, redondeando, casi 800 millones de veces mayor que la presión de la radiación de la bombilla ($98/1'33 \cdot 10^{-7} = 7'4 \cdot 10^8 = 740 \cdot 10^6$).

Cabe concebir no obstante situaciones en las que la presión de la luz, aunque sea muy pequeña, pueda tener efectos macroscópicos observables. Un ejemplo de ello son las "velas estelares" que imaginó por primera vez el astrónomo ruso Friedrich Tsander en 1924 y también formaron parte de relatos de ciencia ficción, como uno de Arthur C. Clarke, llamado "El viento del Sol" (1962). Un velero estelar debería ser muy fino y ligero, tener una superficie muy brillante que refleje los fotones para impulsarla, aprovechando la energía de la luz emitida por el Sol o por otras estrellas. Aunque reciba un empuje muy pequeño, éste le podría permitir alcanzar grandes velocidades, dada la ausencia de rozamiento en el espacio.

La primera propuesta en firme para crear una nave propulsada por velas solares fue promovida a finales de los años 1970 por el científico Louis Friedman, de la NASA. Se pretendía enviar una sonda al encuentro del cometa Halley, pero después de un año de estudios se consideró que la tecnología no estaría disponible a tiempo y el programa fue finalmente cancelado. Hasta la fecha (2018), no se ha conseguido lanzar con éxito ninguna nave con velas solares como sistema de propulsión primario, salvo la sonda japonesa IKAROS, lanzada hacia Venus en mayo de 2010 y parcialmente impulsada por una vela de 20 m de lado, y el satélite NanoSail-D puesto en órbita por la NASA, que en enero de 2011 desplegó una vela de 10 m^2 y estuvo orbitando la Tierra durante más de 240 días (para mayor información se puede consultar: https://ciencia.nasa.gov/ciencias-especiales/24jan_solarsail).

10. Supongamos un haz de partículas que se mueve conjuntamente (respecto de un determinado SRI) a una velocidad próxima a la de la luz. Se pide:

a) Energía cinética de una de dichas partículas
b) Comparad la expresión obtenida con la correspondiente de la mecánica de Newton, considerando para ello distintos valores crecientes de la velocidad (0'1c, 0'2c, 0'3c…)
c) Utilizad la expresión obtenida para calcular la energía total, la energía cinética y la cantidad de movimiento de un electrón (energía en reposo 0'511 MeV) que se mueve a velocidad v = 0'8c

Planteamiento e hipótesis

La energía cinética de un haz de partículas no es una propiedad de ellas, sino que depende del SRI con respecto al cual se determina. En el sistema de referencia propio del haz, las partículas están en reposo y la energía cinética del haz es cero. En cualquier otro SRI, las partículas tienen velocidad y la energía cinética es mayor cuanto mayor sea esa velocidad relativa con respecto al SRI adoptado (existiendo como sabemos un límite inalcanzable, dado por la velocidad de la luz c).

En consecuencia, es lógico plantear que la energía cinética de cada partícula del haz dependa de su masa, m, de su velocidad con respecto al sistema de referencia adoptado, v, y del límite superior de velocidades, c. Lo cual se puede expresar como: $E_c = f(m, v, c)$.

Cabe esperar que, a igualdad de los restantes factores:

- ✓ Cuanto mayor sea la masa, m, de la partícula, mayor será su E_c y viceversa. Si la masa tendiera hacia infinito, también debería hacerlo la E_c (siempre que las partículas no estén en reposo). Si la masa tendiera a cero, la energía cinética también debería hacerlo, pero si fuera exactamente m=0, serían partículas de luz (fotones) y, en ese caso, su energía tendrá que ser, independientemente del SRI considerado, $E = p \cdot c$

- ✓ Cuanto mayor sea la velocidad, v, de la partícula mayor ha de ser su E_c y viceversa. En el caso extremo en que $v \rightarrow 0$, la E_c también debería hacerlo. Además, en este caso estaríamos en el límite clásico, donde tiene que ser aplicable la mecánica de Newton y por tanto, la E_c debe tender a ser $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$. En el caso extremo opuesto (v = c) las partículas serían otra vez fotones por lo que su energía vendría dada por: $E = p \cdot c$.

- ✓ Finalmente, si el límite superior de velocidades pudiera aumentar, la energía cinética debería disminuir, ya que aquí lo que cuenta es el cociente v/c. Cuanto mayor sea este cociente (como v ha de ser inferior o, en el caso de la luz, igual a c, su valor máximo es 1) mayor será la energía cinética y cuanto menor sea (o, cuanto mayor fuera c), menor ha de ser la energía cinética. En caso extremo en que $c \rightarrow \infty$, debería ser otra vez aplicable la mecánica de Newton, con lo que, en ese caso, tendríamos: $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

Resolución

En el sistema de referencia propio de cada partícula su energía es:

$$E_0 = m \cdot c^2$$

En cualquier otro SRI, con respecto al cual la partícula tendrá una cierta velocidad, v, su energía vendrá dada por:

$$E = m\cdot\gamma\cdot c^2$$

Siendo el factor gamma:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Por tanto, la energía cinética de la partícula será la diferencia entre las dos anteriores:

$$E_c = E - E_0 = m\cdot\gamma\cdot c^2 - m\cdot c^2 = m\cdot c^2\,(\gamma - 1) \rightarrow \boxed{E_c = m\cdot c^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right)}$$

Comprobad que se cumplen las hipótesis y los casos límite

Conviene detenerse, en primer lugar en el concepto de que si la masa es nula (m=0) hemos de imponer que la velocidad sea la de la luz (v=c), ya que en ese caso la partícula será un fotón. Entonces se obtiene $E_c = 0\cdot\infty$ (indeterminación). Esto es coherente con el hecho de que el fotón tiene una energía $E = p\cdot c$ que no depende del SRI adoptado.

En cuanto a la influencia v y c, el resultado confirma que lo que influye es el cociente v/c y que cuanto mayor sea este cociente (es decir, cuando $v \rightarrow c$, pero sin llegar a ser $v = c$), mayor es el valor de E_c. En el caso extremo opuesto, es decir, cuando $v \rightarrow 0$, para calcular la E_c hay que hacer:

$$Ec = \lim_{\left(\frac{v}{c}\right)\rightarrow 0} m\cdot c^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right)$$

El cálculo anterior resulta más sencillo aplicando el desarrollo del binomio al término:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Para hacerlo hay que recordar que:

$(1+x)^n = 1 + nx +$ términos de base x con exponentes progresivamente superiores (x^2, x^3, etc.)

Como en este caso $x = -\frac{v^2}{c^2}$ y estamos planteando el límite cuando *v/c*→0, los términos de potencias superiores a 1 son despreciables frente al término de exponente unidad y podemos escribir:

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1-\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{v^2}{c^2} = 1+\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$$

Y sustituyendo esta última expresión en la E_c se obtiene:

$$Ec = \lim_{\left(\frac{v}{c}\right)\to 0} m \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) = m \cdot c^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Como era de esperar, se obtiene la expresión correspondiente a la E_c en el marco de la mecánica de Newton.

En el caso opuesto, es decir, al ir aumentando el cociente v/c aumenta también la discrepancia entre el valor de la E_c correcta (relativista) y el que prevé la mecánica de Newton. Para ver en qué grado lo hace vamos ahora a responder a la segunda cuestión del enunciado, la cual replantearemos de la siguiente forma:

Calculad la relación entre energía cinética relativista de una partícula y su energía cinética según la mecánica de Newton para velocidades crecientes de la partícula: 0'1c, 0'2c, 0'3c,…

La relación buscada es:

$$\frac{E_c}{E_{c\ (Newton)}} = \frac{m \cdot (\gamma - 1)c^2}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2} = \frac{2 \cdot (\gamma - 1)c^2}{v^2}$$

Al aplicar esta expresión a las sucesivas velocidades se obtiene:

v	$\frac{E_c}{E_{c\ (Newton)}}$
0'1c	1'01
0'2c	1'03
0'3c	1'07
0'4c	1'14
0'5c	1'24
0'6c	1,39
0'7c	1'63
0'8c	2'08
0'9c	3'20
0'99c	12'42

La tabla anterior muestra la influencia de la velocidad en la discrepancia entre el resultado correcto que proporciona la Teoría de la relatividad y el que proporcionaría la mecánica de Newton. Dicha discrepancia, apenas es apreciable hasta que se alcanzan velocidades comparables a la velocidad de la luz, pero llegados a ese punto aumenta de forma notable (ya que el factor gama tiene una dependencia exponencial con el cociente v/c).

Para terminar, responderemos a última cuestión que plantea el enunciado de este problema.

Calculad la energía total, la energía cinética y el momento lineal (impulso) de un electrón (energía en reposo 0'511 MeV) que se mueve con una velocidad v = 0'8c.

Como E = mγc^2 = $\gamma \cdot E_0$ determinamos γ:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0'8^2}} = \frac{1}{0'6}$$

Sustituyendo:

E = E_0/0’6 = 0’511/0’6 = 0’852 MeV

La energía cinética será: $E_c = E - E_0 =$ 0’852 – 0’511 = 0’341 MeV

La masa: $m = \frac{E_0}{c^2} = \frac{0'511}{c^2} = 0'511\,\frac{MeV}{c^2}$

Y la cantidad de movimiento: $p = m \cdot \gamma \cdot v = \frac{0'511}{c^2} \cdot \frac{1}{0'6} \cdot 0'8c = 0'68\,\frac{\text{MeV}}{c}$

11. Imaginemos una nave de 5000 kg de masa moviéndose en el espacio tan lejos de cualquier astro que podemos ignorar la energía potencial gravitatoria y que queremos que acelere desde v_1 = 43200 km/h hasta v_2 = 0’9c. ¿Cuánta energía haría falta para ello?

En el ejercicio se plantea la situación de una hipotética nave espacial la cual ha de acelerar hasta alcanzar una velocidad muy cercana a la de la luz. Entre los numerosos problemas que se presentarían, podemos destacar dos: El tiempo necesario para alcanzar esa velocidad de crucero sin someter a los tripulantes a una aceleración que no puedan soportar y la cantidad de energía que haría falta para ello. Aquí nos limitaremos a resolver el segundo.

Para calcular la energía que se pide en el enunciado, bastará restar a la energía cinética final, la energía cinética inicial:

$\Delta E = Ec_2 - Ec_1 = mc^2 (\gamma_2 - 1) - mc^2 (\gamma_1 - 1) \rightarrow \Delta E = mc^2 (\gamma_2 - \gamma_1)$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0'9)^2}} = 2'294$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (4 \cdot 10^{-5})^2}} \approx 1$$

Sustituyendo: $\Delta E = 5000 \cdot 9 \cdot 10^{16} \cdot (2'294 - 1) = 5'823 \cdot 10^{20}$ J

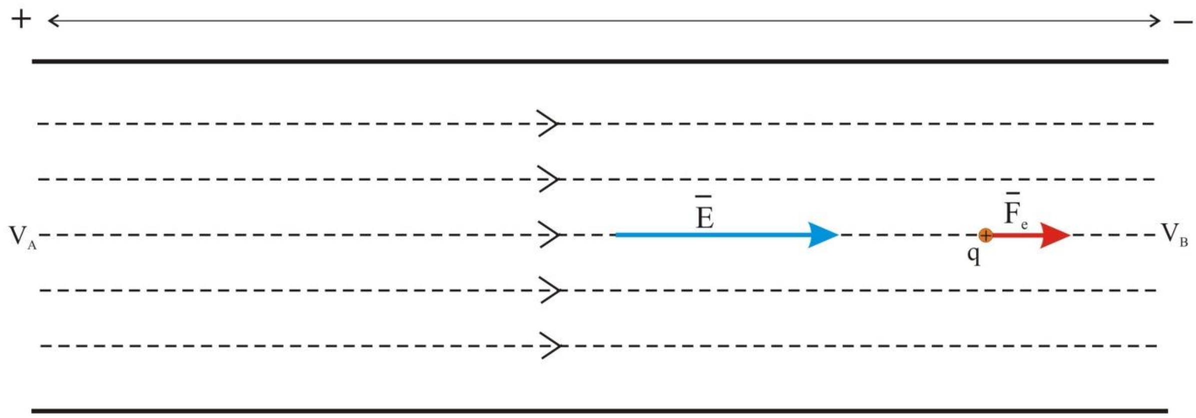
Dicha energía es, por ejemplo, unos 8’5 millones de veces mayor que la liberada en la bomba atómica que arrasó Hiroshima. Para obtenerla quemando carbón, harían falta más de 17000 millones de toneladas y si optase por una reacción nuclear fisionando ^{235}U, sería necesaria la fisión completa de algo más de 7000 toneladas de este isótopo del uranio.

Una breve reflexión sobre los valores anteriores basta para darse cuenta de lo lejos que estamos de poder viajar a velocidades cercanas a la luz.

12. En un acelerador lineal se quiere conseguir que un haz de partículas cargadas adquiera una velocidad elevada. ¿Qué diferencia de potencial eléctrico hay que aplicar?

Planteamiento

Los aceleradores lineales consiguen haces de partículas de alta velocidad que son muy útiles para investigar la estructura subatómica de la materia. En su versión más simplificada están conformados por un tubo largo, en el que se hace el vacío para que las partículas cargadas se puedan desplazar sin encontrar ningún obstáculo. Dentro de dicho tubo se aplica un campo eléctrico, $\vec{E}$, que se produce entre dos o más placas cargadas y que ejerce sobre cada partícula con carga "q" una fuerza eléctrica $\vec{F}_e$ (dada por $\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$), mientras esta avanza por el tubo, tal y como se muestra en la figura siguiente (en la que las líneas punteadas representan las líneas de fuerza del campo eléctrico dentro del tubo y hemos supuesto una partícula con carga positiva).



Si se considera despreciable el peso de la partícula, el trabajo realizado por la fuerza resultante que actúa sobre la misma vendrá dado por:

$$W_{res\,A}^{\;\;B} = W_{campo\,A}^{\;\;B} = \Delta E_c \rightarrow Ep_A - Ep_B = \Delta E_c \rightarrow q \cdot (V_A - V_B) = \Delta E_c$$

Sabemos que las cargas positivas siempre se mueven espontáneamente hacia potenciales decrecientes (como ocurre en la figura anterior), mientras que con las cargas negativas ocurre justo lo contrario. Ello equivale a afirmar que en este tipo de transformaciones (espontáneas) la diferencia $V_A - V_B$ siempre tendrá el mismo signo que q (positivo si q es positiva y negativo si q es negativa), con lo que el producto $q \cdot (V_A - V_B)$ siempre será positivo, lo que permite en la expresión anterior, por comodidad, expresar q en valor absoluto y el valor absoluto de $(V_A - V_B)$ como ΔV, con lo que, si designamos como W el trabajo realizado por la fuerza resultante, podemos escribir que:

$$W = q \cdot \Delta V = \Delta E_c$$

El acelerador suministra una energía eléctrica sobre cada una de las partículas cargadas dada por $W = q \cdot \Delta V$, siendo ΔV la diferencia de potencial eléctrico entre los extremos del acelerador y q la carga de la partícula (ambas en valor absoluto). Dicha energía se convierte en energía cinética de la partícula y la suma de todas ellas en energía cinética del haz de partículas considerado.

Hipótesis

La magnitud que queremos obtener es la diferencia de potencial eléctrico, ΔV, que habrá que aplicar para que una determinada partícula cargada adquiera una cierta velocidad. Suponiendo que dicha partícula esté inicialmente en reposo, es lógico plantear que ΔV dependa del módulo de la velocidad, v, que se quiere que alcance; de la carga, *q*, de la partícula; de su masa, m, y, teniendo en cuenta que existe un límite superior de velocidades, del valor de éste, es decir, de la velocidad de la luz, c. Todo ello se puede expresar como: $\Delta V = f(v, q, m, c)$.

Podemos tratar de precisar un poco más y suponer que:

- ✓ Cuanto mayor sea la masa, m, de la partícula, mayor ha de ser también la diferencia de potencial que se le aplique, ΔV. Mayor masa significa mayor inercia y, por tanto, que sea necesario aportar a la partícula una energía mayor para cambiar su velocidad, desde el reposo. En el caso extremo en que $m \to \infty$, entonces también $\Delta V \to \infty$. En el caso extremo opuesto ($m \to 0$) la diferencia de potencial necesaria también tendería a ser nula.

- ✓ Cuanto mayor sea la carga, *q*, de la partícula, menor podrá ser la diferencia de potencial, ΔV necesaria. Como la energía suministrada es: $W = q \cdot \Delta V$, dicha energía es mayor de por sí, si la carga, *q*, aumenta. Por tanto, en el caso extremo en que $q \to \infty$, entonces $\Delta V \to 0$. En el caso extremo opuesto, $q \to 0$, tendríamos $\Delta V \to \infty$, debiendo precisar que si fuera exactamente $q=0$, la partícula sería neutra y no sería sensible al campo eléctrico, es decir, no se podría acelerar con este dispositivo.

- ✓ Cuanto mayor sea la velocidad, *v*, que se quiera que adquiera la partícula, mayor ha de ser la diferencia de potencial, ΔV, que se aplique. En el caso extremo en que $v \to c$, dicha diferencia de potencial debería ser cada vez más elevada ($\Delta V \to \infty$). En el caso opuesto, es decir, si $v \to 0$, no sería necesario aplicar diferencia de potencial alguna ($\Delta V \to 0$).

Conviene relacionar estas hipótesis acerca de la influencia de la velocidad, v, del haz, con la influencia que también tendría un valor diferente de la velocidad de la luz, c. En efecto, en un hipotético universo donde c pudiera ser mayor, aumentaría la diferencia entre v y c, lo que supone aproximarnos a la situación que concibe la mecánica de Newton, según la cual no existiría un límite superior de velocidades. Aquí lo relevante es el valor del cociente v/c, de tal forma que si $v/c \to 0$ (o, lo que es equivalente, si $c \to \infty$), el resultado del problema debería ser el que proporciona la mecánica newtoniana, donde la energía cinética, como sabemos, viene dada por: $\frac{1}{2} m v^2$. En este último caso, si igualamos dicha energía a la energía eléctrica aportada, se obtiene:

$$\tfrac{1}{2} m v^2 = q \cdot \Delta V \;\to\; \Delta V = mv^2/2q$$

Resolución

Como hemos considerado que las partículas parten del reposo, la energía que tiene cada una de ellas antes de que se les aplique el potencial eléctrico es:

$$E_0 = m \cdot c^2$$

Esta energía se va incrementando a medida que avanzan acelerando por el tubo y al final de él, cuando alcanzan una determinada velocidad, v, es:

$$E = m \cdot \gamma \cdot c^2$$

Siendo el factor gamma:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Por tanto, la energía cinética que adquieren las partículas, corresponderá exactamente a la diferencia entre las dos energías anteriores. Esto es:

$E_c = E - E_0 = m{\cdot}\gamma{\cdot}c^2 - m{\cdot}c^2 = m{\cdot}c^2\ (\gamma - 1) = m \cdot c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right]$

Para obtener la diferencia de potencial eléctrico sólo falta igualar la energía suministrada por el acelerador (q·ΔV) a esta dicha energía cinética y luego despejar, ΔV:

$$q \cdot \Delta V = m \cdot c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right] \rightarrow \Delta V = (m/q) \cdot c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right]$$

Análisis del resultado

Es muy sencillo comprobar que se cumplen las hipótesis y los casos límite que hemos planteado relativos a la influencia por separado de la carga, *q*, y de la masa, *m*, de la partícula. Conviene tener en cuenta que si la masa fuese nula (*m* = 0), deberíamos imponer la condición que la carga también lo fuese (*q* = 0). En este caso la partícula sería un fotón y el resultado obtenido una indeterminación, lo cual es coherente con el hecho de que un fotón viajaría, en su caso, a la velocidad de la luz con independencia de cual fuese la diferencia de potencial aplicada.

En cuanto a la influencia de las velocidades, v y c, el resultado confirma que lo que influye es el cociente v/c y que cuanto menor sea dicho cociente (es decir, cuando v → c, pero sin llegar a ser v = c) mayor ha de ser la diferencia de potencial ΔV. En el caso extremo opuesto, es decir, cuando v → 0, para calcular ΔV hay que hacer:

$$\Delta V = \lim_{\left(\frac{v}{c}\right)\to 0} \left(\frac{m}{q}\right) \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right) \quad (1)$$

Al igual que hicimos en el problema 5, el cálculo anterior resulta más sencillo si aplicamos el desarrollo del binomio al término:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Y, teniendo en cuenta que estamos planteando el límite cuando *v/c*→0, obtenemos:

$$(1 - v^2/c^2)^{-1/2} \approx 1 + \tfrac{1}{2}\, v^2/c^2 \quad (2)$$

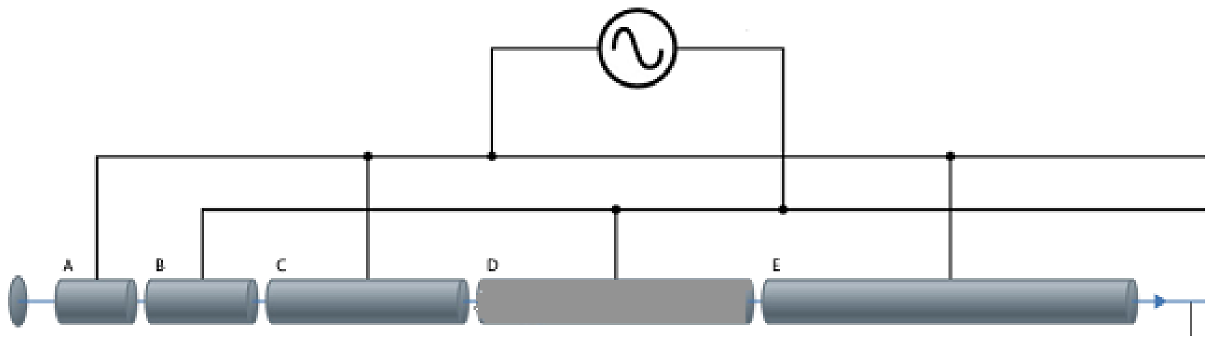
Para terminar este análisis, solo falta sustituir (2) en (1), con lo que se obtiene:

$$\Delta V = \lim_{\left(\frac{v}{c}\right)\to 0} \left[\frac{m}{q}\right] \cdot c^2 \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right] = \left[\frac{m}{q}\right] \cdot c^2 \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} - 1\right] \rightarrow \Delta V = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{q} \cdot v^2$$

Tal y como se esperaba se obtiene el mismo resultado que prevé la mecánica de Newton.

Ampliación

En realidad, los aceleradores de altas energías son más sofisticados que el modelo totalmente simplificado que hemos planteado aquí. De hecho, se pueden esquematizar mejor mediante el dibujo adjunto, en el que, en lugar de por un solo tubo, el haz de partículas cargadas, va pasando sucesivamente por el interior de varios tubos metálicos de longitud creciente, A, B, C, D, E,.., que están conectados a una tensión alterna.



Para entender cómo funciona este sistema más complejo podemos suponer que se quiere acelerar un haz de partículas de carga positiva. Entonces, cuando se emite el haz, el primer tubo A tiene carga negativa y lo atrae produciéndole una aceleración antes de que el haz penetre en el tubo. Cuando el haz viaja por el interior del tubo, lo hace pasando justo por su eje, ya que el tubo lo atrae con la misma fuerza eléctrica en todas las direcciones y, por tanto, no modifica su trayectoria. Justamente cuando el haz llega al punto medio del tubo A cambia el sentido de la corriente que alimenta todos los tubos lo que provoca que el tubo A, que tenía carga negativa, tenga carga positiva, el tubo B pase a tener carga negativa, el C positiva, etc. De esta manera, cuando el haz sale del tubo A, es repelido por él y es atraído por el tubo B, lo que implica que el haz es acelerado en su trayecto de A hacia B. El mismo proceso se repite en cada etapa, es decir, cuando el haz llega a la mitad del tubo B, vuelve a cambiar de sentido de la corriente. B pasa a tener carga positiva, y A y C vuelven a tener carga negativa. Así cuando el haz sale del tubo B, es repelido por él y atraído por C, con lo que vuelve a ser acelerado al pasar de B a C. Y así sucesivamente. Cada nuevo tubo tiene una longitud mayor que el anterior, porque la carga de los tubos cambia de signo a intervalos de tiempo iguales (determinados por la frecuencia de la corriente alterna que los carga) y en cada nueva etapa el haz viaja a mayor velocidad.

Teniendo en cuenta este modelo, para resolver un problema real, deberíamos ir considerando sucesivamente el tránsito de las partículas cargadas por el interior de cada uno de los tubos y, entre otras consideraciones, habría que tener en cuenta, cuando menos, que el haz ya penetra en cada tubo con una velocidad inicial no nula.

Diremos para terminar que el acelerador lineal más largo del mundo es el colisionador Stanford Linear Accelerator (SLAC), ubicado al sur de San Francisco. Acelera electrones y positrones a lo largo de algo más de 3 km y los dirige hacia varios blancos, anillos y detectores ubicados en su finalización. Se construyó originalmente en 1962, y se ha ido ampliando y mejorando para seguir siendo uno de los centros de investigación de Física de partículas más avanzados del mundo. Los experimentos realizados en el centro han ganado el premio Nobel en nueve ocasiones.

13. En un sincrotrón se aceleran electrones para la producción de haces intensos de rayos X que se emplean en experimentos de Biología, Física, etc. En el sincrotrón ALBA (sito en Barcelona) se aceleran los electrones hasta una velocidad tal que su energía es 6000 veces el valor de su energía propia. Calculad la velocidad que alcanzan los electrones y su energía (Datos: $c = 3\cdot10^8$ m/s, masa del electrón $m = 9'1\cdot10^{-31}$ kg).

Sabemos que la energía (total) de uno de esos electrones vendrá dada por:

$E = m \cdot \gamma \cdot c^2$

Teniendo en cuenta que, como se indica en el enunciado $E = 6000\cdot E_0 = 6000\cdot mc^2$, la expresión anterior queda como:

$6000\cdot m\cdot c^2 = m \cdot \gamma \cdot c^2 \;\rightarrow\; \gamma = 6000$

Conociendo el factor γ podemos calcular la velocidad v buscada (contenida en la propia expresión de dicho factor):

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} \rightarrow c^2 - v^2 = \frac{c^2}{\gamma^2} \rightarrow v^2 = c^2 \cdot \left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right) = c^2 \cdot \left(1-\frac{1}{36\cdot10^6}\right)$$

Y operando, se obtiene finalmente: $v = 0'999999986\cdot c$

Como vemos, los electrones alcanzan una velocidad muy elevada.

Con esta velocidad, la energía de cada electrón es:

$E = m \cdot \gamma \cdot c^2 = 9'1\cdot10^{-31} \cdot 6000 \cdot (3\cdot10^8)^2 = 4'9\cdot10^{-10}$ J

Podemos apreciar el orden de magnitud de esta energía comparándola, por ejemplo, con la energía que adquirir un electrón cuando se acelera entre dos placas cargadas, entre las que hay una diferencia de potencial eléctrico de 1V (es decir, con 1 eV).

Como $W = q\cdot\Delta V$ tenemos que $1\ eV = 1'6\cdot10^{-19}\ C\cdot1V = 1'6\cdot10^{-19}$ J

Se puede comprobar que la obtenida en el sincrotrón ALBA es del orden de 3000 millones de veces mayor que cuando se acelera con las dos placas mencionadas.

Por tanto la energía de los electrones en el ciclotrón Alba es:

$$E = \frac{4.9 \cdot 10^{-10}\mathrm{J}}{1.6 \cdot 10^{-19}\mathrm{J/eV}} = 3062500000eV$$

Es decir, aproximadamente 3GeV.

Ampliación: ALBA consta de un acelerador de partículas lineal y un sincrotrón. En ellos se aceleran los electrones hasta velocidades próximas a la de la luz, alcanzando una energía de hasta 3 GeV. Los electrones se inyectan en un anillo de almacenamiento de 270 metros de perímetro. Este está equipado para producir radiación electromagnética de un continuo de longitudes de onda, desde la luz visible hasta los rayos X.

La radiación obtenida es útil no sólo en investigaciones en el campo de la Física, sino también en todos los campos de la ciencia y la tecnología en los que hay que analizar muestras de pequeñas dimensiones como estructuras cristalinas, nuevos materiales, muestras biológicas, de contaminantes o restos arqueológicos. También puede tener aplicaciones en el diseño de nuevos fármacos y en imagen y terapias médicas.

14. Pensad como se puede extender la ley fundamental de la dinámica relativista a sistemas formados por varias partículas (por ejemplo, un gas, un átomo, una molécula, etc.). Comparad el proceso con el equivalente en la mecánica de Newton.

Un sistema es un conjunto de entidades (pueden ser partículas con masa como electrones, neutrones, protones, o, también, fotones) que, eventualmente, pueden o no interaccionar entre sí. Los sistemas susceptibles de adecuarse a esta definición (por ejemplo, un átomo) a menudo componen otros sistemas más complejos (como una molécula); estos, a su vez, componen otros aún más complejos (como un gas), etc. Por ello, el proceso de extensión de los conceptos físicos a los sistemas ha de garantizar que globalmente se les pueda considerar a su vez como nuevas entidades físicas individuales que se tienen que describir con las mismas magnitudes que describen a las partículas simples y a las que se han de poder aplicar también las mismas leyes fundamentales que se aplican a las partículas simples.

Esto significa que en dinámica un sistema ha de tener, como tienen las partículas, una masa, m; un impulso lineal, **p** y una energía, E. El sistema (en adelante "sis") además ha de cumplir las leyes fundamentales de la dinámica, lo que significa que se ha de verificar la ley:

$$E_{sis}^2 = (p_{sis} \cdot c)^2 + (m_{sis} \cdot c^2)^2$$

Teniendo en cuenta estas consideraciones hay que definir las magnitudes del sistema a partir de las de sus componentes.

Antes de hacerlo vamos a recordar escuetamente cómo se sigue este proceso en la mecánica de Newton. Ahí, lo primero que hemos de decir es que las tres magnitudes son aditivas, es decir, para un sistema de N partículas (1, 2, 3,..) las magnitudes globales se definen en la mecánica newtoniana así:

$$\mathbf{p}_{\text{sis (m. newtoniana)}} = \mathbf{p_1} + \mathbf{p_2} + \mathbf{p_3} + \ldots$$

$$E_{\text{sis (m. newtoniana)}} = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$$

$$m_{\text{sis (m. newtoniana)}} = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots$$

En la mecánica de Newton, estas tres definiciones son adecuadas porque con ellas la ley fundamental $\mathbf{F_{res}} = m \cdot \mathbf{a}$ (y los principios de conservación que se asocian a ella) se escriben igual en cualquier SRI, tanto para cada partícula individual como para el sistema global, entendiendo que al sistema global se le aplica dicha ley fundamental en su centro de masas. Todo esto es posible gracias a que, en virtud del principio de acción y reacción, al contabilizar la suma de todas las fuerzas que se aplican sobre todas las partículas que forman el sistema, se anulan todos los pares de fuerzas interiores ejercidas entre ellas, con lo que la fuerza resultante que se ejerce sobre el sistema es exactamente igual a la suma de todas las fuerzas exteriores que se ejerzan sobre él (para más información ved tema 5 del libro "Problemas de Física" accesible en didacticafisicaquimica.es).

Vamos ahora a trasladar este proceso de extensión de las magnitudes a sistemas, en el marco de la Teoría de la Relatividad. La primera y gran diferencia que nos encontramos es el hecho de que en Relatividad las tres magnitudes que usamos para describir a cada partícula y que queremos extender al sistema (masa, m; energía, E, e impulso lineal, **p**) son interdependientes, porque aparecen combinadas en la definición del impulso-energía, **P**, dado por $\mathbf{P} = (E\ ,\ \mathbf{p}\cdot c)$.

En consecuencia, el proceso de generalización de estas magnitudes para aplicarlas a sistemas, ha de tratarlas conjuntamente, pues cualquier definición que generalice alguno de estos conceptos afectará al resto. En este sentido, la magnitud clave, aquella que pone en evidencia la interdependencia de todas las demás, es el vector impulso-energía, **P**, motivo por el cual resulta adecuado <u>definir</u> el concepto de impulso-energía de un sistema y después estudiar cómo afecta esta definición a las magnitudes de las que depende. Esta definición es, simplemente:

$$\mathbf{P}_{sis} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \ldots$$

La suma de los vectores se efectúa sumando respectivamente sus componentes de energía e impulso lineal. Por lo tanto, resulta de esta definición que la energía del sistema, E_{sis}, es igual a la suma de las energías de los componentes y que el impulso lineal del sistema, $\mathbf{p}_{sis}$, también es igual a la suma de los impulsos lineales de los componentes:

$$E_{sis} = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots \quad (1)$$

$$\mathbf{p}_{sis} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \ldots \quad (2)$$

Es decir, la energía y el impulso relativistas son, igual que ocurre en la mecánica de Newton, magnitudes aditivas.

Ya hemos dicho que, puesto que el sistema es una nueva entidad física, se le ha de poder aplicar la ley fundamental de la dinámica:

$$E_{sis}^2 = (\mathbf{p}_{sis}\cdot c)^2 + (m_{sis}\cdot c^2)^2 \quad (3)$$

El cumplimiento conjunto de todas estas premisas [es decir, de las expresiones (1), (2) y (3)] tiene, como veremos en los problemas siguientes, una consecuencia fundamental:

<u>En relatividad, la masa no es una magnitud aditiva, es decir, la masa de un sistema no es, en general, igual a la suma de las masas de sus componentes.</u>

Esta diferencia entre la masa de un sistema y la suma de las masas de todos sus componentes adquiere un significado físico relevante, cuando se relaciona con la equivalencia entre masa y energía.

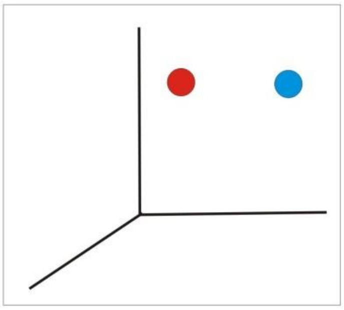
Nota: Al definir el impulso-energía de un sistema hay que tener en cuenta que las partículas, con independencia de que interaccionen o no entre sí, pueden emitir o absorber energía que fluya de forma continua. Pensemos, por ejemplo, en una partícula cargada como un electrón acelerado y emitiendo radiación electromagnética. Si la aceleración del electrón es relativamente pequeña, dicha radiación se propaga por el espacio de forma continua, porque en este caso prevalece su carácter ondulatorio respecto del comportamiento corpuscular de los fotones que componen dicha radiación. Por ello, estrictamente el impulso-energía de un sistema debe considerar las contribuciones de los impulsos-energía de cada uno de sus componentes y también una contribución que tenga en cuenta la energía que eventualmente pueda fluir en forma de campo. Operativamente, esto significa que el impulso-energía de un sistema se calcula sumando los impulsos-energía de cada componente más un término adicional que tiene en cuenta la mencionada energía que fluye en forma de campo. Para el estudio de problemas que requieren tener en cuenta este término adicional es necesario entrar en el dominio de la teoría de campos, algo que excede, con mucho, el nivel de estos ejercicios. Afortunadamente, es posible acotar un conjunto muy amplio de problemas en los que la energía radiada tiene por soporte los cuantos asociados al campo correspondiente (por ejemplo, fotones si se trata de radiación electromagnética). En estos casos todos los flujos de energía son asimilables a flujos de entidades corpusculares, con lo que se obvia el término adicional y se utiliza una expresión simple del impulso-energía de un sistema igual a la suma de los impulsos-energía de cada uno de sus componentes corpusculares: $\mathbf{P}_{sis} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + ...$

15. Dado un sistema formado por dos partículas libres (1 y 2), se pide: Representad sus vectores impulso-energía en un diagrama (E, $p_x \cdot c$) y a continuación comparad la masa del sistema con la suma de las masas de las partículas, en los siguientes casos:

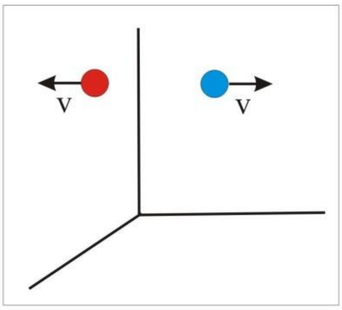
a) Suponiendo que las dos partículas se hallan en reposo relativo
b) Suponiendo que las dos partículas están en movimiento relativo

Planteamiento e hipótesis

Si las dos partículas están en reposo relativo, tienen la misma velocidad, **v**, con respecto a cualquier sistema de referencia y siempre se puede adoptar uno con respecto al cual ambas estén en reposo. La separación entre ellas es constante, como si formaran parte de un cuerpo rígido. Podemos pensar por ello que componen una sola entidad y es lógico esperar que su masa (la masa de esa entidad) sea igual a la suma de las masas de cada partícula: $m_{sis} = m_1 + m_2$.



En cambio, si las dos partículas están en movimiento relativo, sus velocidades con respecto a cualquier sistema de referencia son distintas y siempre se puede encontrar uno con respecto del cual las dos partículas se muevan en la misma dirección y en sentidos opuestos (pensemos, por ejemplo, en lo que sucede cuando por una carretera recta se mueve una moto a 80 km/h seguida de un coche a 60 km/h que a su vez va seguido de otra moto a 40 km/h y tomamos el coche como sistema de referencia).



Podemos pensar, pues, que este sistema, a diferencia del anterior, está compuesto de dos partículas libres y, por tanto, que tiene una energía interna, equivalente, por ejemplo, a la energía interna cinética que tiene un gas ideal (formado por muchísimas moléculas, en lugar de solo dos) resultado de sumar las energías cinéticas de todas las moléculas que lo componen. Este razonamiento permite suponer (en base a la equivalencia entre energía y masa) que la masa de este sistema sea mayor que la suma de las masas de las dos partículas que lo componen:
$m_{sis} > m_1 + m_2$

Resolución

Siguiendo la indicación del enunciado, vamos a representar en el diagrama dinámico los vectores impulso-energía de las dos partículas en el sistema de referencia propio, ligado a cada una de ellas y en un sistema de referencia "exterior", con respecto al cual ambas están en movimiento.

Como ya sabemos, en cualquier caso se cumple que: $\vec{P}_{sis} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$ y que: $P_{sis} = m_{sis} \cdot c^2$

a) Las dos partículas están en situación de reposo relativo

En el sistema de referencia propio (K) el impulso de las dos partículas es cero (y al estar en reposo, $\gamma = 1$) y sus vectores dinámicos quedan ubicados sobre el eje vertical de energía, siendo:

$$\vec{P}_{sis} = (m_1 \cdot 1 \cdot c^2 \ , 0) + (m_2 \cdot 1 \cdot c^2 \ , 0) = (m_1 c^2 + m_2 c^2 \ , 0)$$

$$P_{sis} = (m_1 + m_2) \cdot c^2 = m_{sis} \cdot c^2 \rightarrow m_{sis} = m_1 + m_2$$

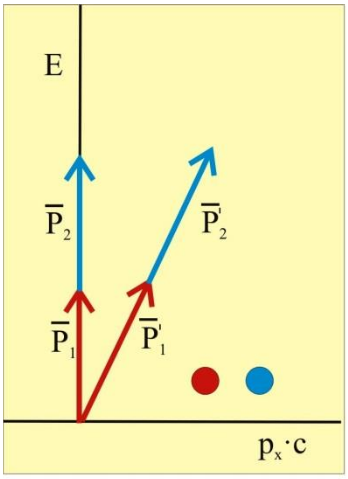
En cualquier otro sistema de referencia (K') tendremos:

$$\vec{P}'_{sis} = (m_1 \gamma' c^2 \ , \ m_1 \gamma' v'_x \cdot c^2) \ + \ (m_2 \gamma' c^2 \ , \ m_2 \gamma' v'_x \cdot c^2)$$

Ahora, las componentes son mayores que en reposo (mayor longitud aparente) pero el módulo (que es un invariante) es el mismo. Como las componentes son proporcionales, los vectores tienen la misma dirección, por lo que, podemos escribir que:

$$P'_{sis} = P'_1 + P'_2 = P_1 + P_2 = (m_1 + m_2) \cdot c^2$$

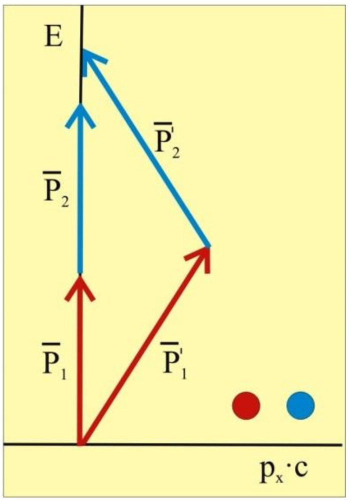
Por tanto: $m_{sis} \cdot c^2 = (m_1 + m_2) \cdot c^2 \rightarrow m_{sis} = m_1 + m_2$



Así pues: Cuando las partículas de un sistema se hallan en reposo relativo, la masa del sistema coincide con la suma de las masas de las partículas que lo forman.

b) Las dos partículas están en situación de movimiento relativo

Como ahora las dos partículas están en movimiento relativo, siempre es posible adoptar sistemas de referencia exteriores respecto de los cuales se muevan en sentidos contrarios y existe uno en particular (que denominaremos como K') en el que tienen la misma velocidad pero con sentidos opuestos. Para simplificar el razonamiento, consideraremos que $m_1 = m_2$. En ese caso, al dibujar los vectores dinámicos respecto de ese sistema de referencia (inclinados) y compararlos con los correspondientes en los sistemas de referencia propios de las dos partículas (sobre el eje de energías) se obtiene la gráfica siguiente:



En este caso, se cumple que:

$$\overline{P}'_{sis} = (E'_1 \, , \, p'_x \cdot c) + (E'_2 \, , -p'_x \cdot c) = (E'_1 + E'_2 \, , \, 0)$$

$$P'_{sis} = E'_1 + E'_2 = m_1\gamma' c^2 + m_2\gamma' c^2 = (m_1 + m_2)\cdot\gamma' c^2 > (m_1 + m_2)\cdot c^2$$

Luego: $m_{sis}\cdot c^2 > (m_1 + m_2)\cdot c^2 \;\rightarrow\; m_{sis} > m_1 + m_2$

Por tanto: Cuando las partículas de un sistema se hallan en movimiento relativo, la masa del sistema es mayor que la suma de las masas de las partículas que lo forman.

Análisis de resultados

Los resultados obtenidos avalan el planteamiento inicial. Podemos afirmar que en general la masa de un sistema de partículas no es igual a la suma de las masas de sus componentes. En el caso que acabamos de ver, estos componentes son dos partículas libres y, se obtiene que la masa del sistema es mayor que la suma de las masas de cada una de ellas. La diferencia proviene de las energías cinéticas que tienen esas partículas (respecto de su centro de masas).

Si generalizamos el resultado para considerar un sistema de N partículas (sería asimilable a un gas ideal), tendremos que:

$$m_{gas} = \sum m_i + \sum E_{ci}/c^2 = \sum m_i + U/c^2$$

Así, podemos aumentar la masa del gas incrementando su energía interna (U), es decir, calentándolo, o podemos disminuirla haciendo que decrezca su energía interna, es decir, enfriándolo.

Para reforzar los conceptos involucrados en este problema se puede trabajar con dos animaciones interactivas de la página Web de Materiales Didácticos de la Sección Local de Alicante (SLA) de la Real Sociedad Española de Física (RSEF). Están disponibles aquí: http://rsefalicante.umh.es/TemasRelatividad/relatividad22.htm. El usuario puede modificar la velocidad del movimiento relativo de las partículas y ver cómo afecta a la masa del sistema.

16. Interpretad procesos en los que podría variar la masa (energía propia) de:

a) Un muelle
b) Un dipolo eléctrico
c) Un átomo

Se puede extender el resultado del problema anterior a cualquier sistema de partículas, sean éstas libres o ligadas y tengan, por tanto, energía positiva o negativa respectivamente.

a) Considerando el muelle como un sistema de partículas, no es lo mismo que el muelle esté en equilibrio que esté estirado (o contraído), ya que cuando se estira (o se contrae) el muelle, se le aporta energía potencial elástica. Es decir:

$m_{est} = m_{eq} + E_p/c^2$ (donde m_{est} = masa estirado y m_{eq} = masa en equilibrio)

En este caso, como $Ep = Kx^2/2 > 0$, se obtiene que $m_{est} > m_{eq}$

La energía que se comunica al muelle estirándolo o contrayéndolo es $Kx^2/2$ y se almacena en el muelle como energía potencial (E_p), donde K es la constante elástica del muelle y x es el alargamiento (o contracción) experimentado[4]. Evidentemente, para los valores habituales de "K" y de "x", el aumento de masa del muelle es realmente insignificante, debido al valor tan elevado de c^2. Para comprobarlo, se puede realizar el siguiente ejercicio:

Un muelle de constante elástica 5000 N/m se comprime 80 cm. Determinad la variación que se producirá en su masa. Rdo. $\Delta m = 1'78\cdot10^{-14}$ kg. (Inapreciable en cualquier balanza).

Para reforzar los conceptos involucrados esta cuestión se puede usar una animación interactiva de la página Web de Materiales Didácticos de la Sección Local de Alicante (SLA) de la RSEF (disponible aquí: http://rsefalicante.umh.es/TemasRelatividad/relatividad18.htm). Permite al usuario modificar la temperatura de un cuerpo que cuelga de un muelle y ver cómo cambia la agitación interna de sus partículas y, por tanto, su masa y la elongación que produce en el muelle.

b) En el caso de un dipolo eléctrico (dos partículas cargadas con cargas de signo opuesto, ligadas y separadas por una pequeña distancia), considerando que las dos cargas permanecen en reposo, tenemos:

$$m_{dip} = m_{q1} + m_{q2} + E_p/c^2$$

[4] Atención: La expresión $kx^2/2$ será la Ep elástica del muelle para cualquier sistema que se desplace (respecto de él) con v mucho menor que c. Si v se aproxima a "c" la Ep elástica tiene otra expresión más complicada, cuyo valor sería el mismo para todos los observadores inerciales.

La energía potencial eléctrica se calcula mediante la expresión: $E_p = (K \cdot q_1 \cdot q_2)/r^2$ en la que, como sabemos, K es la constante electrostática del medio y r la distancia entre las cargas que forman el dipolo. En dicha expresión cada carga lleva su signo correspondiente, de modo que al tratarse de dos cargas de distinto signo, dicha energía potencial es negativa. Por tanto, para cualquier separación no infinita entre las partículas tenemos que:

$m_{dip} < (m_{q1} + m_{q2})$

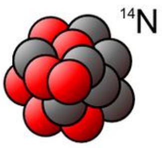
Para afianzar este concepto podemos imaginar que las dos cargas que forman el dipolo eléctrico estuvieran inicialmente separadas por una determinada distancia. Si a partir de esta disposición inicial la fuéramos alejando, deberíamos para ello ejercer una fuerza contraria a la fuerza de atracción eléctrica entre ellas, es decir, deberíamos ir aportando al dipolo una energía positiva. Cuando la energía aportada fuera igual a la energía potencial eléctrica inicial del dipolo (en valor absoluto), las dos cargas, si no adquieren velocidad, tendrían que estar separadas a una distancia infinita y, la suma de sus masas sería entonces igual a la masa del dipolo.

c) Suponiendo que fuera correcto el modelo atómico de Rutherford, la masa de un átomo sería igual a la suma de las masas de sus nucleones (protones y neutrones) y de sus electrones, mas las masas equivalentes a las energías cinéticas de los electrones, las energías potenciales eléctricas de los pares electrón-núcleo y las energías potenciales nucleares de los pares de nucleones.

$$m_{átomo} = \sum m_{núcleo} + \sum m_{elec} + \sum E_{c\ elec}/c^2 + \sum E_{p\ nucleo\text{-}elec}/c^2$$

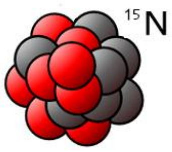
En este caso, la energía cinética de todos los electrones (positiva) es mucho menor que el valor absoluto de la suma de todas las energías potenciales (que es negativa), entre las cuales son particularmente apreciables las energías potenciales nucleares. Por eso, la masa del átomo es inferior a la suma de las masas de sus constituyentes y se trata de un sistema ligado. La diferencia entre la suma de las masas de las partículas que constituyen un átomo y la masa del átomo se denomina **defecto de masa** o **energía de enlace** del átomo y explica su mayor o menor estabilidad. Análogamente, la diferencia entre la masa de un núcleo y la suma de las masas de sus constituyentes, está relacionada con la estabilidad de dicho núcleo, como podemos ver a través del siguiente ejercicio:

Las masas atómicas del $^{14}_{7}N$ *y del* $^{15}_{7}N$ *son 13'99922 u y 15'000109 u, respectivamente. Determinad la energía de enlace de ambos en MeV y decid cuál es más estable (Datos: masa neutrón = 1'008665 u, masa protón = 1'007276u, 1u = 931 MeV)*



Suma de las masas de los protones: 7·1'007276 = 7'050932 u.
Suma de las masas de los neutrones: 7·1'008665 = 7'060655 u.
Suma de las masas de todos los nucleones: 14'111587 u

masa-energía de enlace del N-14: 13'99922 – 14'111587 = - 0'112367 u = - 104'61 MeV



Suma de las masas de los protones: 7·1'007276 = 7'050932 u
Suma de las masas de los neutrones: 8·1'008665 = 8'06932 u
Suma de las masas de todos los nucleones: 15'120252 u

masa-energía de enlace del N-15: 15'000109 – 15'120252 = - 0'120143 u = - 111'85 MeV

A partir de estos resultados, para evaluar la estabilidad de cada núcleo se ha de tener en cuenta que la energía de enlace de cada uno se emplea en ligar entre sí a todas las partículas que lo componen, de modo que se ha de repartir entre todas ellas. El núcleo más estable será aquel que tenga un valor mayor (absoluto) de la energía de enlace por cada nucleón.

Energía de enlace por nucleón del N-14: 104’61/14 = 7’472 MeV/nucleón

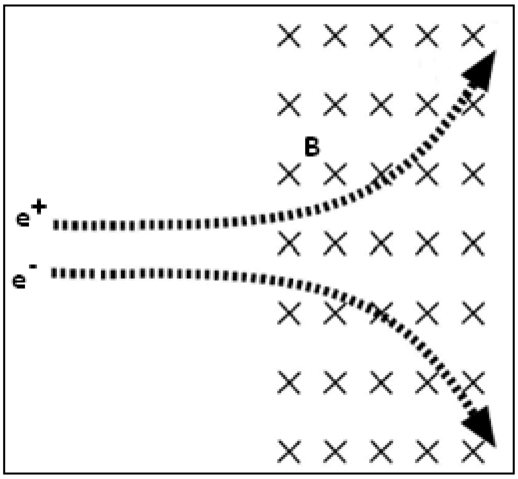
Energía de enlace por nucleón del N-15: 111’85/15 = 7’457 MeV/nucleón

Por tanto, el isótopo N-14 es más estable que el isótopo N-15.

Ampliación

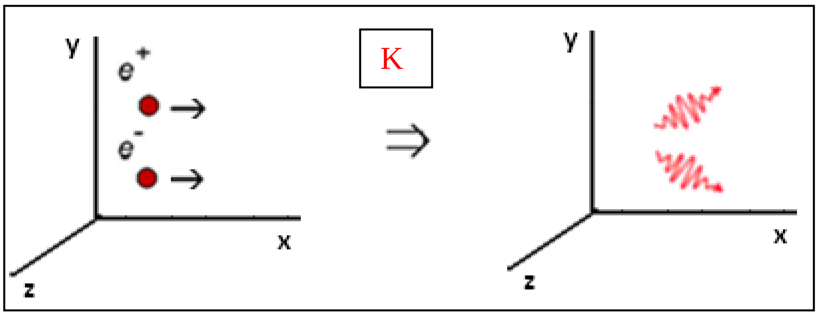
El N-14 y el N-15 son los dos únicos isótopos estables que existen del nitrógeno. El N-14, se produce en el ciclo carbono-nitrógeno de las estrellas. Además de ser el isótopo más estable, es el que se encuentra, con mucha diferencia, en mayor proporción (99’634 %). Por su parte, el nitrógeno-15 se produce también en las estrellas a partir del ^{15}O por desintegración beta. Se han sintetizado otros diez isótopos del nitrógeno. De ellos, uno tiene un periodo de semi-desintegración de nueve minutos (el N-13), y el resto de segundos o menos.

17. En 1932 Karl Anderson descubrió en una placa fotográfica, expuesta a los rayos cósmicos y sometida a un campo magnético, dos trazas que surgían de un punto común y correspondían a un electrón y a una partícula entonces desconocida y luego identificada como un positrón o antielectrón (figura adjunta). Posteriormente se supo que, en ciertas condiciones, el electrón y el positrón se pueden aniquilar produciendo fotones ¿Cuántos fotones se pueden crear en este proceso de aniquilación y cómo se moverán? ¿Cuál será su energía (en MeV) y su frecuencia?

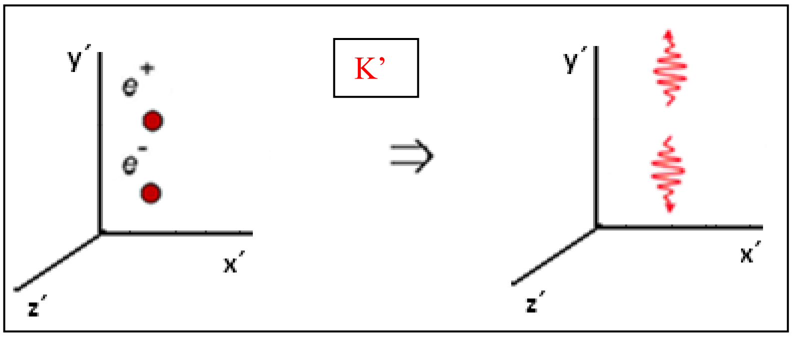


Planteamiento:

Conviene saber que el proceso de aniquilación es un proceso complejo, ya que, en realidad la colisión de una partícula con su antipartícula produce en primera instancia un pión neutro el cual rápidamente se descompone en los dos rayos gamma. No obstante, para resolver este problema, es correcto ignorar este estado intermedio y proceder como si el positrón y el electrón interaccionasen yendo a la misma velocidad. En ese caso, como el electrón y el positrón tienen la misma velocidad y esta velocidad es necesariamente inferior a c, para que se cumpla el principio de conservación del impulso-energía no se puede obtener un solo fotón, sino que tendrán que crear dos (o más), con la misma energía y cuyas componentes del impulso perpendiculares a la dirección inicial de las dos partículas se compensen. Con respecto al sistema de referencia exterior, K, ambos fotones se orientarán como se indica en la figura siguiente:



El análisis de este proceso resulta más sencillo si se adopta otro sistema de referencia, K´, en el que el electrón y el positrón están en reposo en el momento de la aniquilación, es decir, respecto del cual el sistema de referencia, K, tenga la velocidad $-\vec{v}$ de ambas partículas. En ese sistema de referencia, K´, los dos fotones se han de mover en una dirección perpendicular al eje horizontal (por ejemplo, paralelos al eje Y', y tener sentidos opuestos.



Resolución:

Trabajaremos en el sistema de referencia ligado a las partículas entrantes, lo que permite reducir el análisis a una sola componente espacial, aquella en la que se mueven los dos fotones. Considerando que, tanto en el sistema inicial o "entrante" (electrón y positrón) como en el sistema final o "saliente" (los dos fotones), ninguno de sus constituyentes intercambia impulso o energía con ninguna otra entidad externa desde justo antes de la interacción hasta justo depués de ella. Con estas condiciones, para resolver el problema podemos imponer el principio de conservación del impulso-energía.

Como el electrón y el positrón tienen la misma masa, m, y están inicialmente en reposo, el impulso-energía del sistema entrante es:

$$\mathbf{P}_{\text{entrante}} = \mathbf{P}_{\text{electrón}} + \mathbf{P}_{\text{positrón}} = (m\cdot c^2, 0) + (m\cdot c^2, 0) = (2\cdot m\cdot c^2, 0)$$

Por otra parte, recordando que $E_{\text{fotón}} = h\cdot\nu$, el impulso-energía del sistema saliente es:

$$\mathbf{P}_{\text{saliente}} = \mathbf{P}_{\text{fotón1}} + \mathbf{P}_{\text{fotón2}} = (h\cdot\nu_1 , \mathbf{p}_1.c) + (h\cdot\nu_2 , \mathbf{p}_2\cdot c) = (h\cdot\nu_1 + (h\cdot\nu_2 , \mathbf{p}_1.c + \mathbf{p}_2\cdot c)$$

Igualando el impulso-energía entrante al impulso-energía saliente, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$\mathbf{p}_1 \cdot c + \mathbf{p}_2 \cdot c = 0 \rightarrow \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \rightarrow p_1 = p_2 \rightarrow \frac{h \cdot \nu_1}{c} = \frac{h \cdot \nu_2}{c} \rightarrow \nu_1 = \nu_2 = \nu$

$h \cdot \nu_1 + h \cdot \nu_2 = 2 \cdot m \cdot c^2$ que, teniendo en cuenta el resultado anterior, se convierte en:

$2h\,\nu = 2 \cdot m \cdot c^2 \rightarrow \nu = \frac{m \cdot c^2}{h}$

La primera expresión nos dice, como ya sabíamos, que, los dos fotones tienen impulsos iguales y opuestos. La segunda proporciona directamente su frecuencia, ν, la cual, como es lógico, solo depende de la masa (igual) de las partículas anteriores (electrón y positrón)

Resultados cuantitativos:

Sustituyendo la masa del electrón ($m = m_e = 9'1 \cdot 10^{-31}$ kg) y las constantes $c = 3 \cdot 10^8$m/s y $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ J·s, se obtienen los siguientes resultados:

E_0 (energía propia del electrón y positrón) = E_f (energía de cada fotón) = $9'1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 8'19 \cdot 10^{-14}$J
E_f (energía del fotón en MeV) = $(8'19 \cdot 10^{-14} / 1'6 \cdot 10^{-19}) \cdot 10^{-6} = 0'511$MeV
$\nu = m \cdot c^2 / h = 8'19 \cdot 10^{-14} / 6'63 \cdot 10^{-34} = 1'235 \cdot 10^{20}$ Hz

Por tanto, en el proceso se emiten dos fotones gamma de 0’511 MeV de energía cada uno.

Ampliación:

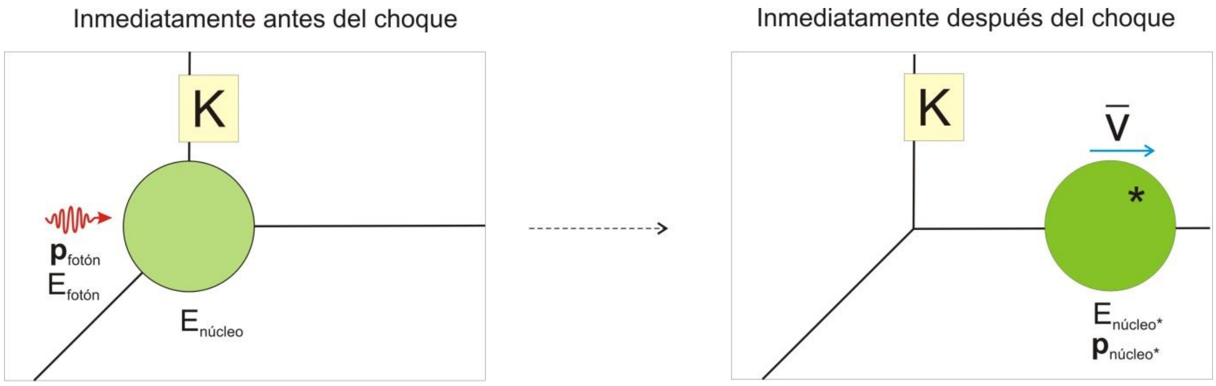
El proceso opuesto a la aniquilación es la creación de pares y se produce cuando un fotón gamma se acerca a un núcleo atómico y se transforma materializándose en un electrón y un positrón. En general, al incidir un haz de fotones sobre la materia, se pueden producir diferentes procesos y la probabilidad de que ocurra uno u otro depende de la energía de los fotones y de la naturaleza de la sustancia atravesada. El efecto fotoeléctrico es el más importante para la absorción de fotones de baja energía. El efecto Compton es el proceso que prevalece en la absorción de fotones X o gamma de energía intermedia. A partir de un valor mínimo de 1’02 MeV, la producción de pares (partícula y antipartícula) aumenta con la energía de los fotones incidentes y es el proceso que predomina a energías altas.

18. Un fotón gamma es absorbido por un núcleo. Comparad la masa del núcleo excitado con la del núcleo inicial. ¿Qué velocidad adquiere el núcleo excitado? (Datos: $E_{fotón}$ = 1MeV, núcleo: Pb-208)

Planteamiento:

Aunque los procesos de absorción de rayos gamma por la materia son diversos (ved el apartado de ampliación al final de este mismo problema), vamos a considerar el caso más simple en el que el fotón es absorbido por un núcleo para formar un núcleo excitado[5] (ved figura siguiente).

[5] Representaremos el estado “excitado” o más energético mediante el símbolo *



El fotón, aunque no tiene masa, sí tiene energía e impulso y deja de existir en cuanto es absorbido. Por tanto, el núcleo excitado tendrá una masa mayor que la que tenía en su estado inicial y, con respecto a un SRI "K" en el que se encontrara inicialmente en reposo, adquirirá un impulso, **p**. La velocidad buscada, **v**, será la velocidad que adquiere dicho núcleo con respecto a dicho sistema de referencia K.

Hipótesis:

Las magnitudes que describen el estado del sistema inmediatamente después del choque (el núcleo excitado o, también, sistema "saliente"), dependen de aquellas que describen el estado sistema inmediatamente antes (el fotón más el núcleo en su estado inicial, o también, sistema "entrante"). Por tanto, es lógico plantear que el módulo de la velocidad que adquiere el núcleo dependa de la energía o del impulso del fotón (sólo de una de ambas magnitudes, ya que $E_{fotón} = p_{fotón} \cdot c$) y de la masa o la energía propia del núcleo inicial (solo una de ambas magnitudes, ya que ambas están relacionadas por $E_{0(núcleo)} = m \cdot c^2$). Es decir:

$$v = f\,(E_{fotón}, m).$$

Más precisamente, a igualdad de los restantes factores, cabe esperar que:

- ✓ Cuanto mayor sea la energía del fotón (o su impulso), lógicamente mayor deberá ser la velocidad buscada, v. En el caso extremo en que dicha energía tendiera hacia infinito ($E_{fotón} \to \infty$), v debería tender al límite superior de velocidades ($v \to c$), mientras que si la energía del fotón fuera cero $E_{fotón} = 0$ el núcleo no absorbería nada y tampoco adquiriría ninguna velocidad, $v = 0$.

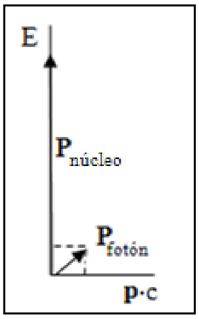
- ✓ Cuanto mayor sea la masa del núcleo, m, menor será la velocidad, v, que adquiere tras absorber el fotón. En el caso extremo en que $m \to \infty$, la velocidad adquirida tendería a ser nula, $v \to 0$, y si la masa del núcleo fuera nula, $m=0$, entonces, no habría tal núcleo y el sistema saliente sería únicamente el fotón, por tanto sería $v = c$.

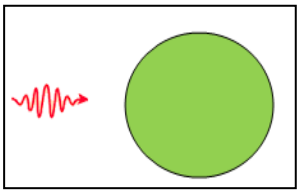
Estrategia de resolución:

Aunque el sistema no esté aislado (en general, el núcleo formará parte de algún material e interaccionará con otras partículas del mismo), podemos considerar que desde muy poco antes hasta muy poco después de la absorción, ni el fotón ni el núcleo interaccionan con otras entidades y, en consecuencia, aplicar al proceso el principio de conservación relativista. Por tanto, para resolver el problema exigiremos que el impulso-energía del sistema entrante (núcleo más fotón) sea igual al impulso-energía del sistema saliente (núcleo excitado), de donde se ha de poder obtener el impulso y la energía del núcleo excitado. Una vez obtengamos estas dos magnitudes usaremos las leyes fundamentales de la dinámica de una partícula al núcleo excitado para obtener su velocidad.

Resolución:

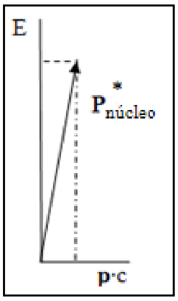
Teniendo en cuenta que para el fotón: $E_{fotón} = p_{fotón} \cdot c$ y que para el núcleo en su estado inicial: $p_{núcleo} = 0$ y $E_{0(núcleo)} = m \cdot c^2$, el impulso-energía del sistema entrante es:

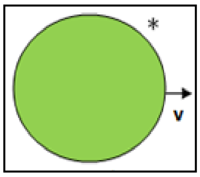




$$\mathbf{P}_{entrante} = \mathbf{P}_{fotón} + \mathbf{P}_{núcleo} = (E_{fotón}, \mathbf{p}_{fotón} \cdot c) + (mc^2, 0) = (E_{fotón} + m \cdot c^2, E_{fotón})$$

El sistema saliente está formado únicamente por el núcleo excitado y, por tanto, su impulso-energía es:





$$\mathbf{P}_{saliente} = (E_{núcleo^*}, \mathbf{p}_{núcleo^*} \cdot c) = (E_{0(núcleo)} + Ec_{núcleo^*}, \mathbf{p}_{núcleo^*} \cdot c) = (m^*c^2 + Ec_{núcleo^*}, \mathbf{p}_{núcleo^*} \cdot c)$$

Con lo que igualando el impulso-energía inmediatamente antes e inmediatamente después de la absorción del fotón por el núcleo, se obtiene:

$$\mathbf{P}_{entrante} = \mathbf{P}_{saliente} \longrightarrow (E_{fotón} + m \cdot c^2, E_{fotón}) = (m^*c^2 + Ec_{núcleo^*}, \mathbf{p}_{núcleo^*} \cdot c)$$

E igualando componentes:

$E_{fotón} + m \cdot c^2 = m^*c^2 + Ec_{núcleo}$ (1)

$E_{fotón} = \mathbf{p}_{núcleo^*} \cdot c$ (2)

Dividiendo por c^2 en la ecuación (1):

$$\frac{E_{fotón}}{c^2} + \frac{m \cdot c^2}{c^2} = \frac{m^* \cdot c^2}{c^2} + \frac{Ec_{núcleo^*}}{c^2}$$

Y despejando m*:

$$m^* = m + \frac{E_{fotón}}{c^2} - \frac{Ec_{núcleo^*}}{c^2}$$

Este resultado muestra que después de absorber el fotón (sin masa) el núcleo excitado es una entidad diferente al núcleo inicial y tiene una masa también diferente a la de él, concretamente mayor (ya que la energía cinética del núcleo excitado nunca puede superar a la energía aportada por el fotón). Este hecho no podría ser explicado mediante la mecánica de Newton, pero sí es totalmente compatible con el hecho relativista de que la masa del sistema final (que podemos considerar como si estuviera formado por núcleo y fotón) es mayor que la suma de las masas de sus "componentes", es decir, es mayor que la suma de la masa del núcleo y la masa del fotón (que es nula) por separado.

Finalmente, conocidos el impulso y la energía del núcleo excitado, podemos obtener directamente su velocidad (en módulo), usando la ley relaciona a las tres magnitudes, cuya expresión se dedujo en el problema 2 de este mismo tema.

Recordemos que **dicha ley** venía dada por: $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p} \cdot c}{E} \cdot c$

Si trabajamos en módulos y nos referimos al núcleo considerado, se transforma en:

$$v_{núcleo^*} = \left(\frac{p_{núcleo^*} \cdot c}{E_{núcleo^*}} \right) \cdot c$$

Teniendo en cuenta la ecuación (2) anterior y que, la energía del núcleo excitado se puede expresar (según hemos visto) como: $E_{núcleo^*} = E_{fotón} + mc^2$, se obtiene:

$$v_{núcleo^*} = \left(\frac{p_{núcleo^*} \cdot c}{E_{núcleo^*}} \right) \cdot c \rightarrow v_{núcleo^*} = \left(\frac{E_{fotón}}{E_{fotón} + m \cdot c^2} \right) \cdot c$$

O, lo que es equivalente: $$\boxed{v^*_{\text{núcleo}} = \frac{c}{1+\frac{m\cdot c^2}{E_{\text{fotón}}}}}$$

Comprobad que se cumplen las hipótesis enunciadas y todos los casos particulares considerados anteriormente acerca de la velocidad del núcleo excitado.

Una vez realizadas las comprobaciones, vamos a ver el resultado que se obtiene sustituyendo unos datos concretos.

Un ejemplo cotidiano de este proceso es la absorción de radiación gamma por el plomo, ya que este elemento se utiliza para evitar que, no sólo los rayos gamma, sino también los rayos X (comúnmente utilizados en radio-diagnóstico) sean dañinos para las personas. El plomo es un excelente blindaje frente a estas radiaciones gracias a su elevada densidad de 11’33 g/cm^3, a su alto número atómico, a su gran estabilidad y, también, a la facilidad con que se puede trabajar. Para detener fotones de 1MeV se necesitan unos pocos cm de este elemento (≈10cm) y en las salas de rayos X de los hospitales se suelen usar planchas de plomo, que impiden el paso de esta radiación.

Como se indica en el enunciado, el orden de magnitud de la energía de los fotones necesario para que se produzca su absorción por núcleos de Pb-208 es el orden de 1MeV. Por tanto, tenemos:

$E_{\text{ fotón}}$ = 1MeV.

$E_{0\ \text{Pb-208}}$ = 208 u. ≈ 208 · 931’45 MeV = 193741’6 MeV.

Con estos valores, la velocidad que adquiere el núcleo Pb es:

$$\boldsymbol{v}^*_{núcleo\ Pb-208} = \left(\frac{1}{1+193741´6}\right)\cdot c = 5’16\cdot 10^{-6}\ c$$

Como vemos, es una velocidad muy pequeña comparada con la velocidad de la luz, como cabía esperar por la enorme diferencia que hay entre la masa del núcleo de plomo y la energía (expresada en unidades de masa) del fotón. También es una velocidad pequeña a nivel atómico y, lógicamente, cuando los núcleos de Pb-208 absorben fotones en este proceso, no se modifica la estructura del material, sino que los átomos que lo componen mantienen su ligazón. Ahora bien, si comparamos esta velocidad con las de otros objetos cotidianos en nuestro mundo macroscópico, el valor resulta ciertamente elevado.

Ampliación:

Como se indica en el enunciado, los procesos de interacción de los fotones con la materia son diversos y básicamente dependen de la energía de la radiación incidente y del tipo de material sobre el que incide dicha radiación. Los principales procesos en los que el fotón cede su energía al interaccionar con la materia son:

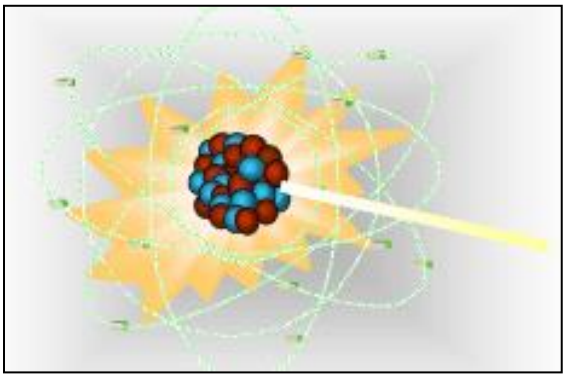
Efecto fotoeléctrico: El fotón incidente puede colisionar con alguno de los electrones de las capas más internas del átomo cediéndole toda su energía y provocando la expulsión de dicho electrón. El efecto fotoeléctrico es el proceso predominante para energías menores a 0’1 MeV.

Efecto Compton: El fotón incidente interacciona con alguno de los electrones de las capas externas del átomo. En esta interacción el fotón se dispersa, reduce su energía y provoca la ionización del átomo. El efecto Compton es la interacción predominante a energías cercanas a 1 MeV

Formación de pares: Debido a la interacción de la fuerza de Coulomb, en la vecindad del núcleo la energía del fotón incidente se convierte espontáneamente un par electrón-positrón. Este proceso sólo puede ocurrir cuando los fotones incidentes tienen una energía igual o mayor a 1'02 MeV.

Absorción: La absorción es el proceso que hemos considerado en este problema y consiste simplemente en una excitación del núcleo del átomo, que termina con la historia del fotón. La probabilidad de que exista una absorción disminuye al aumentar la energía.

19. El núclido Cs-137 es un isótopo radiactivo del cesio que se produce principalmente por fisión nuclear. Tiene un periodo de semidesintegración de 30'23 años y se utiliza en física nuclear experimental para calibrar detectores de partículas. El Cs-137 decae emitiendo partículas ß (electrones) a un isómero nuclear metaestable de Ba-137, que tiene una vida media de 2'55 minutos y se "des-excita" emitiendo fotones gamma de 0'661657 MeV, que son utilizados en la técnica de calibración.



¿Cuánto valdrá la velocidad de retroceso de un núcleo Ba-137 después de haber emitido un fotón?

Planteamiento:

Lo más sencillo es adoptar el sistema de referencia, respecto al cual el núcleo Ba-137 excitado (lo llamaremos núcleo padre) está inicialmente en reposo. Como el fotón emitido por dicho núcleo porta energía e impulso, el núcleo hijo (des-excitado) ha de tener una masa menor que el núcleo padre y un impulso opuesto al del fotón emitido. Para obtener ambas magnitudes cabe exigir el principio de conservación del impulso-energía antes y después de la emisión.

Hipótesis: Aunque el enunciado proporciona los datos concretos del proceso y estos implican una solución numérica del problema, podemos plantear hipótesis acerca de cómo variaría esta solución, si tales datos pudieran ser otros diferentes. Así podemos plantear que la velocidad de retroceso buscada, **v**, dependerá de la masa, m*, del núcleo padre de Ba-137 (excitado) y de la energía que porte el fotón emitido, $E_{fotón}$. Es decir: v = f (m*, $E_{fotón}$) Más precisamente:

- ✓ Cuanto mayor sea la masa del núcleo padre, m*, mayor también será la masa del núcleo hijo, m, y, en consecuencia, menor será su velocidad de retroceso, v. Si m* $\rightarrow \infty$, deberá ser v$\rightarrow$0, mientras que el caso extremo opuesto, es decir, si m* = 0, estamos suponiendo que no existe el núcleo padre; entonces, el problema "desaparece" y debemos exigir también que no se emita ningún fotón ($E_{fotón}$ = 0).

- ✓ Cuanto mayor sea la energía del fotón emitido, $E_{fotón}$, mayor tiene que ser el módulo de la velocidad de retroceso, ya que se ha de conservar la componente cinética del impulso del sistema, antes y después de la emisión. El caso extremo en el que $E_{fotón}$ = 0, es equivalente a suponer que no se emite ningún fotón y, por tanto, que el núcleo padre no se des-excita. Entonces, debemos exigir también que la masa del núcleo hijo sea igual a la masa del núcleo padre, es decir, m* = m y se ha de obtener que este núcleo adquiera ninguna velocidad de retroceso, es decir, v = 0. *¿Se puede plantear un caso extremo opuesto?*

Resolución:

El impulso-energía del sistema inicial (núcleo de Ba-137, excitado) es:

$\mathbf{P}_{\text{inicial}} = (m^*\cdot c^2, 0)$

Teniendo en cuenta que $E_{fotón} = p_{fotón}\cdot c$, el impulso-energía del sistema final (núcleo de Ba-147, des-excitado, y fotón) es:

$\mathbf{P}_{\text{final}} = (E_{\text{núcleo hijo}}, p_{\text{núcleo hijo}}\cdot c) + (E_{fotón}, E_{fotón}) = (E_{\text{núcleo hijo}} + E_{fotón}, p_{\text{núcleo hijo}}\cdot c + E_{fotón})$

Imponiendo la conservación del impulso-energía, se obtiene:

$E_{\text{núcleo hijo}} + E_{fotón} = m^*\cdot c^2 \rightarrow E_{\text{núcleo hijo}} = m^*\cdot c^2 - E_{fotón}$ (1)

$p_{\text{núcleo hijo}} \cdot c + E_{fotón} = 0 \rightarrow p_{\text{núcleo hijo}}\cdot c = - E_{fotón}$ (2)

Además (ved problema anterior), sabemos que:

$$v = \left(\frac{p_{\text{núcleohijo}\cdot c}}{E_{\text{núcleohijo}}}\right)\cdot c$$

Que, teniendo en cuenta las expresiones (1) y (2), queda como:

$$\boxed{v = \left(\frac{-E_{fotón}}{m^*\cdot c^2 - E_{fotón}}\right)\cdot c}$$

Análisis del resultado:

Comprobad que se cumplen las hipótesis

En primer lugar, conviene observar que, puesto que $m^* \cdot c^2 - E_{fotón} > 0$ (ya que la energía del fotón emitido no puede ser superior a la energía inicialmente disponible) y al ser el numerador negativo, la velocidad obtenida, v, tiene siempre un valor negativo, opuesto al criterio de signos establecido en el problema. Esto significa que el núcleo hijo se mueve, como no puede ser de otra forma, en sentido opuesto al fotón emitido, correspondiendo en efecto a una velocidad de retroceso.

En segundo lugar, una vez comprobado que se cumplen las hipótesis planteadas para ambas magnitudes y los casos extremos cuando $m^* \rightarrow \infty$ y cuando $E_{fotón} = 0$, podemos analizar los casos extremos opuestos:

- ✓ Si $m^* = 0$, significa que no hay núcleo padre, entonces tampoco puede haber un fotón ($E_{fotón} = 0$). En este caso, el problema deja de tener sentido y el resultado matemático es una indeterminación.

- ✓ Si $E_{fotón} = m^* \cdot c^2$ (valor máximo de la energía total disponible) se obtendría $v \rightarrow \infty$, lo que es, desde luego, imposible. En efecto, entre las condiciones necesarias para que el hecho tenga lugar hay que exigir al menos dos condiciones: a) Que la emisión del fotón sea consecuencia del proceso de des-excitación del núcleo padre, la cual termina con otro núcleo hijo de masa no nula (de donde se deriva que, en ningún caso la energía del fotón puede igualar a la energía propia del núcleo excitado). b) que la velocidad de retroceso del núcleo no alcance el límite superior de velocidades, c (de donde se deriva que la energía del fotón tampoco puede alcanzar un valor suficientemente elevado como para que ello ocurriera)

Además de estas disquisiciones, que pueden hacerse mediante un análisis meramente matemático del resultado, hay que considerar, por supuesto, otras de carácter físico que son fundamentales. Particularmente hay subrayar el hecho de que, en realidad, los valores posibles de la energía que puede tener el fotón emitido, se limitan a los que corresponden a los únicos saltos de energía que pueda tener el núcleo para cumplir con las leyes de la mecánica cuántica.

Resultados cuantitativos:

Terminamos aplicando el resultado al caso que plantea el enunciado correspondiente al proceso de des-excitación del Ba-137. En este proceso se emite un fotón gamma de 0’661657 MeV. Por tanto, tenemos:

m^*c^2 (en unidades) $\approx$ 137u $\approx 137 \cdot 931.5$ MeV = 127615’5 MeV

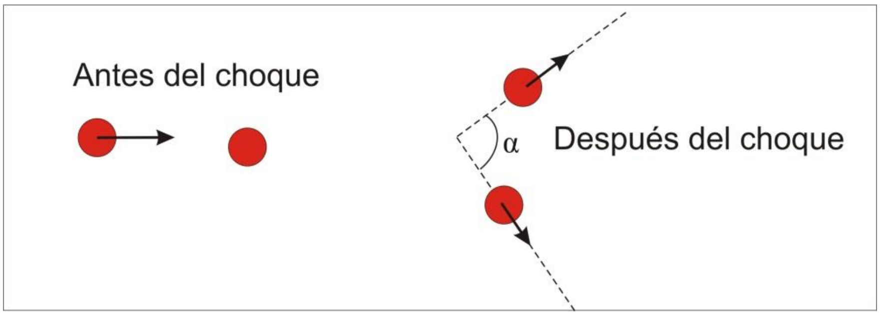
$E_{fotón}$ = 0’661657 MeV

Por tanto, se puede estimar una velocidad de retroceso del núcleo hijo del siguiente orden:

$$v = \left(\frac{-E_{fotón}}{m^* \cdot c^2 - E_{fotón}} \right) \cdot c = \frac{-0'661657}{127615'5 - 0'661657} = 5'185 \cdot 10^{-6} c = 1555'44 m/s$$

Como vemos, la velocidad de retroceso obtenida es muy pequeña comparada con la velocidad de la luz, y, también lo es a nivel atómico (por ejemplo, no sería suficiente para afectar a la estructura del Ba-137 en estado sólido), aunque si la comparamos con las velocidades de otros objetos cotidianos en nuestro mundo macroscópico, el valor resulta ciertamente elevado.

20. Una partícula impacta contra otra de igual masa e inicialmente en reposo. Obtened el ángulo, α, que forman las trayectorias de ambas partículas después de la colisión, suponiendo que el choque sea perfectamente elástico (sin pérdida de energía) y que las trayectorias de las partículas antes y después del choque están en un mismo plano XY.



Resolved primero el problema utilizando la mecánica de Newton y, luego en el marco de la relatividad especial

a) En el marco de la Mecánica de Newton

Planteamiento: Las velocidades que tengan las dos partículas (módulo y dirección) inmediatamente después de la colisión y sus masas, dependerán de las velocidades y de las masas de las partículas inmediatamente después.

De acuerdo con el enunciado del problema:

Las masas de las dos partículas son iguales entre sí ($m_1 = m_2 = m$), e iguales también inmediatamente antes e inmediatamente después de la colisión (con esta condición, las masas dejan de ser una variable en el problema, puesto que m será un factor de multiplicación de todos los términos intervinientes en el principio de conservación)

El módulo de la velocidad de la segunda partícula antes de la colisión es cero

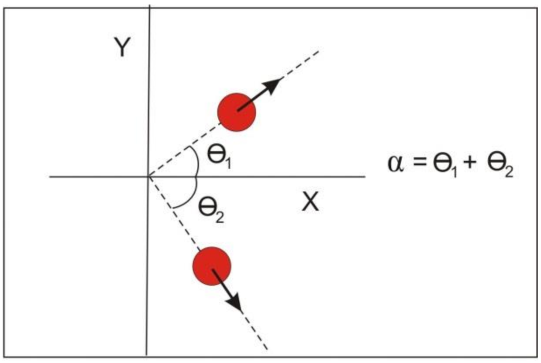
Las velocidades de las dos partículas después de la colisión están en el mismo plano XY

Con todas estas condiciones, del estado inicial cabe considerar sólo una magnitud variable, que es la velocidad de la partícula 1 inmediatamente antes de la colisión ($\vec{v}_1$) y el estado final (inmediatamente después de la colisión) está determinado por otras tres magnitudes variables:

los módulos de las velocidades de ambas partículas ($v_1^{'}$ y $v_2^{'}$) y el ángulo que se quiere obtener (α).

Puesto que se ha de conservar el momento lineal o cantidad de movimiento (sobre el plano XY esto se concreta en dos ecuaciones) y, al ser la colisión elástica, también se ha de conservar la energía cinética (una ecuación), resulta que se han de cumplir tres ecuaciones que relacionan las cuatro magnitudes del problema, lo que significa que, en estas condiciones, el ángulo α solicitado ha de tener un valor único.

Estrategia de resolución: Impondremos la verificación de las dos componentes del impulso (x, y) y la de la energía del sistema, antes y después de la colisión. Como queremos obtener el ángulo, α, entre las velocidades de las dos partículas salientes, y el movimiento inicial de la partícula 1 tiene lugar en la dirección del eje X, expresaremos las dos componentes de la ley de conservación del impulso lineal en función de los ángulos que tienen las velocidades de salida de cada una de ellas (θ_1 y θ_2) con respecto a dicho eje X. El ángulo α, será igual a la suma de θ_1 y θ_2 (figura adjunta):



Resolución:

La conservación del impulso lineal del sistema formado por ambas partículas, implica que dicho impulso (vector) ha de ser el mismo en el estado inicial o entrante (inmediatamente antes de la colisión) que en el estado final o saliente (inmediatamente después de la colisión):

$$\vec{p}_{sis} = \vec{p}_{sis}^{\,'} \;\rightarrow\; \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1^{\,'} + \vec{p}_2^{\,'} \;\rightarrow\; m\cdot\vec{v}_1 + m\cdot\vec{v}_2 = m\cdot\vec{v}_1^{\,'} + m\cdot\vec{v}_2^{\,'} \rightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_1^{\,'} + \vec{v}_2^{\,'} \rightarrow$$

$$(v_{1x}\;,0) = (v_{1x}^{'}\;, v_{1y}^{'}) + (v_{2x}^{'}\;, v_{2y}^{'}) \;\rightarrow\; (v_1\;,0) = (v_1^{'}\cdot\cos\theta_1\;, v_1^{'}\cdot sen\theta_1) + (v_2^{'}\cdot\cos\theta_2\;, v_2^{'}\cdot sen\theta_2)$$

Descomponiendo la última ecuación vectorial según componentes cartesianas escalares:

Eje X: $v_1 = v_1^{'}\cdot\cos\theta_1 + v_2^{'}\cdot\cos\theta_2$ (1)

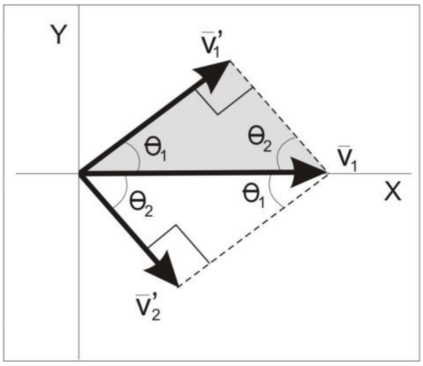
Eje Y: $0 = v_1^{'}\cdot sen\theta_1 + v_2^{'}\cdot sen\theta_2 \;\rightarrow\; v_1^{'}\cdot sen\theta_1 = -v_2^{'}\cdot sen\theta_2$ (2)

La ecuación (2) anterior, muestra que las componentes según el eje Y de las velocidades de salida son iguales y de distinto signo, por lo que se anulan.

La conservación de la energía, al tratarse de un choque elástico, implica que la energía cinética del sistema inmediatamente antes de la colisión valga lo mismo que inmediatamente después:

$$\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2=\frac{1}{2}mv_1^{'2}+\frac{1}{2}mv_2^{'2} \;\rightarrow\; v_1^2=v_1^{'2}+v_2^{'2} \quad (3)$$

Ahora deberíamos proceder a despejar θ_1 y θ_2, para luego obtener $\alpha = \theta_1 + \theta_2$. Sin embargo, si nos fijamos en la ecuación (3) veremos que su significado es equivalente al cumplimiento del teorema de Pitágoras en un triángulo cuyos catetos son $v_1^{'}$ y $v_2^{'}$ siendo v_1 la hipotenusa, tal y como se muestra en la figura siguiente:



De la figura anterior, queda claro que $\alpha = \theta_1 + \theta_2 = 90º$.

Conviene saber que muchas veces el ángulo experimental será diferente, porque los choques entre objetos cotidianos (por ejemplo, dos bolas de billar) no son perfectamente elásticos. En estos procesos cotidianos, la pérdida de energía en la interacción suele ser considerable y, por tanto, deja de cumplirse la ecuación (3).

b) En el marco de la Teoría de la relatividad.

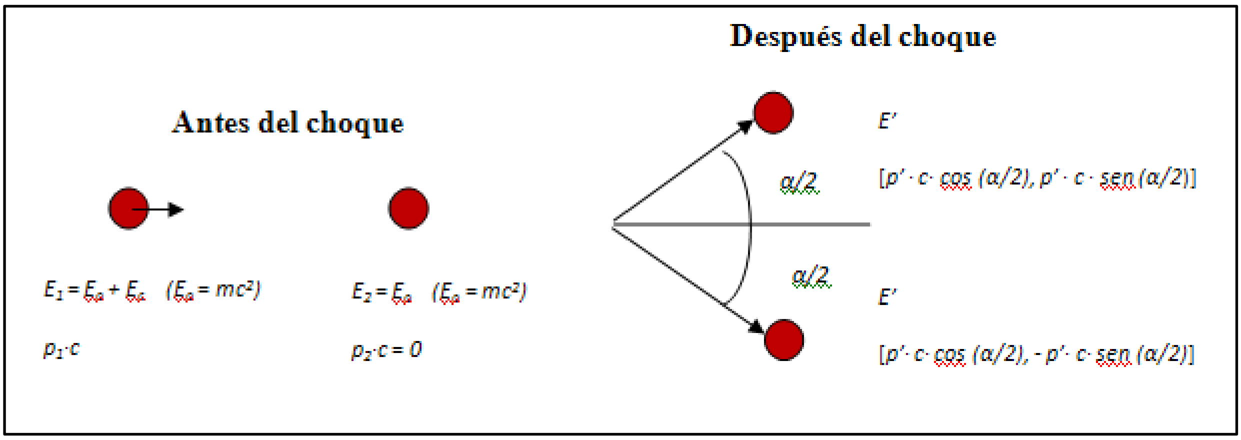
Planteamiento: La dinámica relativista requiere la conservación del impulso-energía. Este principio de conservación no es idéntico al de la mecánica de Newton, por lo que es lógico suponer que la solución del problema será diferente. Además, en relatividad se ha de tener en cuenta que las partículas tienen una energía propia que pasó desapercibida para la física newtoniana. Por tanto, se agregan dos variables adicionales con lo que es lógico esperar que la solución del problema no sea única, sino dependiente de dos variables independientes que podamos adoptar.

Hipótesis: Teniendo en cuenta lo expresado en el apartado anterior, podemos plantear que el ángulo buscado dependa de la relación entre la energía cinética de la partícula incidente antes del choque, E_c y la energía propia de esa misma, E_0. De hecho, si ese cociente tiende a cero $E_c/E_0 \rightarrow 0$, estamos planteando que la velocidad de la partícula incidente sea muy pequeña comparada con el límite superior de velocidades, c. Es decir, estamos acercándonos al límite newtoniano y, por tanto, teniendo en cuenta el resultado obtenido en ese caso ha de ser $\alpha \rightarrow 90º$. En cambio, al crecer este cociente, es decir, al ser mayor la E_c de la partícula incidente, nos alejamos de la predicción de la mecánica de Newton y el ángulo, α, debería cambiar.

Resolución:

En este caso, para tener una mayor sencillez en la aplicación del principio de conservación del impulso-energía, vamos a suponer que ambas partículas, después de la colisión tienen velocidades de igual módulo y, por tanto, al exigir la conservación del impulso-energía, sus trayectorias forman el mismo ángulo, con respecto a la dirección del movimiento de la partícula que impacta.

La situación antes y después del choque, tenemos:



La conservación del impulso-energía $\vec{P}_{sis} = \vec{P}'_{sis}$ requiere que se conserven sus componentes de energía e impulso:

$E_1 + E_2 = 2 \cdot E'$ (componente de la energía) (1)

$p_1 = 2 \cdot p' \cdot \cos (\alpha/2)$ (componente X del impulso) (2)

$0 = p' \cdot \mathrm{sen}\, (\alpha/2) - p' \cdot \mathrm{sen}\, (\alpha/2)$ (componente Y del impulso) (3)

Además de cumplirse lo que dictan las expresiones anteriores, se ha de verificar la ley fundamental que relaciona masa (o energía propia, E_0) con el impulso y la energía de cada partícula, tanto antes y como después del choque:

$E_1^2 = Eo^2 + (p_1 \cdot c)^2$ (partícula 1 antes del choque) (4)

$E'^2 = Eo^2 + (p' \cdot c)^2$ (partículas 1 y 2 después del choque) (5)

Teniendo en cuenta que $E_1 = E_o + E_c$ (E_c es la energía cinética de la partícula incidente), de las ecuaciones (1), (4) y (5) resulta:

$(p_1 \cdot c)^2 = (E_o + E_c)^2 - E_o^2 = E_c\, (2 \cdot E_o + E_c)$ (6)

$(p' \cdot c)^2 = (E_o + E_c/2)^2 - E_o^2 = E_c\, (E_o + E_c/4)$ (7)

Ahora, sustituimos (6) y (7) en (2), para obtener:

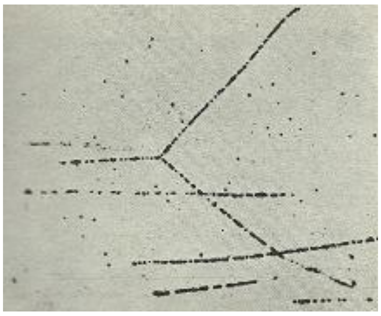
$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{2E_o+E_c}{4E_o+E_c}$$

Usando $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$, se obtiene finalmente:

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{E_c}{4E_o+E_c}}$$

Análisis del resultado:

El resultado muestra la variación que tiene el aspecto del choque dependiendo de que las partículas tengan energías bajas (caso no relativista) o altas (para velocidades próximas a la velocidad de la luz).



Así, si la energía cinética de la partícula incidente es pequeña ($E_c << E_o$) se obtiene cosα →0 y por tanto α→90º. La fotografía adjunta (1) muestra un ejemplo de esta situación. Corresponde a la colisión de un protón incidente con energía del orden de *5MeV* con otro protón, inicialmente en reposo en una emulsión fotográfica. El choque en este caso fue "no relativista" ($E_c/m_oc^2<<1$) y, como se observa, se obtuvo un ángulo experimental muy próximo a 90º entre las trayectorias de salida de los protones después del choque.

En cambio, si la energía cinética de la partícula es muy alta ($E_c>>E_o$), resulta cosα →1 y por tanto α→0º. Esta disminución relativista de la dispersión fue comprobada experimentalmente por primera vez en 1932 por Champion (2), para radiación β (electrones muy rápidos). Utilizó una cámara de niebla y estudió los choques elásticos de los electrones de la radiación con electrones de los átomos de aire de la cámara.

Ampliación:

La solución que aporta la mecánica clásica se puede practicar con una animación *Modellus* disponible en la página Web: http://rsefalicante.umh.es/Animaciones/Animaciones03.htm

Para terminar este capítulo nos detendremos brevemente en comentar una cuestión:

21. Pero si la masa es invariante… ¿Qué entendemos por masa relativista?

La relatividad modifica los conceptos clásicos de espacio y de tiempo. Ello hace que cambien también magnitudes relacionadas con dichos conceptos, como ocurre con la velocidad. Sin embargo esto no afecta a otras magnitudes como la masa (que mide la propiedad de la inercia de los cuerpos) o la carga eléctrica, ninguna de las cuales está directamente relacionada con el espacio o el tiempo. La masa, pues, es invariante, en el sentido de que su valor no depende del SRI escogido para estudiar el movimiento de un cuerpo (revisad el ejercicio 3, para más información). Sin embargo, en muchos textos sobre relatividad, en lugar de referirse simplemente a la masa, se utilizan las expresiones **masa relativista** y **masa en reposo** (o masa propia), lo cual puede llevar a confusión. A continuación trataremos de aclarar este punto:

a) En la TRE, el impulso lineal (o cantidad de movimiento) respecto de un cierto sistema de referencia inercial (SRI), viene expresado por:

$$\vec{p} = m \cdot \gamma \cdot \vec{v}$$

En la ecuación anterior m es la masa del cuerpo (invariante) y $\vec{v}$ su velocidad (respecto a dicho SRI), siendo $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$.

b) Algunos autores, en lugar de la opción anterior, prefieren designar a la masa del cuerpo como m_0 y reservan el símbolo m para el producto $m_0 \cdot \gamma$ (es decir: $m = m_0 \cdot \gamma$) denominando a m_0 como masa en reposo (o masa propia) y a "m" como masa relativista (siempre mayor que m_0, puesto que, como ya sabemos, γ es siempre mayor que 1), de modo que la ecuación anterior quedaría como:

$$\vec{p} = m_0 \cdot \gamma \cdot \vec{v} \quad \rightarrow \quad \vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Vemos que, en este caso, la expresión relativista de la cantidad de movimiento coincide con la expresión clásica (producto de una masa por una velocidad) solo que aquí se considera que la masa (relativista) sí que cambia con la velocidad de modo que m tiende a m_0 cuando v disminuye y m tiende a ∞ cuando v tiende a "c" *(comprobadlo).*

Un objeto de 1000 kg de masa en reposo viaja por el espacio directo a la Tierra. Calculad su masa relativista suponiendo que se acerque con una velocidad de:

a) 1'50·10⁸ m/s
b) 2'95·10⁸ m/s

Rdo. a) 1154'7 kg; b) 5500'2 kg

Esta segunda opción no es un tratamiento equivocado, siempre que tengamos en cuenta que lo que se designa como masa relativista no es la masa del cuerpo o sistema (en realidad invariante) sino el producto de la misma por el factor γ. No obstante, como se habrá podido apreciar a lo largo de este capítulo, los autores nos hemos decantado por la primera opción, **porque nos** parece más adecuado para evitar posibles errores en la interpretación de estos conceptos. Téngase en cuenta que para que para que se modifique la velocidad de un cuerpo no es preciso interaccionar con él, sino que basta con cambiar el sistema de referencia desde el que se estudia su comportamiento dinámico. Obviamente al cambiar de sistema de referencia al cuerpo "no le ocurre nada" y, consecuentemente, a su masa tampoco.

Para una mayor información al respecto, recomendamos la lectura de un trabajo ya clásico: "The concept of mass" publicado por Okun. Lev. B en 1989 en la revista *Physics Today*. 42 (6), pp. 31-36 y accesible en http://physicstoday.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.881171