Problemas de Cinemática Relativista y desarrollo de la Competencia Científica

Jaime Carrascosa Alís
University of Valencia

Manuel Alonso Sánchez
University of Alicante

Salvador Martinez
University of Valencia

PROBLEMAS DE FÍSICA

CINEMÁTICA RELATIVISTA

didacticafisicaquimica.es

MANUEL ALONSO SÁNCHEZ
SALVADOR MARTÍNEZ SALA
JAIME CARRASCOSA ALÍS

(12 de Abril de 2018)

NOTA PREVIA

Los problemas que se presentan a continuación conforman un capítulo más del libro Problemas de Física y corresponden al tema de Relatividad. Como fuentes de información y ampliación de conocimientos recomendamos utilizar:

- ✓ El tema 9 (Introducción a la teoría de la Relatividad) del libro Física de 2º de Bachillerato, de los mismos autores que este capítulo.

- ✓ Los contenidos de http://rsefalicante.umh.es/relatividad.htm en los que se incluyen animaciones que conectan específicamente con muchas de las situaciones planteadas en estos problemas permitiendo una mejor comprensión de los conceptos y relaciones que se manejan en cada uno.

Entre los problemas que se presentan los hay adecuados para estudiantes de Física de 2º curso de Bachillerato (modelo educativo español) y también otros para estudiantes universitarios que cursen los primeros cursos de Física.

Esperamos que todo ello sea de utilidad tanto al profesorado como al alumnado que lo utilice. Ese es nuestro principal objetivo.

Finalmente, los autores recomendamos que antes de estudiar o hacer uso de los problemas propuestos, se proceda a una lectura atenta del documento que se expone a continuación, en el que se detalla y justifica el modelo de resolución utilizado, lo que permitirá un mejor aprovechamiento de los mismos.

¿CÓMO SE PUEDE DESARROLLAR LA COMPETENCIA CIENTÍFICA A TRAVÉS DE LOS PROBLEMAS DE LÁPIZ Y PAPEL?

Dentro del cuerpo de conocimientos de la Didáctica de las Ciencias, la Competencia Científica en una materia determinada (Física, Química, etc.) se puede entender como saber (sus contenidos específicos), saber hacer (relacionado con aspectos procedimentales y metodológicos) y además, saber ser y estar (relacionado con aspectos axiológicos como, por ejemplo, una actitud positiva, un mayor interés hacia la materia en cuestión y su aprendizaje, trabajar en equipo, etc.).

Los profesores de ciencias hemos de impulsar y desarrollar la competencia científica entre los alumnos en todas sus dimensiones, no solo porque se nos exige sino, sobre todo, porque es la mejor forma de aprender ciencias (con todo lo que ello conlleva). En cuanto a la metodología esto implica, entre otras actividades:

Plantear problemas de interés y saber precisarlos
Elaborar hipótesis fundadas
Elaborar posibles diseños experimentales para contrastar las hipótesis
Llevar a la práctica los diseños elaborados
Realizar análisis críticos, interpretar, argumentar, modelizar, búsqueda de coherencia y globalidad
…

Todo ello supone un cambio importante, que ha de romper con hábitos de pensamiento muy enraizados, fruto de la forma común (y ordinariamente efectiva) de abordar e interpretar las situaciones de la vida cotidiana. Sin embargo, hay que ser conscientes de que dicho cambio conlleva unos determinados requerimientos y que no es posible avanzar en el mismo dejando de lado la adquisición de unos contenidos conceptuales que presenten una cierta amplitud, globalidad y coherencia interna. Es decir: No se puede enseñar nada de la competencia científica en abstracto, de igual forma que tampoco es posible llevar a cabo ninguna investigación científica fuera de un marco conceptual determinado, el cual desempeña un papel muy importante desde el mismo inicio hasta el final de la misma.

Tampoco se puede enseñar nada de la competencia científica de manera parcelada (por ejemplo, solo a través de los trabajos experimentales), sino que hay que hacerlo en todos aquellos aspectos que resultan claves para la enseñanza y aprendizaje de cualquier materia científica como la Física o la Química, lo cual incluye obviamente, la resolución de problemas de lápiz y papel, que es el aspecto en el que nos vamos a centrar aquí.

¿Con qué características y cómo deberían plantearse los problemas para que contribuyan realmente a desarrollar la competencia científica en el alumnado?

Para poder avanzar en el objetivo anterior es necesario abandonar la metodología de enseñanza y aprendizaje de los problemas en la que estos se tratan como meros ejercicios de aplicación y desarrollar un nuevo modelo de resolución, más coherente con la naturaleza de la ciencia y el trabajo científico. Ello supone esencialmente, prestar atención a los siguientes aspectos:

Comenzar por un análisis cualitativo de la situación, planteando con claridad qué es concretamente lo que se pide en el problema, aquello que se busca, qué interés puede tener, precisando así mismo las condiciones que se consideran imperantes en la situación abordada para poder avanzar así en su solución, y apoyándose, siempre que sea posible, en representaciones o esquemas gráficos apropiados.

Esto es precisamente lo que realizan los expertos cuando se encuentran ante lo que para ellos es un verdadero problema, y también lo que en ocasiones (sin mucho éxito) se recomienda hacer a los alumnos.

Emitir hipótesis fundadas sobre los factores de que puede depender la magnitud buscada y sobre la forma de dicha dependencia imaginando, en particular, posibles casos límite de fácil interpretación física.

La emisión de hipótesis consiste en una de las actividades más importantes a realizar en cualquier investigación y constituye en la enseñanza de las ciencias una excelente ocasión para poner de manifiesto la existencia de posibles ideas alternativas. Los datos necesarios para la resolución del problema vendrán marcados precisamente por aquellos factores que se hayan considerado en las hipótesis emitidas. Finalmente, conviene tener en cuenta que el hecho de aventurar cómo pueden influir dichos factores y analizar algún caso límite evidente, contribuye especialmente a poder realizar después un mejor análisis del resultado (otro aspecto fundamental del trabajo científico).

Elaboración y exposición de manera clara y concisa, de una posible estrategia para la resolución del problema antes de proceder a esta, evitando recurrir al simple ensayo y error.

Se trata de que los alumnos, utilizando sus conocimientos de partida, elaboren de manera fundamentada una estrategia que pueda conducir a la resolución del problema y la expongan de forma resumida argumentando sobre ella y los pasos a seguir. Esta etapa sería equivalente a lo que en una investigación científica se considera como la elaboración de diseños para la contrastación de las hipótesis emitidas y es una actividad excelente para favorecer el desarrollo de la creatividad.

Hacer referencia cuando sea posible a otros métodos alternativos de resolución.

Buscar distintas vías para la resolución de un mismo problema y debatir sobre ellas es algo que no solo posibilita una mejor contrastación de los resultados obtenidos sino que, además, puede contribuir decisivamente a que los alumnos se den cuenta de la coherencia global y la validez del cuerpo de conocimientos que se va construyendo. Por otra parte, contribuye a desarrollar una imagen de la ciencia más cercana a la realidad, ya que las contrastaciones por distintas vías juegan, como ya vimos anteriormente, un papel fundamental en el trabajo científico.

Proceder a la resolución del problema de acuerdo con la estrategia escogida, razonando lo que se hace y por qué se hace, sin caer en operativismos carentes de significado.

Se trata esencialmente de que se haga referencia a la información teórica disponible, se justifiquen las expresiones que se van a utilizar comprobando, por ejemplo, que su campo de validez es el adecuado según las condiciones que se consideran imperantes en la situación planteada y de que, sobre todo, no se proceda a una resolución mecánica o mimética del problema.

Efectuar, siempre que sea factible, una resolución literal del problema, evitando la tendencia a trabajar desde el principio con los valores numéricos.

Conviene tener en cuenta que no se trata de que los alumnos no manejen datos cuantitativos y obtengan un resultado final expresado numéricamente sino, más bien, de que hagan esto cuando corresponda. En muchos casos es posible efectuar una resolución literal antes de sustituir los valores numéricos. Para algunos alumnos, acostumbrados a operar con los números de forma inmediata, resulta un paso difícil. Sin embargo, se trata de algo esencial para conseguir, entre otras cosas, poder realizar un buen análisis crítico del resultado.

Analizar el o los resultados obtenidos mediante resolución literal, a la luz de las hipótesis elaboradas y, en particular, de los casos límites considerados. Realizar también un sencillo análisis dimensional.

El análisis de los resultados de un problema se puede realizar cuando estos vienen dados en forma de una expresión literal ya que entonces es posible comprobar, de acuerdo con las hipótesis y casos límite de partida, la influencia de las magnitudes que aparecen en ellos. Además, conviene tener presente que es aquí, precisamente, en donde se puede producir algún conflicto cognoscitivo (cuando, por ejemplo, en el resultado no aparece alguna magnitud que sí había sido considerada como influyente durante el planteamiento cualitativo), convirtiéndose así los problemas en poderosos instrumentos para un desarrollo realmente efectivo de la competencia científica.

Analizar los valores encontrados planteándose si son valores lógicos o no.

A veces es posible que un resultado numérico se desvíe tanto que se convierta en absurdo. Este es el caso de aquellos que, ante un problema determinado obtienen, por ejemplo, que un átomo de oxígeno tiene una masa de 16 g, o que el periodo de la Luna en su giro alrededor de la Tierra es de millones de años, sin que ello les suponga ninguna inquietud.

Considerar las perspectivas abiertas tras la resolución del problema.

Contemplar, por ejemplo, la posibilidad de abordarlo con un mayor nivel de complejidad, estudiando sus implicaciones teóricas (profundización en la comprensión de algún concepto), prácticas (situaciones similares de interés técnico), etc.

En el momento oportuno utilizar las nuevas tecnologías para mejorar el aprendizaje derivado de la resolución de problemas.

Se trata, por ejemplo, de búsquedas bibliográficas a través de internet para ampliar y profundizar sobre algún contenido concreto contemplado en el problema, utilizar applets y aplicaciones que permitan visualizar algún aspecto concreto (por ejemplo la influencia que tiene en el resultado cambiar una u otra variable), etc.

Relacionar, en su caso, el problema con aspectos científico-tecnológicos, sociales o del medio natural.

Siempre que la naturaleza de la situación plantada lo permita hay que incluir también en la resolución del problema alguna reflexión sobre su posible interés científico-tecnológico o sus implicaciones en la vida de las personas y en la naturaleza. Con ello se contribuye no solo a una toma más fundamentada de decisiones sino también a poner en cuestión una imagen descontextualizada de la Ciencia y el trabajo científico.

Conviene tener en cuenta que las orientaciones precedentes no pretenden ser ninguna receta cuyo seguimiento paso a paso garantice el éxito asegurado. Se trata, por el contrario de indicaciones muy generales que alertan contra determinados vicios metodológicos que impiden tratar los problemas como tales (algo para lo cual, de entrada, no se dispone de una solución evidente).

Para que las orientaciones anteriores se puedan contemplar en una programación y, lo que es más importante, para que el profesorado pueda apropiarse de ellas como punto de partida en el que apoyarse, es absolutamente necesario disponer de colecciones de problemas, acordes con dichas orientaciones.

En la página web: didacticafisicaquimica.es

Existe un libro de problemas de Física resueltos y también otros elementos (materiales educativos y de didáctica) todos ellos de libre acceso, en los que se incluyen numerosos ejemplos de problemas planteados con esta metodología en muchos otros temas.

Es necesario tener en cuenta que no todos los problemas se pueden plantear así ni tampoco se puede contemplar siempre en un problema las 11 orientaciones comentadas anteriormente. De hecho, la mayor parte de los problemas planteados como investigación se han desarrollado principalmente en el cuerpo de conocimientos correspondiente a la mecánica newtoniana.

Pretendemos aquí ampliar el campo en el que se ha venido aplicando esta metodología de resolución de problemas extendiéndolo a la mecánica relativista. Este capítulo en concreto se centra en cinemática relativista. Posteriormente se incluirá otro, centrado en dinámica relativista. En ambos campos se incluyen problemas apropiados para el nivel de estudiantes de Física de 2º de Bachillerato (español) junto con otros de mayor nivel adecuados también para estudiantes universitarios de primeros cursos de Física.

Con ello se pretende esencialmente contribuir al desarrollo de la competencia científica del alumnado mediante un modelo con el que trabajar un aspecto concreto y clave para la enseñanza y aprendizaje de las ciencias como es la resolución de problemas de lápiz y papel, alejándonos de orientaciones excesivamente generales y abstractas.

Modestamente, abogamos por que se supere la "amnesia crónica" que con frecuencia afecta a la Didáctica de las Ciencias Experimentales y se ponga el foco de nuevo en el diseño, experimentación y evaluación de propuestas concretas con las que desarrollar la competencia científica entre el alumnado a través de los contenidos específicos de las asignaturas que el profesorado imparte, no solo mediante los problemas de lápiz y papel sino también en todos los restantes aspectos claves para enseñar y aprender ciencias como, por ejemplo, los trabajos prácticos o la introducción y manejo de conceptos científicos.

Nota final:

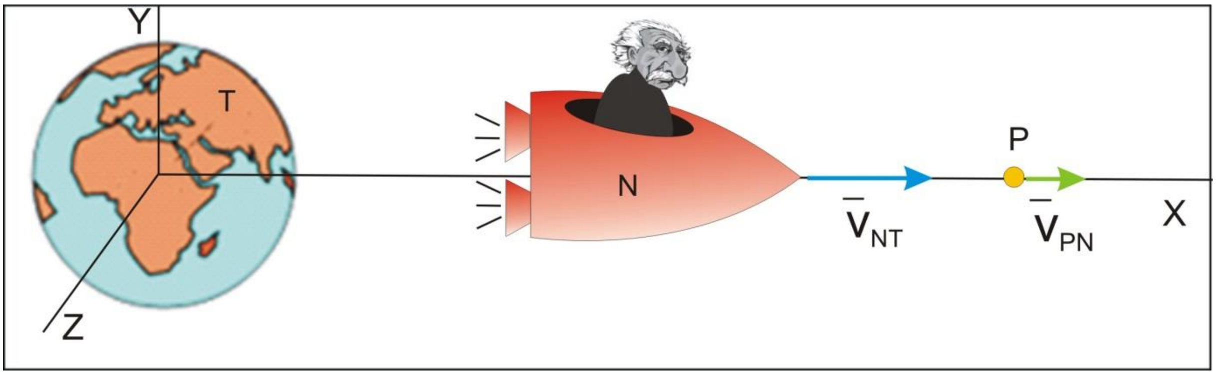
Para la elaboración de este documento nos hemos basado fundamentalmente en diversos trabajos realizados sobre este tema por los profesores Daniel Gil Pérez y Joaquín Martínez Torregrosa. Para ver la bibliografía concreta se recomienda consultar el capítulo sobre Resolución de Problemas del Libro "Curso Básico de Didáctica de las Ciencias" incluido en la página web citada anteriormente.

PROBLEMAS DE CINEMÁTICA RELATIVISTA COMO INVESTIGACIÓN

1. Desde una nave que se está alejando de la Tierra se emite un haz de partículas ¿Qué velocidad tiene ese haz con respecto a la Tierra?

Planteamiento

Consideraremos el caso más sencillo en el que el haz de partículas, P, se emite en la misma dirección que la del movimiento de la nave, N, con respecto a la Tierra, T. Haremos la simplificación de considerar la Tierra como un sistema de referencia inercial (en adelante SRI) y trabajaremos con un sistema de coordenadas cartesianas con origen en el centro de la Tierra, suponiendo que la nave se aleja de ella con velocidad constante en la dirección de uno de los ejes, por ejemplo, el eje X, lo que nos permitirá trabajar con la componente del vector velocidad según dicho eje utilizando un tratamiento escalar. Dado que solo existe una única componente expresaremos v_x como "v" (en este y en otros problemas posteriores donde suceda lo mismo).



A la velocidad que tiene el haz de partículas respecto a la Tierra la designaremos como $\vec{v}_{PT}$. Dicha velocidad se puede obtener componiendo la velocidad con la que dichas partículas se emiten desde la nave ($\vec{v}_{PN}$) y la velocidad que tiene la propia nave respecto de la Tierra ($\vec{v}_{NT}$).

Si fuese aplicable la mecánica de Newton, y teniendo en cuenta que el movimiento se realiza en una única dirección (eje de coordenadas X), esta composición de velocidades daría como resultado:

$$v_{PT} = v_{NT} + v_{PN}$$

En el caso de que el haz de partículas tuviese el mismo sentido que el movimiento de la nave (es decir hacia X+) los valores numéricos de estas velocidades serían todos positivos, mientras que si el haz de partículas fuese lanzado en sentido opuesto al movimiento de la nave (es decir hacia X-) el valor numérico de v_{PN} sería, obviamente, negativo.

Sin embargo, en el marco más correcto de la relatividad especial, esta composición ha de producir un resultado distinto (tanto más diferente cuanto mayores sean las velocidades de la nave y/o del haz). Dicho resultado ha de ser coherente con algunos hechos, como:

1) Si es un haz de partículas materiales, no puede alcanzar en ningún caso la velocidad de la luz, c.
2) Si es un haz de fotones, su velocidad ha de ser igual a la velocidad c en todos los casos.

Hipótesis

En el caso de que se trate de partículas materiales, cabe esperar que el valor de la velocidad del haz de partículas con respecto a la Tierra (v_{PT}), dependa de la velocidad con la que son emitidas desde la nave (v_{PN}), de la velocidad de la nave con respecto a la Tierra (v_{NT}), y de la velocidad de la luz (c). Esto se suele expresar como:

$$v_{PT} = \mathrm{f}(v_{PN}, v_{NT}, \mathrm{c})$$

Más precisamente:

- ✓ Si el haz se emite desde la nave en el sentido de su movimiento (alejándose de la Tierra), podemos pensar que, a igualdad de los restantes factores, v_{PT} aumente cuanto mayor sea v_{PN} y cuanto mayor sea v_{NT}.

- ✓ Si, por el contrario, el haz se emite en sentido opuesto al movimiento de la nave (es decir, hacia la Tierra), podemos pensar que, a igualdad de los restantes factores, v_{PT} aumente cuanto mayor sea v_{PN} y cuanto menor sea v_{NT}.

También podemos considerar algunos casos particulares de especial interés:

- ✓ En los casos límite en los que ambas velocidades (v_{PN} y v_{NT}) tiendan a cero y/o cuando la velocidad de la luz tienda a infinito, cabe aplicar la mecánica de Newton y el resultado ha de tender al que prevé esta teoría, es decir, la velocidad del haz con respecto a la Tierra, v_{PT}, será igual a la suma o la diferencia algebraica (según el haz se emita en el mismo sentido en que se mueve la nave o en el contrario, respectivamente) de los valores absolutos de v_{NT} y v_{PN}.

- ✓ Finalmente, en el caso particular en que la radiación sea un haz de fotones, tendremos v_{PN} = c. La velocidad de tales fotones con respecto a la Tierra, por supuesto, también ha de ser la velocidad de la luz: v_{PT} = c.

Resolución

Para obtener la expresión de la velocidad del haz con respecto a la Tierra, tan solo hay que aplicar la ley de composición de velocidades relativista. En este caso, con las condiciones simplificadoras impuestas detalladas anteriormente, se obtiene:

$$v_{PT} = \frac{v_{NT} + v_{PN}}{1 + \frac{v_{NT} \cdot v_{PN}}{c^2}}$$

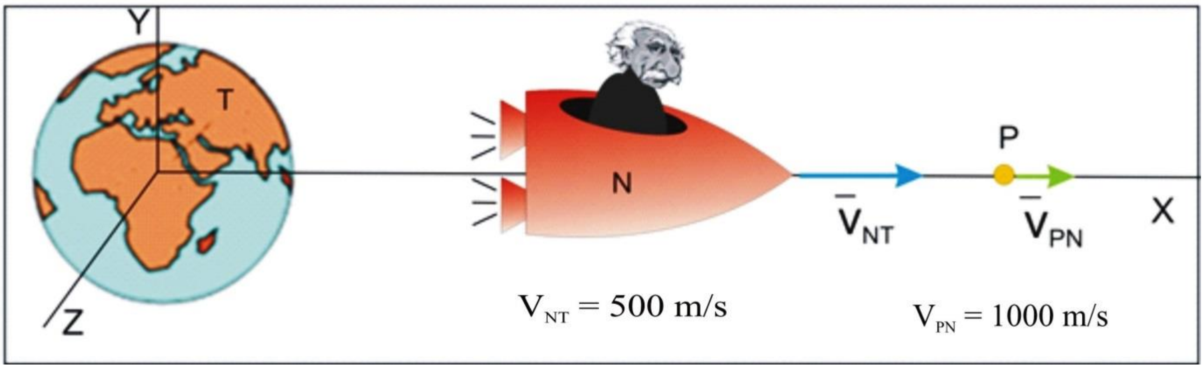
Conviene tener en cuenta que en la expresión literal anterior no se presupone ningún sentido de movimiento al haz ni a la nave. Por tanto, será al sustituir los valores numéricos o datos, cuando deberemos colocar el signo correspondiente (positivo si el movimiento se realiza en el sentido de X^+ y negativo si el movimiento se realiza en el sentido X^-).

Análisis del resultado

Comprobad que se cumplen las hipótesis enunciadas y todos los casos particulares considerados anteriormente.

Una vez realizada la comprobación anterior, es interesante analizar lo que sucede cuando sustituimos unos datos numéricos concretos. Por ejemplo:

¿Qué ocurre cuando la nave se aleja de la Tierra a 1800 km/h y las partículas son emitidas en la misma dirección de su movimiento con una velocidad de 3600 km/h respecto de dicha nave?



Sustituyendo en la expresión anterior se obtiene:

$$v_{PT} = \frac{v_{NT} + v_{PN}}{1 + \frac{v_{NT} \cdot v_{PN}}{c^2}} = \frac{500 + 1000}{1 + \frac{500 \cdot 1000}{(3{\cdot}10^8)^2}} = 1500 \text{ m/s}$$

Como es lógico, se obtiene el mismo resultado que prevé la mecánica de Newton (cuya aplicación llevaría simplemente a sumar ambas velocidades). Hay que realizar el cálculo con una precisión extraordinaria para obtener la casi nula diferencia entre ambos. Esto ocurre porque, aunque las velocidades implicadas en este supuesto son bastante elevadas en relación con nuestras experiencias cotidianas, siguen siendo pequeñísimas en comparación con la velocidad de la luz, c.

Vamos ahora imaginar que se tratase de una hipotética nave intergaláctica que se alejase de la Tierra a una velocidad de 0'6c y que el haz de partículas fuese una radiación que tiene una velocidad de 0'9c. ¿Qué ocurriría entonces? Comparad el resultado con el anterior.

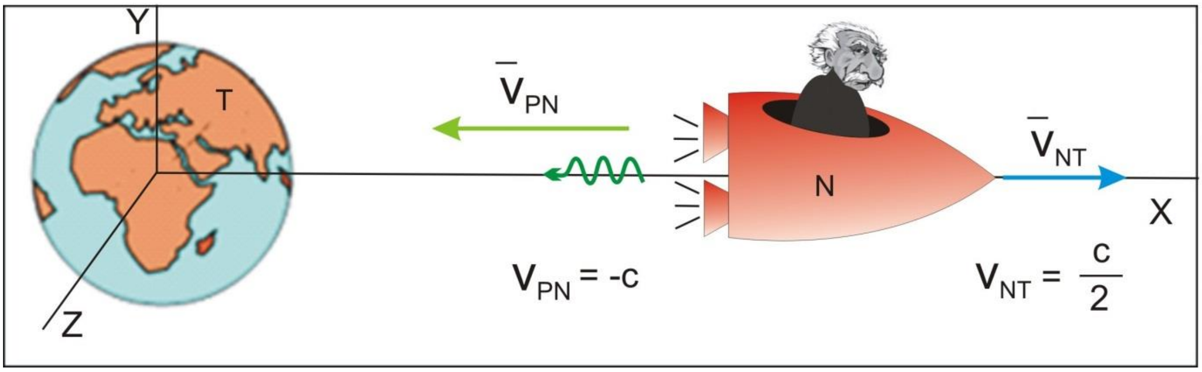
En este caso los datos son: v_{PN} = 0'9c y v_{NT} = 0'6c, con lo que se obtiene:

$$v_{PT} = \frac{v_{NT} + v_{PN}}{1 + \frac{v_{NT} \cdot v_{PN}}{c^2}} = \frac{0'6c + 0'9c}{1 + 0'6 \cdot 0'9} = 0'974\text{c}$$

Vemos que en esta ocasión ambas velocidades son muy altas, comparables a la velocidad de la luz, y que su suma algebraica (resultado que prevé la mecánica de Newton) superaría a dicha velocidad, c. Por supuesto, esto no ocurre, al utilizar, como hemos hecho, la expresión relativista, y el resultado sigue siendo inferior a ese límite superior que es c (concretamente el 97'4 % del valor de c).

Para terminar, vamos a imaginar que la nave se aleja de la Tierra con una velocidad de 1'5·10^8 *m/s y que para comunicarse con la Tierra, los tripulantes envían hacia ella un haz de luz láser. ¿Cuál sería la velocidad de dicho haz respecto de la Tierra?*

Los datos ahora son: v_{PN} = -c y v_{NT} = 1'5·10^8 m/s (o, lo que es equivalente, v_{NT} = 0'5c).



En este caso los datos son: v_{PN} = -c y v_{NT} = 0'5c, con lo que se obtiene:

$$v_{PT} = \frac{v_{NT} + v_{PN}}{1 + \frac{v_{NT} \cdot v_{PN}}{c^2}} = \frac{0'5c - c}{1 - 0'5} = -c$$

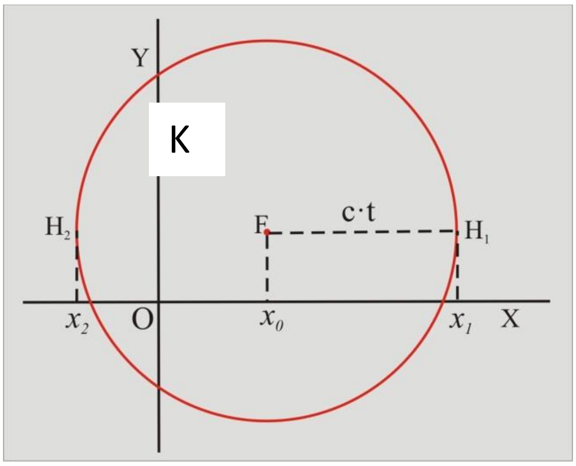
Como no podría ser de otro modo, el resultado dice que el haz de luz láser se aproximaría a la Tierra a la velocidad de la luz.

2. Una persona enciende una lámpara y en el momento de conectar el interruptor inicia un viaje. Representad en un mismo diagrama espacio-tiempo, cuyos ejes sean (x, c·t):

a) El movimiento del extremo del haz luminoso emitido por la lámpara
b) El viaje de la persona

La representación de cualquier movimiento en un diagrama espacio-tiempo de coordenadas (x, c·t) es el dibujo de la gráfica de dicho movimiento, pero cambiando la ubicación habitual de los ejes, puesto que ahora el tiempo "t" figura en el eje de ordenadas y la posición "x" en el de abcisas. Además, hay que tener en cuenta que se ha graduado el eje de tiempos en unidades de longitud (al multiplicar la coordenada temporal, t, por la velocidad de la luz, c). Este cambio de unidades del eje de tiempos no altera la esencia de su significado, porque el factor, c, es una constante universal.

Dicho esto, vamos a representar primero la evolución del extremo del haz luminoso emitido desde la lámpara, la cual suponemos en reposo en un punto cualquiera de un SRI, K, cuyos ejes espaciales son (x, y, z). Al cabo de un cierto tiempo, t (determinado en ese SRI) su extremo será, como ya sabemos, un frente de onda esférico alrededor del foco emisor F (lámpara). En la figura siguiente se ha representado un corte de dicho frente de onda según el plano XY, con lo que el frente de honda será ahora una circunferencia contenida en dicho plano y centrada en el foco. En ella se han señalado dos puntos de luz H_1 y H_2, cada uno situado a la máxima distancia de F en la dirección del eje X.



Dado que la luz se propaga a velocidad c, las coordenadas “x” respectivas de H_1 y de H_2 en ese preciso instante t, serán:

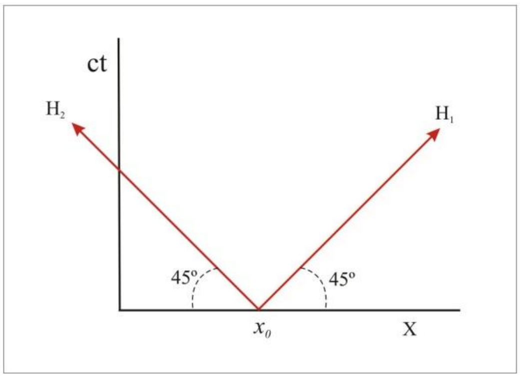
$x_1 = x_0 + c{\cdot}t$ y $x_2 = x_0 - c{\cdot}t$

Podemos ahora tratar de contestar la primera cuestión del enunciado. Para ello debemos situarnos en un diagrama espacio-tiempo de coordenadas (x, ct) y plantearnos cómo sería la representación en dicho diagrama del movimiento de los puntos de luz H_1 y H_2 que, como ya hemos visto, se encuentran sobre una circunferencia cuyo radio aumenta a la velocidad c.

Como el módulo de la velocidad a la que avanzan estos puntos por el eje x (en sentido positivo y en sentido negativo) es c, y, puesto que el eje de ordenadas se gradúa como c·t, si construyésemos una tabla con los valores de las coordenadas de, por ejemplo, el punto H_1, obtendríamos:

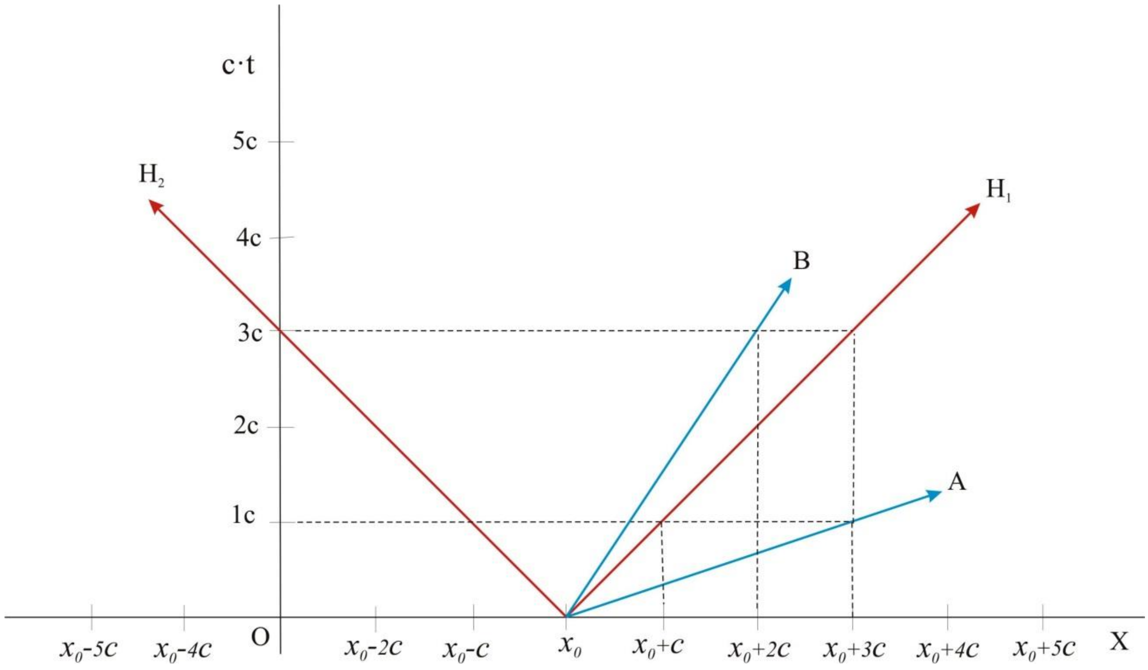
t	*c·t*	x
0	0	x_0
1	*c*	x_0+c
2	2*c*	x_0+2c
3	3*c*	x_0+3c
n	n*c*	x_0+nc

Podemos ver que al representar los valores de “x” frente a los valores de “c·t”, dado que solo se diferencian en x_0, obtendríamos una línea recta con origen en x_0 e inclinada 45º respecto del eje de abcisas. Análogamente ocurriría con el punto H_2 (aunque en este caso, los valores de “x” serán cada vez más negativos), con lo que se obtendría una figura como la siguiente:



En cuanto a la segunda cuestión (representar el viaje de la persona), no cabe duda de que su respuesta vendrá condicionada por el hecho de que dicha persona en ningún momento de su viaje puede moverse a igual o mayor velocidad que lo hacen los puntos H_1 y H_2 (velocidad de la luz).

De acuerdo con el párrafo anterior, razonad por qué el movimiento del viajero A de la figura siguiente no podría tener lugar y, en cambio, sí sería posible el del viajero B.



Analizando el diagrama anterior es fácil darse cuenta que en el mismo instante (t = 1), el viajero A se encontraría en una posición más avanzada (dada por x_0+3c) que el punto de luz H_1 (que se encontraría en x_0+c) y por tanto, al haber salido ambos en el mismo instante (t = 0), tendríamos que concluir que A se movería más rápido que la luz, lo cual no es posible. No ocurre lo mismo con el viajero B que en cualquier instante se halla siempre por detrás del punto de luz, así, por ejemplo, en el instante t =3 el punto de luz H_1 se encuentra en x_0+3c mientras que B está en x_0+2c. En conclusión:

La línea correspondiente al movimiento del viajero en el diagrama (x, ct) de ninguna manera puede alcanzar a las rectas que representan la evolución de los extremos del haz de luz H_1 y H_2. Además, el viajero podrá moverse (o no) con una rapidez constante (o quedarse un tiempo en el mismo punto), **pero siempre de forma que la línea que represente su movimiento tenga respecto a la horizontal (en valor absoluto) una inclinación mayor de 45º**. Se trata esta de una conclusión muy importante, que usaremos también en otros problemas.

Finalmente, se propone un pequeño ejercicio de manejo de los conceptos tratados:

Una persona enciende una lámpara y en el momento de conectar el interruptor (t = 0), inicia un viaje con una velocidad constante $\vec{v} = (0'5 \cdot c\ ,\ 0\ ,\ 0)$. *Representad en un mismo diagrama (x, c·t) entre los instantes t = 0 y t = 5 (unidades arbitrarias):*

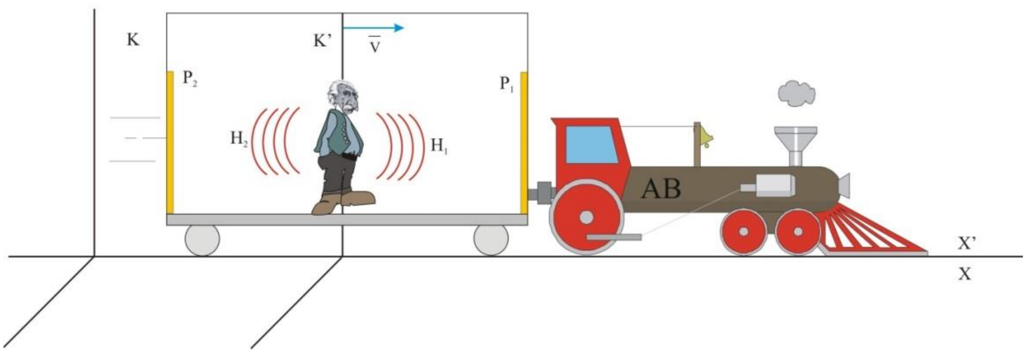
a) El movimiento del extremo del haz luminoso emitido por la lámpara
b) El viaje de la persona

Dato: Suponed que la persona se encuentra inicialmente en el mismo origen de coordenadas de un sistema de referencia inercial (x, y, z).

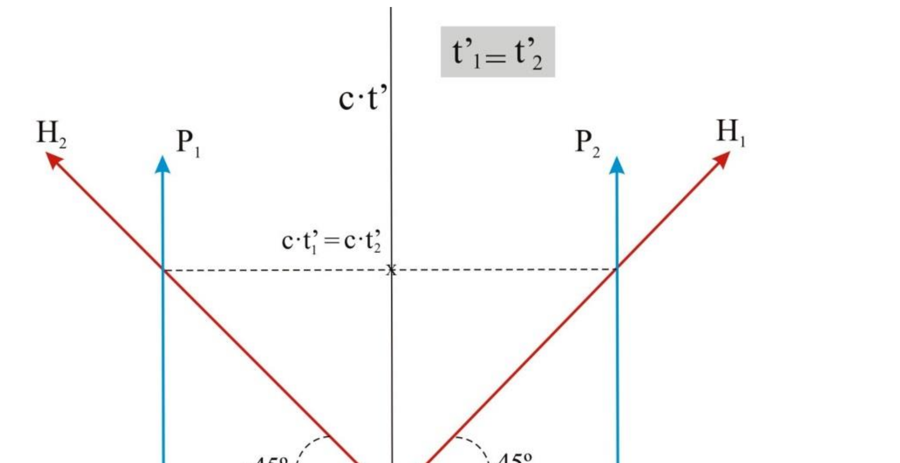
Respecto a los diagramas aquí utilizados, comentar que fue el matemático alemán Herman Minkowski (profesor de Einstein y posteriormente admirador de su obra), quien primero planteó este tipo de diagramas y mostró sus potentes aplicaciones. Se llaman, por ello, diagramas de Minkowski.

Para reforzar los conceptos involucrados en este problema se puede trabajar con una animación interactiva de la página Web de Materiales Didácticos de la Sección Local de Alicante (SLA) de la Real Sociedad Española de Física (RSEF). Manipulando la animación (disponible aquí: http://rsefalicante.umh.es/TemasRelatividad/relatividad08.htm) el usuario puede modificar sobre la marcha la velocidad del viajero.

3. Un pasajero de un tren, situado en el punto medio de un vagón, enciende una lámpara y el haz de luz viaja hacia las puertas P_1 y P_2. El tren tiene un mecanismo que activa automáticamente la apertura de dichas puertas en cuanto la luz incide sobre ellas. Utilizad diagramas espacio-tiempo (x , c·t) para establecer la posible simultaneidad de las aperturas de las puertas para dos sistemas de referencia inerciales, K y K´, situados respectivamente en la vía del tren y dentro del vagón.

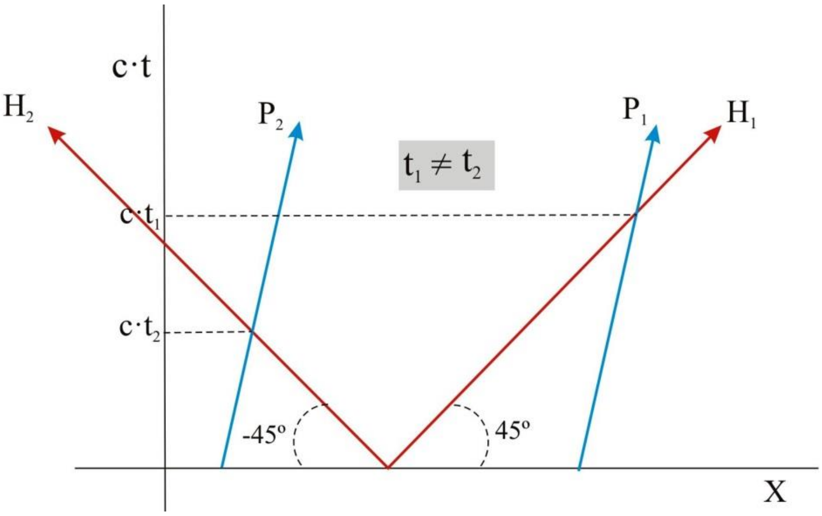


Primero resolveremos el problema con respecto al sistema de referencia inercial (SRI) K´, ligado al vagón. En este SRI las puertas P_1 y P_2 están en reposo y, por tanto, la representación abstracta de su evolución en un sistema de ejes coordenados (x´, c·t´) como el del diagrama siguiente, se concreta mediante sendas líneas verticales azules, paralelas al eje de tiempo.



Por otra parte, la luz emitida por la lámpara (situada también en el punto medio del vagón), se propaga a la velocidad, c, en todas las direcciones. Sus extremos (los puntos de luz H_1 y H_2) se dirigen respectivamente en sentido positivo y negativo del eje x' a dicha velocidad, c, y, por tanto, en el diagrama se representan mediante dos líneas rectas de color rojo e inclinadas 45º y -45º. La apertura de cada puerta queda señalada en el diagrama por el suceso del espacio-tiempo en el que se cruzan las historias respectivas de cada puerta y del extremo correspondiente del haz de luz. Se concluye, pues, que respecto a este SRI, las dos puertas se abren en un mismo instante, es decir, ambos sucesos son simultáneos.

Vamos ahora a resolver el problema con respecto al SRI, K, ligado a la vía. En este caso, las puertas P_1 y P_2 se mueven a la velocidad del tren (de módulo constante v), y, por tanto, su representación en un sistema de ejes coordenados (x, c·t) se concreta en dos rectas inclinadas y paralelas, como las líneas azules que se muestran en el diagrama siguiente:

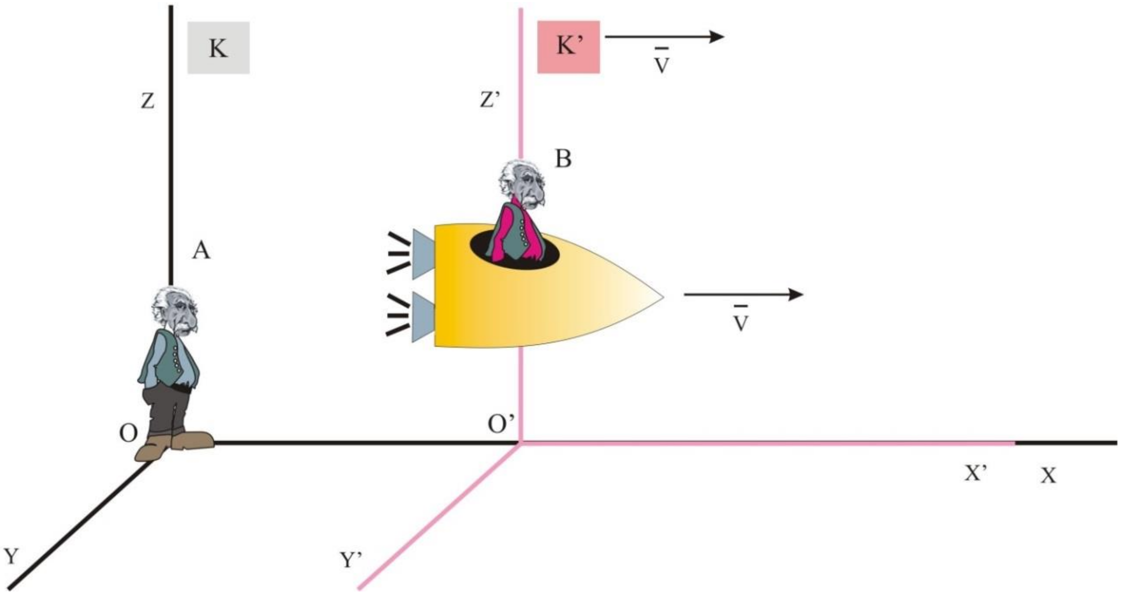


La apertura de cada puerta en este SRI también viene dada por el suceso en el espacio-tiempo en el que se cruzan las representaciones de los movimientos de la luz y de la puerta pero, como puede verse, la puerta 2 se abre aquí antes que la puerta 1, puesto que $t_2 < t_1$.

Este resultado pone en evidencia que la simultaneidad es en el marco de la Teoría de la Relatividad, un concepto relativo. Dos sucesos que son simultáneos en un determinado SRI, no lo son en ningún otro SRI.

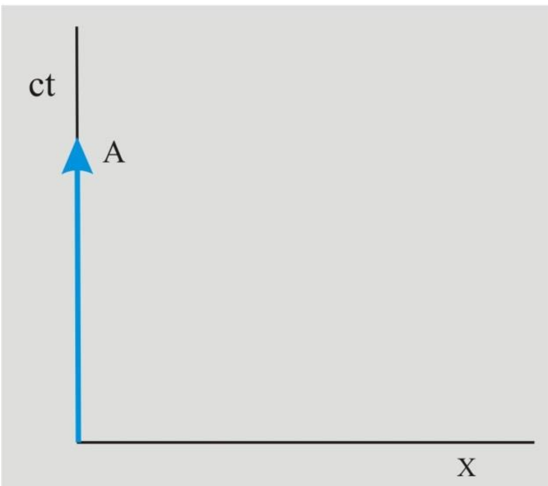
Para reforzar los conceptos involucrados en este problema se puede trabajar con una animación interactiva de la página Web de Materiales Didácticos de la SLA de la RSEF (disponible aquí: http://rsefalicante.umh.es/TemasRelatividad/relatividad11.htm). El usuario puede modificar la velocidad del tren y el sentido de su movimiento, viendo cómo afectan estos cambios al diagrama y a la ordenación temporal entre las aperturas de las puertas.

4. Un observador A se halla en reposo en el origen de coordenadas de un SRI K (x, y, z). Otro observador B, que se mueve paralelamente al eje X con velocidad constante respecto de A, solidariamente a un SRI K' (x', y', z') tal y como se indica en la figura, pasa junto a él y sincronizan sus relojes (t = t' = 0) justo en el momento en que ambos se encuentran en la posición dada por x = x' = 0. Elaborad de forma cualitativa un diagrama espacio-tiempo doble, representando en el mismo los movimientos de A y de B a partir de dicho momento.

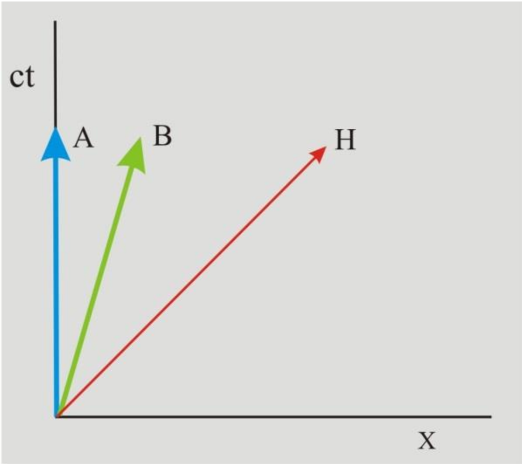


Una posible estrategia para resolver el problema sería comenzar por dibujar los ejes (x, ct) correspondientes al observador A.

Dado que A se encuentra en reposo en el mismo origen de coordenadas O del SRI K, su posición vendrá dada por x = 0 en cualquier instante, de modo de conforme vaya transcurriendo el tiempo t (desde t = 0) su situación vendrá descrita por una línea vertical que avanza por el eje de tiempos (ct), tal y como se muestra en la figura siguiente (línea de color azul):



¿Cómo podemos ahora representar el movimiento de B?

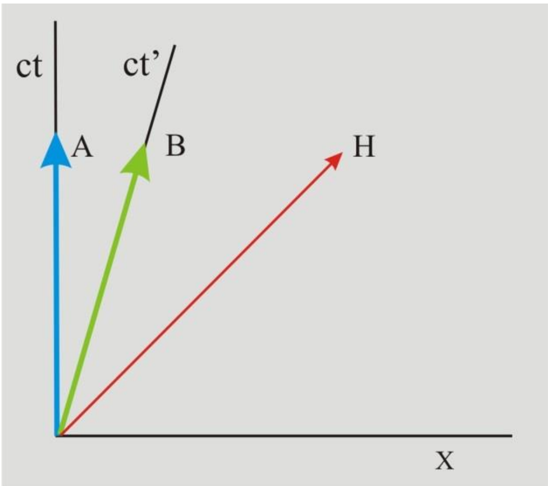


Para representar el movimiento de B en el diagrama anterior hemos de tener en cuenta que B sí se mueve respecto del SRI K, de modo que para dicho observador el valor de su posición x respecto de O, aumenta con velocidad constante. Por tanto, dicho movimiento vendrá dado por una línea inclinada un cierto ángulo respecto de la horizontal, como se observa en la figura siguiente (línea de color verde):

Sin embargo, sabemos que la inclinación de la línea que representa el movimiento de B no puede ser cualquiera. Como ya hemos visto, el hecho de que el valor v de la velocidad con que B se aleja de A no pueda ser igual o mayor que el de la velocidad de la luz, c, implica que la inclinación respecto a la horizontal, ha de ser en todo momento superior a los 45º (en valor absoluto) que es la inclinación correspondiente al movimiento del extremo H de un hipotético haz de luz emitido por un foco situado en el origen de coordenadas en el instante en que ambos observadores coincidieron (línea roja de la figura anterior).

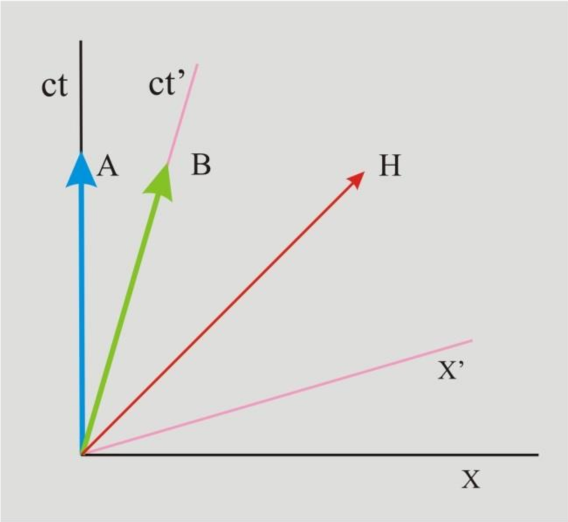
Teniendo en cuenta el razonamiento realizado para justificar la representación del movimiento de A, sugerid cómo habría que representar el eje de coordenadas ct'.

Dado que el observador B se encuentra en reposo respecto del SRI K' podemos suponer que (análogamente a lo que sucede con el observador A en el SRI K) la línea que describe su situación (de color verde), deberá coincidir con el eje de tiempos ct' según se muestra en la figura siguiente:



¿Cómo dibujar ahora el eje correspondiente a la posición x'?

La respuesta a la pregunta anterior, es que se debe proceder de forma que se respeten los postulados de la relatividad especial. Más concretamente: Hay que garantizar que ese hipotético haz de luz al que nos hemos referido, también tenga velocidad c en el SRI K'. Y Para que esto suceda, sabemos que la línea que representa ese movimiento debe coincidir exactamente con la bisectriz del ángulo formado entre el eje ct' y el eje X', lo que nos lleva a la figura final:



En la figura anterior se observa la representación de los movimientos de A y B en el sistema doble de coordenadas que se demanda en el enunciado del problema.

Para practicar la construcción de los diagramas dobles se puede trabajar con una animación interactiva de la página Web de Materiales Didácticos de la SLA de la RSEF (disponible aquí: http://rsefalicante.umh.es/TemasRelatividad/relatividad10.htm). El usuario puede modificar la velocidad la velocidad relativa entre los dos sistemas de referencia (su valor y también su signo, es decir, la orientación del movimiento de K´ respecto de K) y ver cómo afectan estas modificaciones al diagrama doble de Minkowski.

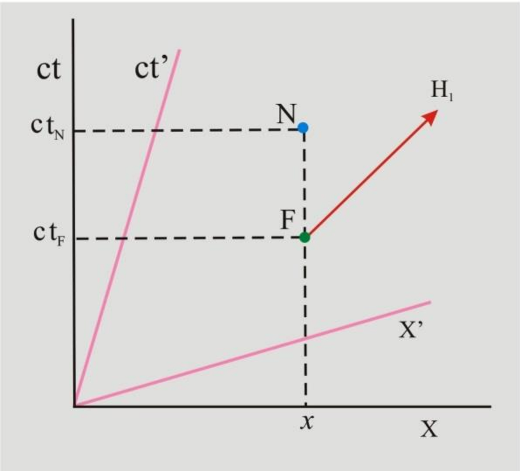
5. Una pareja pone los medios necesarios para tener un hijo. En el sistema de referencia de la madre, la fecundación (suceso "F") ocurre nueve meses antes que el nacimiento (suceso "N"). Utilizando un diagrama doble espacio-tiempo como el del problema anterior, contestad la siguiente cuestión:

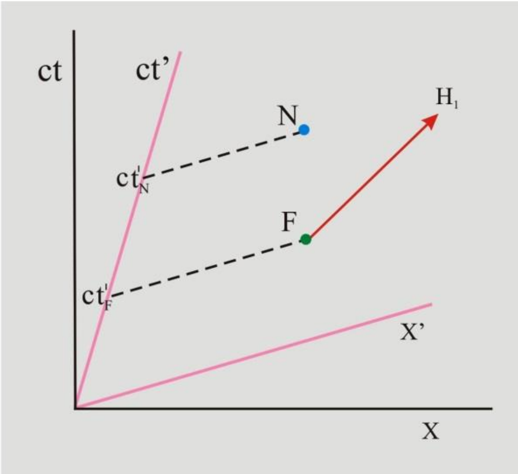
¿Podría ser que el nacimiento N fuese un suceso anterior al de la fecundación F en algún otro SRI distinto al de la madre?

En principio, podría pensarse que una cuestión como la que aquí se plantea no tiene ningún sentido, puesto que es imposible que un nacimiento ocurra antes que la fecundación que inició el proceso de embarazo. No obstante, si recordamos lo tratado en el problema 3, en él se comprobó cómo dos sucesos (digamos S_1 y S_2) que eran simultáneos en un determinado sistema de referencia inercial, K, necesariamente no lo eran en ningún otro. Más concretamente: Si en un nuevo SRI (K') que se mueve en una dirección y sentido determinado con respecto de K, resulta que S_1 es anterior a S_2, se cumplirá que en cualquier otro SRI (K'') que se mueva en sentido contrario al de K', se invertirá la situación y el suceso S_2 será anterior a S_1. Así que, puesto que es posible invertir el orden temporal de algunos sucesos, no resulta descabellado preguntarse si esto se podría traducir en una vulneración de las leyes físicas de modo que en algún SRI un efecto (en este caso un nacimiento, N) resultase anterior a la causa que lo provocó (en este caso, la fecundación, F).

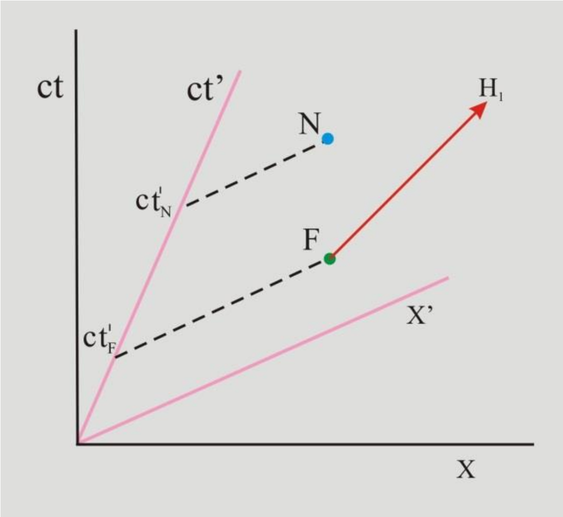
Suponiendo, para simplificar, que la madre se mantuviese en reposo durante todo el proceso en un SRI, K, ligado a ella. Representad F y N en un diagrama doble espacio-tiempo, en el que se incluyan los ejes de coordenadas (x, ct), correspondientes a K y los ejes de coordenadas (x', ct') correspondientes a otro SRI, K', que se desplaza con velocidad constante respecto de K en la dirección del eje X.

En las figuras siguientes se han representado ambos sucesos en sendos diagramas dobles. En el de la izquierda (ct , x), de color negro, el intervalo de tiempo transcurrido entre la fecundación y el nacimiento, corresponde a 9 meses (y ambos sucesos tienen la misma coordenada espacial, *x*). En el de la derecha (ct' , x'), de color fucsia, dicho intervalo de tiempo es diferente (mayor que el anterior), pero en ambos casos se observa que F es anterior a N. La flecha de color rojo representa (como es habitual) el movimiento del punto de luz H_1, correspondiente a un extremo (en la dirección del eje de abcisas) de un hipotético haz luminoso emitido desde la fecundación F. Observad que la dirección de dicha flecha coincide (como ya se ha visto en ejercicios anteriores) con la bisectriz de los ejes de coordenadas.

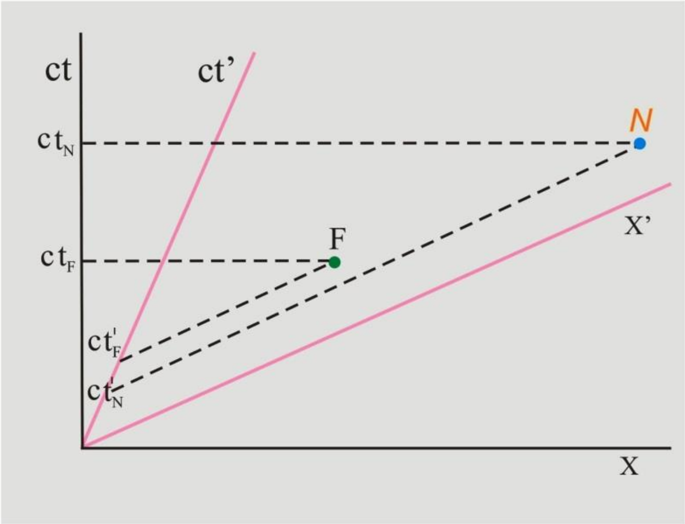




Además, por muy alto que sea (sin superar el valor límite "c") el módulo "v" de la velocidad con que K' se desplaza respecto de K, siempre ocurrirá que F estará antes que N. En efecto, un aumento de v equivale a una mayor inclinación de los ejes ct' y x' (con respecto a la vertical y horizontal respectivamente). Esto es lo que se ha hecho en la figura siguiente y, como puede observarse, F sigue siendo anterior a N.

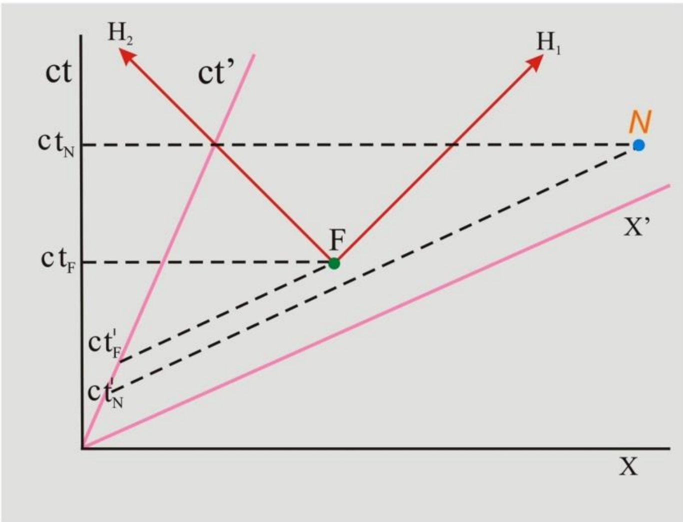


Podría, no obstante, pensarse en deshacer la condición impuesta al comienzo (que la futura madre no se moviese durante todo el embarazo) y desplazar a la mujer a un punto en el que N siga ocurriendo 9 meses después de F en el diagrama de ejes color negro, pero que, en cambio, en el otro diagrama de ejes color fucsia, N sea anterior a F, tal y como se muestra en la figura siguiente:



El diagrama anterior parece cuestionar el principio de la causalidad, ya que, de acuerdo con el mismo, en el SRI, K’, ese nacimiento alternativo (N coloreada), tendría lugar antes de la fecundación, lo cual es imposible. Revisad el diagrama y completadlo con los elementos necesarios que permitan dar una respuesta satisfactoria a este problema.

En dicho diagrama, no se ha incluido la representación del hipotético haz de luz emitido desde el punto F. Si lo hacemos, veremos que dicho nacimiento alternativo queda fuera del futuro de F (limitado por la representación del haz de luz de color rojo de extremos H_1 y H_2). En otras palabras: La madre debería viajar desde F hasta N a mayor velocidad que la luz, c, para poder tener a su hijo en ese punto (revisad, si es necesario, el ejercicio 3).

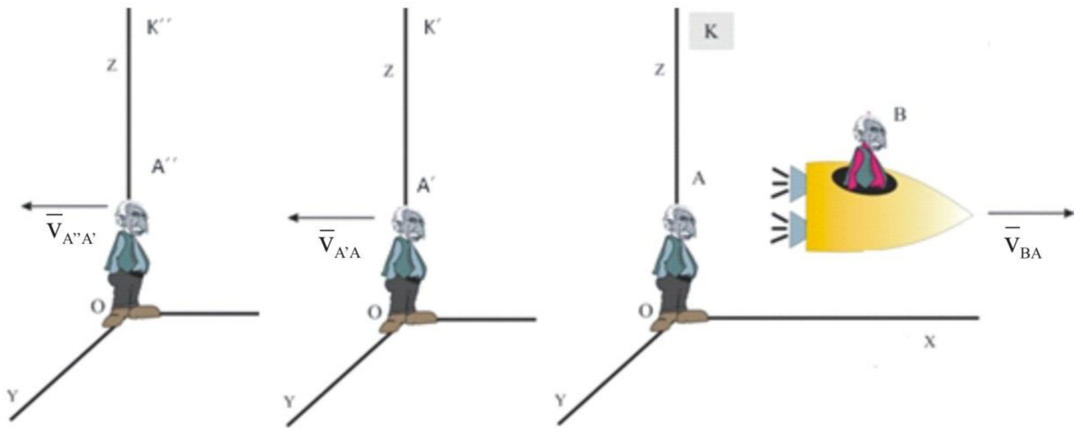


Concluimos, pues, que las leyes de la relatividad, no vulneran el principio de causalidad

Se pueden reforzar estos conceptos con dos animaciones interactivas disponibles en la página de Materiales Didácticos de la SLA de la RSEF Estas animaciones (disponibles aquí: http://rsefalicante.umh.es/TemasRelatividad/relatividad12.htm) permiten al usuario modificar la velocidad relativa entre los dos sistemas de referencia y desplazar el suceso del nacimiento para comprobar que no se vulnera el principio de causalidad de las leyes físicas.

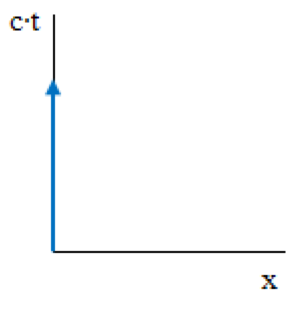
6. Un observador A se halla en reposo en el origen de coordenadas de un SRI K (x, y, z). Un viajero, B, se mueve paralelamente al eje X del SRI K con rapidez constante y positiva. Dibujad en un diagrama espacio-tiempo de Minkowski el vector que representa el desplazamiento del viajero B en los siguientes casos:

a) Con respecto a un SRI K_0 ligado al propio viajero
b) Con respecto al SRI K, ligado al observador A
c) Con respecto a otro SRI K', ligado a otro observador A' que se desplace respecto de A en sentido negativo del eje X con una velocidad muy elevada
d) Con respecto otro SRI K'' ligado a otro observador A'' que se desplace respecto de A' en sentido negativo con una velocidad muy elevada (y así sucesivamente, K''', etc.)



Realizad estas representaciones, primero aplicando la mecánica de Newton y luego la teoría de la relatividad especial.

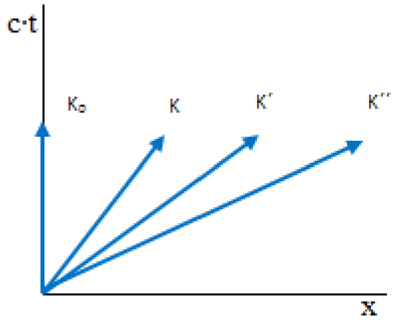
Como es lógico, en un SRI K_0 ligado al viajero (se llama sistema de referencia "propio" del viajero), el viajero no se desplaza. Por tanto, el vector que representa su viaje en un diagrama (ct , x), tanto aplicando la mecánica de Newton como la teoría de la relatividad, queda así:



A continuación, resolveremos los apartados a, b, c y d aplicando la mecánica de Newton:

Un análisis del enunciado del problema, permite darse cuenta de que la rapidez con que el viajero se aleja de cada uno de los SRI considerados (K, K’, K’’, etc.) es (en valor absoluto) cada vez mayor. Es decir: para un cierto intervalo de tiempo Δt (que en el marco de la mecánica de Newton es el mismo para todos los observadores), el cambio de posición Δx del viajero B es positivo y mayor para A’ que para A, mayor a su vez para A’’ que para A’, etc.

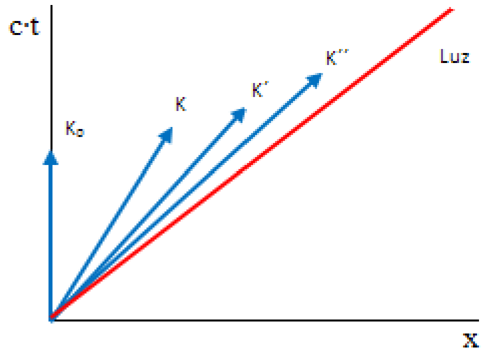
De acuerdo con las consideraciones anteriores, los vectores que representan el movimiento del viajero B respecto de dichos sistemas de referencia, en el marco de la mecánica de Newton quedan así:



Esta representación sabemos que es errónea porque, como se vio en el problema 2 la relatividad nos ha enseñado que la inclinación de estos vectores respecto de la vertical, no puede alcanzar 45º. Sin embargo, en la mecánica de Newton esa inclinación mayor de 45º es inevitable si las velocidades son suficientemente altas y para llegar a ella no es necesario que ni el viajero ni los observadores alcancen la velocidad de la luz (por ejemplo, si la velocidad de B con respecto a A es 0’6c y la de A con respecto de A’ es también 0’6c, para la mecánica de Newton, la velocidad de B respecto de A’’ es 1’2c, superando la velocidad límite (y, consecuentemente, la inclinación de 45º respecto de la vertical en el diagrama). Se nos plantea, pues, la siguiente cuestión:

¿Cómo habría que modificar la representación de los vectores en el diagrama anterior para tener en cuenta que el viajero B no puede alcanzar la velocidad c con respecto a ninguno de los observadores A, A’, A’’... pero que estos, aunque tampoco puedan alcanzar la velocidad c, sí puedan tener velocidades cada vez más elevadas?

Al ir adoptando sucesivamente los sistemas de referencia K, K’, K’’… hemos de ir considerando y representando en el diagrama desplazamientos espaciales del viajero B (Δx) cada vez mayores. Como en cada sistema de referencia, la velocidad de dicho viajero se obtiene dividiendo esos incrementos de posición (Δx) entre intervalos de tiempo (Δt) y esta velocidad no puede llegar nunca a alcanzar el valor límite, c, se hace necesario suponer que esos intervalos de tiempo (Δt) también sean cada vez mayores al ir adoptando los sistemas de referencia ligados a los observadores A, A’, A’’… de modo que el aumento paulatino de la velocidad se reflejará en el diagrama, no solo por el aumento progresivo de la pendiente de los vectores sino, también, por una longitud aparente cada vez mayor, tal y como se muestra en la figura siguiente:



Esto es precisamente lo que dice la ley de **dilatación del tiempo**, según la cual en SRI diferentes un mismo evento (en este caso el viaje de B) tiene una duración diferente, tanto mayor cuanto mayor sea la velocidad de B con respecto al SRI adoptado.

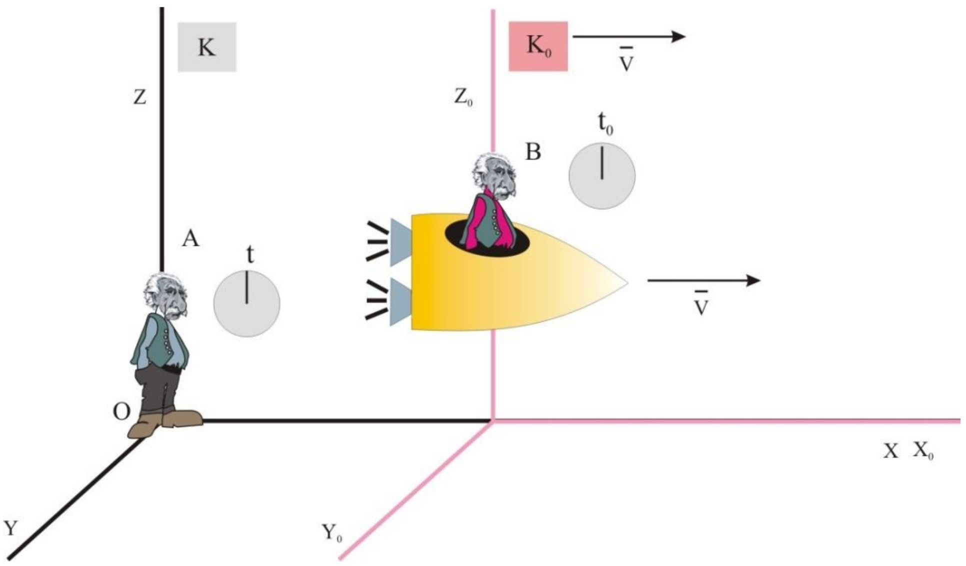
Para terminar este problema diremos que al vector que representa un movimiento en el diagrama espacio-tiempo, se conoce como "vector desplazamiento espacio-tiempo" **s** = (c·Δt, Δx) y se puede considerar como la magnitud más fundamental de la cinemática relativista. Esto es así porque es una magnitud invariante, lo que significa que se escribe igual en todos los SRI y que su módulo, definido de forma que su cuadrado viene dado por la expresión: $s^2 = (c\cdot\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$, vale lo mismo sea cual sea el SRI respecto del cual se analice el movimiento.

Obsérvese que el signo negativo que aparece en la fórmula que calcula el módulo de estos vectores explica que matemáticamente todos ellos tengan el mismo valor y que sus longitudes aparentes en el diagrama sean mayores al ir aumentando su inclinación respecto de la vertical. En el caso límite en el que la velocidad fuera c, el vector tendría una longitud infinita y el módulo del vector sería nulo- Es decir, para la luz tenemos $s = 0 \rightarrow c = \Delta x/\Delta t$ (representada en el diagrama por la línea inclinada 45º de color rojo)

Para reforzar este problema se puede trabajar con una animación interactiva de la página Web de Materiales Didácticos de la SL de Alicante de la RSEF. Manipulando la animación (disponible aquí: http://rsefalicante.umh.es/TemasRelatividad/relatividad07.htm) el usuario puede modificar la velocidad de los sistemas de referencia y ver cómo afecta la modificación al vector desplazamiento espacio-tiempo.

7. Un observador A se halla en reposo en el origen de coordenadas de un SRI K (x, y, z), mientras que un viajero, B, se mueve paralelamente al eje X del SRI K. Utilizando los conocimientos desarrollados en el problema anterior, se pide:

Deducid la ley de dilatación del tiempo ($\Delta t = \Delta t_0 \cdot \gamma$) aplicada a esta situación. Más concretamente: A partir de la invariancia del vector desplazamiento espacio-tiempo del viaje de B, obtened una expresión del cociente entre la duración del viaje (Δt) medida por A y la duración del viaje (Δt_0) medida por B.



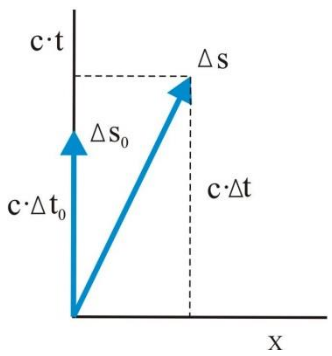
Considerad, a modo de hipótesis, de qué factores podría depender el valor del cociente $\Delta t/\Delta t_0$

En principio, podemos pensar que el valor de dicho cociente dependa de la velocidad v del viajero B con respecto al observador A y de la velocidad de la luz, c. Más precisamente:

- ✓ Cuanto mayor sea el módulo v de la velocidad con la que el viajero se aleja de A, mayor ha de ser la discrepancia entre la medida de la duración del viaje según A y B. Como casos extremos podemos plantear que si esa velocidad tendiera al límite superior c, el cociente $\Delta t/\Delta t_0$ tendería a ∞, mientras que si esa velocidad fuera nula (v = 0) no habría diferencia en los tiempos, y dicho cociente valdría 1.

- ✓ Cuanto mayor pudiera ser la velocidad de la luz, c, menor debería ser la diferencia entre los tiempos y, por tanto, el cociente entre ellos. En el caso extremo en que $c\rightarrow\infty$, se podría alcanzar cualquier velocidad, lo que supone situarnos en la mecánica de Newton y entonces tampoco habría diferencia entre los tiempos, con lo que $\Delta t = \Delta t_0$ y el cociente también valdría 1.

Una vez planteadas las hipótesis, para resolver el problema, empezamos dibujando el vector que representa el desplazamiento espacio-tiempo del viajero, B, con respecto a ambos SRI:



En el diagrama se indican los dos intervalos de tiempo, constatando cualitativamente que el intervalo de tiempo impropio, Δt (que mide el observador exterior A) es mayor que el intervalo de tiempo propio Δt_0 (que mide el viajero, B)

Para obtener la expresión del cociente entre ambos, escribimos el módulo de los dos vectores [$\Delta \mathbf{s} = (c\cdot\Delta t\ ,\ \Delta x)$ y $\Delta \mathbf{s}_0 = (c\cdot\Delta t_0\ ,\ 0)$] que representan el desplazamiento espacio-tiempo en los dos SRI. Según hemos visto en el problema anterior, los cuadrados de dichos módulos son:

$(\Delta s_0)^2 = (c\cdot\Delta t_0)^2$ (ya que en el SRI propio, ligado al viajero B, él no se mueve)

$(\Delta s)^2 = (c\cdot\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ (ya que en el SRI impropio, ligado al observador A, B se desplaza Δx)

Puesto que este módulo vale lo mismo en los dos sistemas de referencia y teniendo en cuenta que la velocidad de B en el SRI, K es $v = \Delta x/\Delta t$, tenemos:

$$(c\cdot\Delta t_0)^2 = (c\cdot\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \ \rightarrow\ \frac{c^2\cdot(\Delta t_0)^2}{(\Delta t)^2} = \frac{c^2\cdot(\Delta t)^2}{(\Delta t)^2} - \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta t)^2} = c^2 - v^2$$

De donde: $$\frac{(\Delta t_0)^2}{(\Delta t)^2} = \frac{c^2-v^2}{c^2} \rightarrow \frac{\Delta t}{\Delta t_0} = \frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \ \rightarrow \Delta t = \Delta t_0\cdot\gamma$$

Para terminar, comprobad que se cumplen las hipótesis y los casos límites planteados.

8. Durante el año 2017 el telescopio espacial Kepler descubrió que alrededor de la estrella catalogada como GJ 9827 orbitan tres planetas similares a la Tierra. ¿A qué velocidad tendría que viajar una nave para llegar a uno de esos planetas, situado a 100 años luz de la Tierra y que sus tripulantes pudieran confirmar la posibilidad de establecer allí una colonia terrestre?

Planteamiento

Se trata de un tema interesante que ha sido planteado muchas veces en el cine y la literatura de ciencia-ficción. Sin embargo, en la actualidad ha adquirido más relevancia debido a los graves problemas que amenazan la vida en nuestro planeta, como el cambio climático, la superpoblación o la posibilidad de una guerra nuclear devastadora. El científico Stephen Hawking no era muy optimista en cuanto a la solución de este tipo de problemas y en 2017 afirmaba que la humanidad no tiene futuro si no coloniza el espacio. La cuestión que se plantea en este problema es hasta qué punto eso sería hoy factible.

Un aspecto importante a considerar previamente es el cuerpo teórico de conocimientos que se ha de utilizar. Si alguien aplicara la mecánica newtoniana, concluiría que los astronautas deberían viajar a una velocidad mayor que la velocidad de la luz para así llegar antes de cumplir los 80 años. En efecto, si queremos que, por ejemplo, el viaje dure 50 años, aplicando las ecuaciones de la cinemática clásica al caso planteado, es fácil obtener que la velocidad sería de 600.000 km/s, es decir, el doble que la velocidad de la luz. Se trata de un resultado incorrecto ya que, como sabemos, nada puede moverse a mayor velocidad que la luz. Algunas personas, utilizan este hecho para argumentar que los astronautas jamás podrían llegar vivos a ese planeta, puesto que, al no poder siquiera igualar su velocidad a la de la luz, siempre emplearían más de 100 años en hacer el viaje. Naturalmente, el error de esta argumentación se debe a que en ella se combina un hecho relativista (la existencia de una velocidad límite c), con la definición clásica de la velocidad como el cociente entre una longitud y un tiempo que se suponen ambos absolutos.

Un planteamiento correcto de la situación exige abandonar la mecánica de Newton y sustituirla por la Teoría Especial de la Relatividad en la que se tiene en cuenta el carácter relativo de las longitudes y los intervalos de tiempo. Ahora bien, para poder aplicar esta Teoría es necesario imponer algunas condiciones simplificadoras a la situación. Hay que tener en cuenta que la relatividad especial se aplica únicamente en sistemas de referencia inerciales (SRI) y, estrictamente, ni la nave, ni la Tierra, ni el planeta lejano lo son. Por ello, resulta necesario suponer poco importante la aceleración centrípeta que tiene el centro de la Tierra en su movimiento alrededor del Sol, con objeto de adoptar dicho centro terrestre como origen de un SRI K. Además, para utilizar las relaciones entre longitudes y tiempos impropios y propios, relacionando el punto de vista de la Tierra con el punto de vista de la nave, es obligado despreciar los procesos de despegue y de aterrizaje, porque son acelerados. También despreciaremos la influencia gravitatoria del resto de objetos del Universo sobre la nave a lo largo del viaje. Esto último es bastante razonable porque la fuerza gravitatoria disminuye muy deprisa con la distancia y se puede considerar a la nave muy alejada de otros objetos celestes durante el viaje (las distancias medias entre objetos celestes son enormes en comparación con el tamaño de dichos objetos). Finalmente, supondremos que la nave dispone, o es capaz de generar, todo lo necesario para poder realizar tal viaje, manteniendo a los astronautas en buenas condiciones, que la vida media de los mismos es del orden de 80 años y que al comenzar el viaje tienen 30 años de edad.

Con las condiciones impuestas anteriormente, la nave viajaría desde la Tierra hacia el planeta lejano P a una velocidad de crucero constante. Entonces se puede hacer operativa la situación problemática planteada, expresando que la magnitud buscada es el valor mínimo que ha de poseer esa velocidad para que los astronautas lleguen al planeta antes de que transcurra un cierto intervalo de tiempo obtenido en la nave. Este intervalo de tiempo, medido por los viajeros, deberá ser tal, que alcancen su objetivo antes de superar su vida media estimada.

Hipótesis

Cabe plantear que la velocidad buscada dependa de la separación entre la Tierra y el planeta (una distancia propia porque se determina en el SRI de la Tierra, L_0), del tiempo límite estimado para el viaje (también propio, es decir, obtenido en el SRI de la nave, Δt_0) y, también, de la velocidad de la luz c.

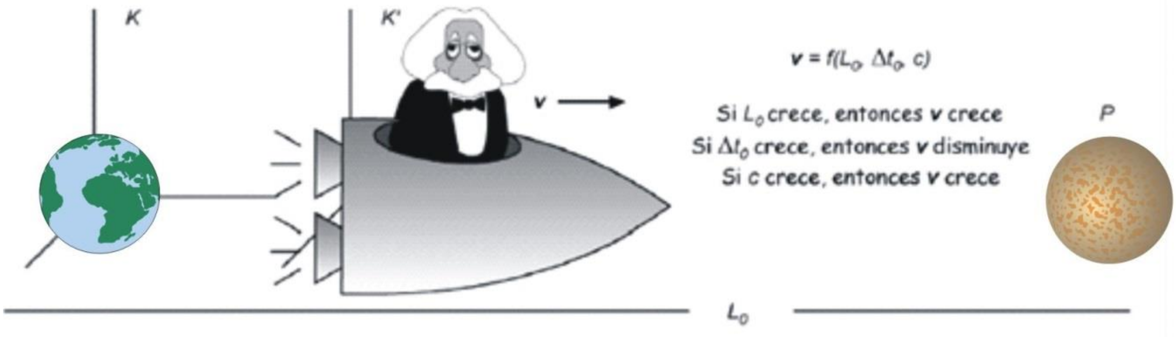
$$v = f(L_0, \Delta t_0, c)$$

Más precisamente, esperamos que, a igualdad de los restantes factores:

- ✓ Cuanto mayor sea la distancia propia entre la Tierra y el planeta, L_o, mayor debería ser v, es decir, más deprisa deba viajar la nave hacia el planeta para lograr que sus tripulantes lleguen allí vivos.

- ✓ Del mismo modo, esperamos que, cuanto mayor sea el tiempo estimado de vida de los astronautas en la nave, Δt_0, más despacio podrá viajar esta sin que mueran antes de llegar al planeta.

- ✓ Por último, también es lógico plantear que en un hipotético Universo, donde el límite superior de velocidades c fuera mayor, la nave tendría que viajar más deprisa.



Se pueden plantear también algunos casos límite de fácil interpretación. Por ejemplo:

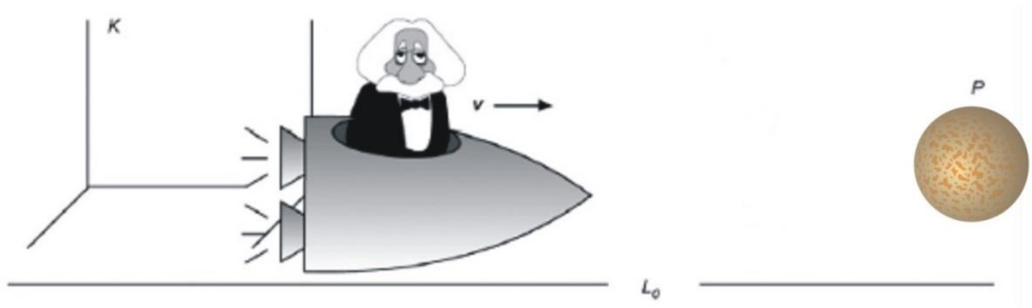
- ✓ Si la distancia entre la nave y el planeta fuera nula, es evidente que la nave no necesitaría ni siquiera emprender el viaje para llegar al planeta. Por tanto, para $L_0 \to 0$, se debería cumplir también $v \to 0$.

- ✓ Por otra parte, si los tripulantes pudieran vivir eternamente ($\Delta t_0 \to \infty$) la nave podría ralentizar su viaje todo lo que se deseara ($v \to 0$).

¿Qué ocurriría en los casos extremos opuestos ($L_0 \to \infty$ y $\Delta t_0 \to 0$)? ¿Y para valores extremos de la velocidad de la luz c, es decir, suponiendo que $c \to \infty$ o que $c \to 0$?

Estrategias de resolución

Se puede intentar resolver el problema adoptando un SRI, K, ligado a la Tierra, y expresar la velocidad de la nave respecto de dicho sistema. En ese sistema de referencia, la Tierra y el planeta están en reposo, y la nave se desplaza con velocidad v desde la Tierra al planeta, tal como se muestra en la figura siguiente. Adoptando este punto de vista, la velocidad buscada es el cociente entre la distancia de la Tierra al planeta (una longitud propia L_0) y la duración del viaje medida desde la Tierra (un intervalo de tiempo impropio Δt). Por lo tanto, usaremos la fórmula de la dilatación de tiempos para relacionar la duración del viaje impropia con la duración de ese mismo viaje propia (Δt_0).



Alternativamente se puede adoptar un SRI, K', ligado a la nave. Tal como muestra la figura siguiente. Para cualquier observador situado en dicho sistema de referencia, la nave está en reposo y una hipotética varilla con extremos en la Tierra y en el planeta atraviesa el origen del SRI K' con una rapidez v constante.

Según este punto de vista, la velocidad buscada depende de la longitud de la varilla que miden los astronautas (una longitud impropia L, porque la varilla se mueve respecto de K') y de la duración del viaje medida también por ellos (un intervalo de tiempo propio Δt_0, porque el suceso empieza y acaba en el mismo punto). Por lo tanto en este caso habrá que utilizar la fórmula de la contracción de longitudes para relacionar la longitud del viaje para este sistema de referencia (impropia) con la longitud propia (L_0).

Resolución operativa

Siguiendo la primera estrategia de resolución, escogemos como sistema de referencia la Tierra. En ese caso, podemos escribir:

$$v = \frac{L_0}{\Delta t}$$

Si tenemos ahora en cuenta la relación entre el tiempo propio e impropio $\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_0$ obtenemos:

$$v = \frac{L_0}{\gamma \cdot \Delta t_0}$$

Y sustituyendo en la expresión anterior $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, obtenemos finalmente:

$$v = \frac{L_0 \cdot c}{\sqrt{L_0^2 + c^2 \Delta t_0^2}}$$

Comprobad que se obtiene el mismo resultado utilizando la segunda estrategia de resolución

Análisis del resultado

Analizando el resultado literal anterior, podemos ver en primer lugar que es dimensionalmente homogéneo (L/T en ambos lados del signo igual). Se trata de una condición necesaria (aunque no suficiente) para que sea correcto. Vemos también que tal y como se había supuesto, la velocidad buscada depende de L_0, Δt_0 y c, de forma que v aumenta cuando (a igualdad de los restantes factores) L_0 aumente y cuando Δt_0 disminuya. Además se cumplen los casos límite y cuando $L_0 \to 0$, se obtiene que $v \to 0$ y para $\Delta t_0 \to \infty$, se obtiene $v \to 0$. En cuanto a los casos extremos opuestos, en el caso que $L_0 \to \infty$ y en el caso de que $\Delta t_0 \to 0$, podemos calcular los límites correspondientes, con lo que obtenemos:

$$\lim v_{(L_0 \to \infty)} = \lim_{(L_0 \to \infty)} \frac{c}{\sqrt{1 + \dfrac{c^2 \Delta t_0^2}{L_0^2}}} = c$$

$$\lim v_{(\Delta t_0 \to 0)} = \lim_{(\Delta t_0 \to 0)} \frac{L_0 \cdot c}{\sqrt{L_0^2 + c^2 \Delta t_0^2}} = c$$

Estos resultados son muy ilustrativos. En efecto, el hecho de que $v \to c$ cuando la distancia entre la Tierra y el planeta se hace tender a infinito, o cuando la duración del viaje se hace tender a cero, enseña que la velocidad de la luz c es en relatividad el límite máximo de la velocidad de cualquier objeto. Esto significa que c juega en esta teoría el mismo papel que jugaría una velocidad infinita en la física clásica (ciertamente, es fuerte la tentación de pensar que para estas dos situaciones podría ser $v \to \infty$).

Por lo que se refiere a hipotéticos valores extremos de la constante c, fácilmente se comprueba que para $c \to 0$, también $v \to 0$. Un resultado bastante lógico, ya que lo que cuenta es la comparación entre la velocidad de la nave y la velocidad límite, expresada mediante la magnitud del cociente v/c, y, por lo tanto, cuanto menor sea el límite c, menor puede ser la velocidad necesaria para hacer elevado este cociente.

Finalmente, calculando el límite para $c \to \infty$, se obtiene:

$$v = \lim_{(c\to\infty)} \frac{L_0 \cdot c}{\sqrt{L_0^2 + c^2 \Delta t_0^2}} = \lim_{(c\to\infty)} \frac{L_0}{\sqrt{\frac{L_0^2}{c^2} + \Delta t_0^2}} = \frac{L_0}{\Delta t_0}$$

Este resultado ilustra el hecho de que establecer este límite equivale a decir que es posible alcanzar cualquier velocidad por grande que sea. Por lo tanto, supone una vuelta a los planteamientos de la mecánica de Newton. Entonces el tiempo sería absoluto y el espacio también, de manera que no habría diferencia entre tiempo y longitud propios o impropios. Por eso, en este caso extremo se obtiene el mismo resultado que proporcionaría la mecánica newtoniana.

Esta última conclusión es exponente de un concepto de una importancia capital: el hecho de que la mecánica de Newton se puede considerar una teoría límite de la relatividad especial, en el sentido de que sus leyes o sus expresiones se pueden deducir de las relativistas haciendo a la velocidad de la luz, c, tender a infinito o, lo que es equivalente, haciendo al cociente v/c tender a cero.

Resultados cuantitativos

Sustituyendo en el resultado literal anterior c = 1 año-luz/año y considerando Δt_0 = 50 años, se obtiene:

$v = \frac{L_0 \cdot c}{\sqrt{L_0^2 + c^2 \Delta t_0^2}} = \frac{100 \cdot 1}{\sqrt{100^2 + 1 \cdot 50^2}}$ = 0’89 años-luz/año o, lo que es equivalente: v = 0’89·c

Es decir, la nave tendría que viajar a una velocidad de crucero igual al 89 % de la velocidad de la luz para que el viaje durara 50 años (lo que equivale a que los astronautas llegasen al planeta con una edad de 80 años). Podemos pensar que se trata de una edad excesiva. Si queremos que lleguen más jóvenes, por ejemplo a los 55 años, la duración del viaje (medida por los astronautas) debería reducirse a 25 años. *¿Cuál sería la velocidad de crucero en ese caso?*

Para calcularla, basta con volver a utilizar la expresión anterior, cambiando Δt_0 = 50 años por Δt_0 = 25 años, con lo que se obtiene v = 0’97·c, es decir, el 97 % de la velocidad de la luz.

Como es lógico, los resultados obtenidos solo son válidos mientras se cumplan las condiciones que hemos impuesto para resolver el problema de forma simplificada. Las cuestiones pendientes acerca de cómo obtener la energía necesaria, cómo mantener sanos a los tripulantes, cómo acelerar la nave, cómo frenarla desde una velocidad cercana a la de la luz hasta que pueda aterrizar... son obstáculos tan grandes que hacen que sea mucho más rentable (y aconsejable) centrar todos nuestros esfuerzos en afrontar seriamente los graves problemas que amenazan nuestra supervivencia y la del resto de seres vivos aquí y ahora (cambio climático, superpoblación, pérdida de biodiversidad, contaminación, etc.), en lugar de buscar la solución planteándose la colonización de otro planeta.

Para reforzar los conceptos involucrados en este problema se puede trabajar con una animación interactiva que reproduce la misma situación. El usuario puede modificar los parámetros y ver cómo afectan las modificaciones al resultado del problema. La animación está disponible en la página web Web de Materiales Didácticos de la SL de Alicante de la RSEF (aquí: http://rsefalicante.umh.es/TemasRelatividad/relatividad13.htm).

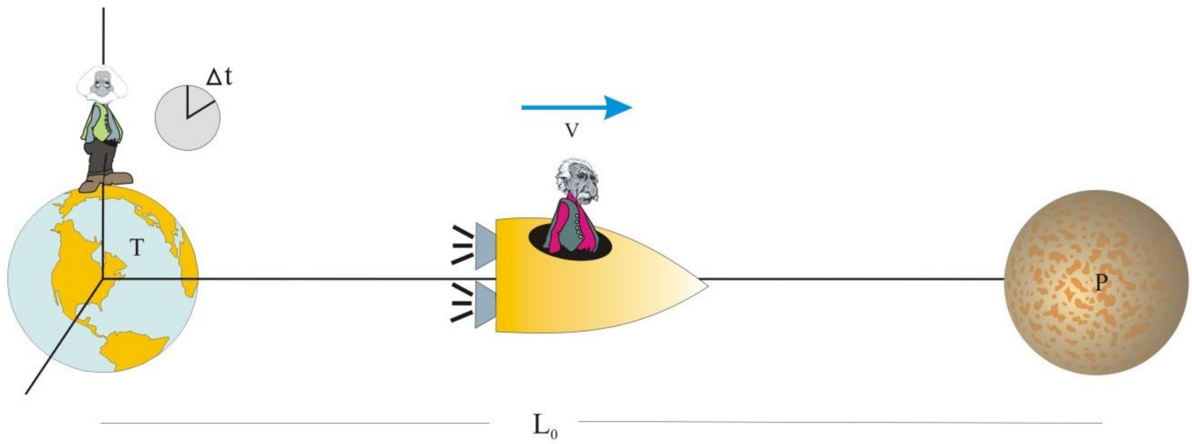
9. De acuerdo con la Teoría de la Relatividad Especial (TRE), para un astronauta que se aleje de la Tierra en una nave espacial a una velocidad próxima a la de la luz, el tiempo pasa más lentamente que para otro que permanece en la Tierra. Así, por ejemplo, podría suceder que cuando el astronauta terrestre hubiese envejecido 10 años, el de la nave lo hubiese hecho en solo 6 años. Sin embargo, también es cierto que podríamos considerar la nave en reposo y la Tierra alejándose de ella en sentido contrario al anterior, con lo que podría decirse que cuando el astronauta de la nave hubiese envejecido 10 años, para el astronauta terrestre habrían pasado solo 6 años. Ambas cosas no pueden ser ciertas. ¿Dónde está el error?

A modo de hipótesis, podríamos pensar que la situación descrita no sea en realidad tan simétrica como parece desprenderse del enunciado. Si esto fuese así, una posible estrategia para responder la cuestión planteada, sería buscar la presencia de alguna asimetría en cuanto a las magnitudes que intervienen.

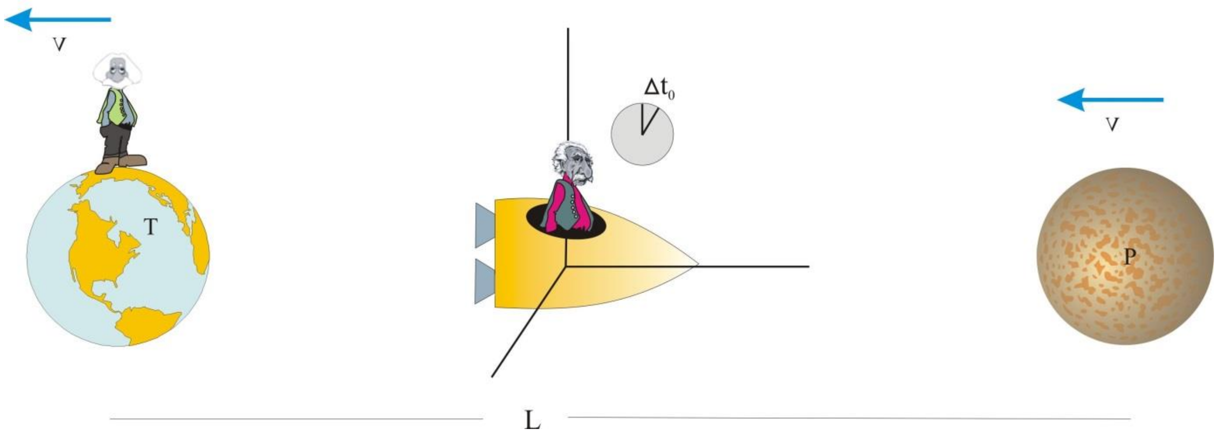
Considerad cómo serían las medidas del tiempo transcurrido (duración del viaje) y de la distancia medida, para el astronauta ligado a la Tierra y para el astronauta ligado a la nave.

Podemos imaginarnos la situación suponiendo que se trata de un viaje espacial entre la Tierra y un planeta extrasolar, y simplificar suponiendo que ambos astros se hallan en reposo uno respecto del otro.

Para el astronauta terrestre el proceso del viaje se inicia en un punto (la Tierra) de su sistema referencial y finaliza en otro punto distinto (el planeta). Como ambos puntos permanecen en reposo, para este observador la distancia entre uno y otro será una longitud propia (L_0). En cambio, la duración del viaje, por comenzar en un punto y acabar en otro, será un tiempo impropio (Δt).



Para el astronauta que va dentro de la nave, él se encuentra en reposo y son la Tierra y el planeta quienes se desplazan, de modo que el viaje, para este observador, se inicia en su nave (con la Tierra alejándose de ella) y termina también en su nave (con el planeta llegando a ella), por lo que para el astronauta de la nave el tiempo transcurrido sería un tiempo propio (Δt_0). En cuanto a la distancia, si nos imaginamos una varilla recta que conecta el planeta con la Tierra, sería como si toda esa varilla atravesara a la nave comenzando por un extremo y acabando por el otro, es decir, sería una longitud en movimiento (respecto de la nave) y, por tanto, una longitud impropia (L).



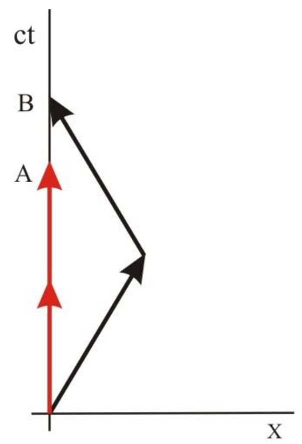
Vemos, pues, que no hay simetría ni en cuanto al tiempo ni en cuanto a la distancia. Teniendo en cuenta que $\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_0$ y que γ es siempre mayor que 1, cabe concluir que:

El tiempo transcurrido para el astronauta que permanece en la Tierra ha de ser mayor que para el que permanece en la nave.

Podemos ampliar este problema, planteándonos la siguiente cuestión:

Imaginad ahora que el astronauta de la nave, regresa a la Tierra. Representad el viaje completo (ida + vuelta) en un diagrama espacio-tiempo, elaborado según el punto de vista del astronauta que permanece en Tierra. Comprobad que dicho diagrama confirma que cuando se reencuentren el astronauta que permanece en Tierra habrá envejecido más.

Según el punto de vista del astronauta que permanece en Tierra, los vectores que representan al viajero tienen una longitud aparente mayor en el diagrama (vectores de color negro) y cuando dicho viajero ha completado el viaje de ida y vuelta, terminan en un lugar del espacio-tiempo, representado en el diagrama por el punto B. Como según el mismo punto de vista, el astronauta que permanece en Tierra no se mueve, los vectores correspondiente a él se sitúan encima del eje temporal (c·t) y tienen una longitud aparente menor en el diagrama (vectores de color rojo), terminando en un lugar del espacio-tiempo representado por el punto A.

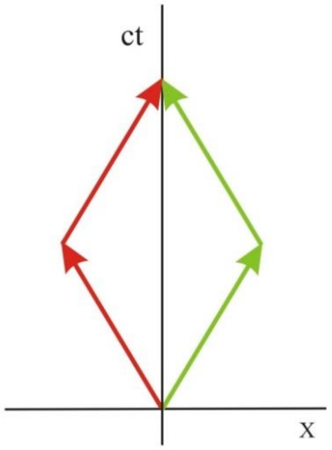


Como t_B es mayor que t_A, para que coincidan ambos astronautas en la Tierra hay que prolongar el extremo de los vectores rojos hasta llegar al extremo de los vectores negros. Esta prolongación es, precisamente, el envejecimiento adicional del astronauta que queda en Tierra con respecto al astronauta viajero.

Conviene insistir en el hecho de que la situación de los dos astronautas no es simétrica y ello se pone en evidencia en este diagrama porque su elaboración sólo es posible en un SRI, es decir, en este caso según el punto de vista del astronauta que permanece en Tierra. El astronauta que viaja necesariamente tiene que acelerar (como mínimo cuando cambia el sentido de su movimiento para regresar). En el momento en que lo haga, ya no podemos dibujar un diagrama equivalente con respecto a su sistema de referencia, porque deja de ser inercial.

Plantead una posible situación realmente simétrica entre los dos astronautas y resolvedla cualitativamente con un diagrama espacio tiempo.

Una posible situación completamente simétrica, podría ser imaginar que ambos astronautas viajan en sus naves en sentidos opuestos y vuelven ambos a la Tierra. En este caso sus vectores espacio-tiempo, con respecto a un SRI ligado a la Tierra, sí coinciden después de sus respectivos viajes de ida y vuelta:



La aparente paradoja según la cual al cambiar el punto de vista se podrían obtener conclusiones diferentes sobre el envejecimiento de los dos astronautas, se conoce como "paradoja de los gemelos". Su formulación más habitual se debe a Paul Langevin (1872-1976), y Einstein no la aclaró hasta que formuló la relatividad general y demostró con sus leyes que es el gemelo de la Tierra quien envejece más rápido. Sin embargo, aunque Einstein la resolvió inicialmente en el contexto de la relatividad general, en este problema hemos visto que la paradoja se puede resolver también dentro de los límites de la teoría de la relatividad especial y que la clave de la solución está en el hecho de que no existe una verdadera simetría entre ambos gemelos, ya que sólo uno a uno de ellos se puede ligar a un SRI.

Ahora bien, la influencia de la gravedad en una situación real puede ser muy importante y afectar significativamente al resultado del problema. La teoría de la relatividad general establece que, además de la dilatación temporal que hemos visto en este problema, existe otra dilatación temporal de origen gravitatorio, según la cual el tiempo transcurre más lentamente cuanto más intenso sea el campo gravitatorio en el lugar donde se determina ese tiempo. En este caso el astronauta que permanece en Tierra está sometido a un campo gravitatorio que apenas afecta al astronauta viajero. Por tanto, la dilatación temporal de origen gravitatorio tiene una influencia opuesta a la dilatación temporal que hemos visto en el problema y que predice la relatividad especial.

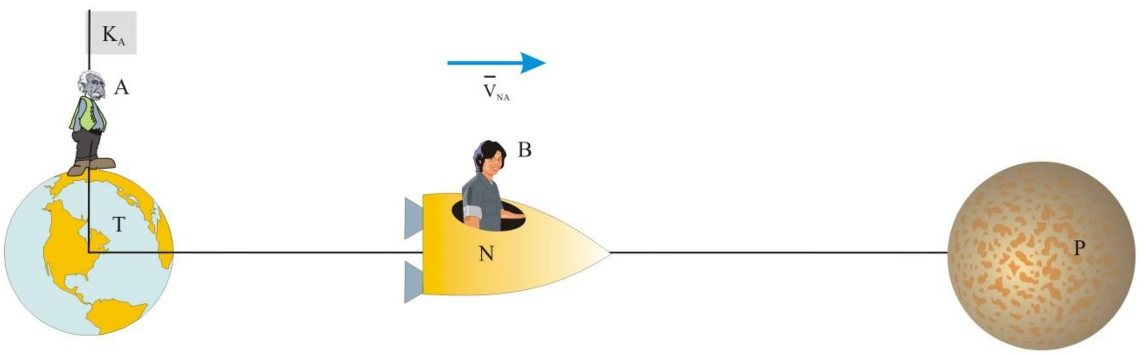
Para terminar podemos comentar la resolución cuantitativa de estos problemas es indispensable en aspectos de la vida cotidiana actual. Un ejemplo de esto tiene que ver con el sistema de localización GPS, cuyo funcionamiento no sería posible sin tener en cuenta la dilatación temporal de origen gravitatorio, porque los relojes del sistema que hay en los satélites están sometidos a una gravedad menor que los situados en la Tierra.

Para reforzar el problema de los gemelos se puede trabajar con dos animaciones interactivas de la página Web de Materiales Didácticos de la SL de Alicante de la RSEF. Manipulándolas (están disponibles aquí: http://rsefalicante.umh.es/TemasRelatividad/relatividad14.htm) se pueden modificar las características del viaje y ver cómo afectan las modificaciones a los correspondientes diagramas espacio-tiempo y a la diferencia en el envejecimiento de los gemelos.

10. Desde un laboratorio terrestre, un científico (A) registra el paso frente a la Tierra de una nave espacial en la que viaja una astronauta (B) y comprueba que se aleja en línea recta de la Tierra, con una velocidad de 0'8c, hacia un exoplaneta situado a 8 años luz. Sabiendo que en el momento de la observación, A y B tienen ambos 40 años, calculad las edades de ambos:

1º) Cuando la nave llegue a la altura del exoplaneta (suponiendo la Tierra en reposo).
2º) Cuando el exoplaneta llegue a la nave (suponiendo que la nave se halla en reposo, la Tierra se aleja de ella y el exoplaneta se acerca).

Comenzaremos suponiendo la Tierra y el exoplaneta en reposo en un SRI K_A con origen en el centro de la Tierra. En dicho sistema de referencia, la Tierra se encuentra en reposo, mientras que la nave se aleja de ella con v_{NA} = 0'8c (en valor absoluto) tal y como se observa en la figura siguiente:



$$\text{Para el científico A} \quad \begin{cases} \text{Tierra: } v_{TA} = 0 \\ \text{Nave: } v_{NA} = \dfrac{L_A}{\Delta t_A} = \dfrac{L_0}{\Delta t} \end{cases}$$

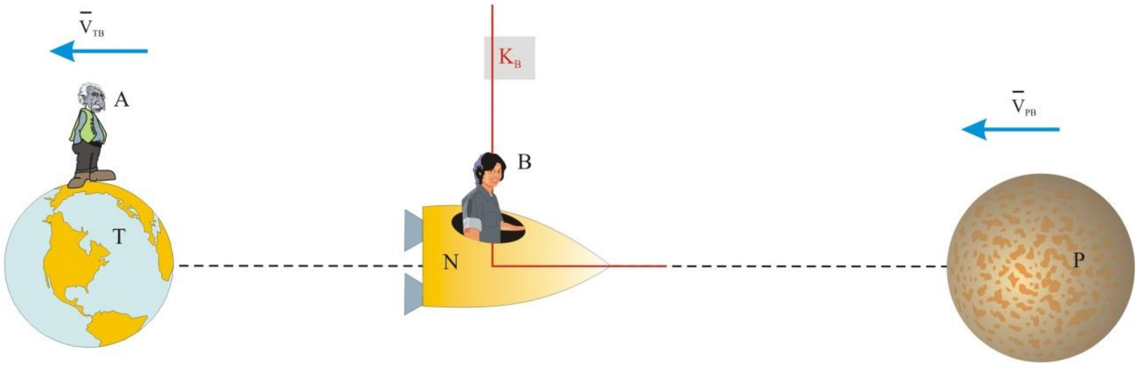
Y despejando:

$$\Delta t = \frac{L_0}{v_{NA}} = \frac{8 \text{ añosluz}}{0'8 \dfrac{\text{añosluz}}{\text{año}}} = 10 \text{ años} \rightarrow \text{Edad de A} = 40 + 10 = 50 \text{ años}$$

Para conocer la edad de B bastará considerar que:

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v_{NA}}{c}\right)^2} = 10 \cdot \sqrt{1 - 0'64} = 6 \text{ años} \rightarrow \text{Edad de B} = 40 + 6 = 46 \text{ años}$$

Si nos situamos ahora en el SRI K_B con origen en el centro de la nave, es obvio que en dicho sistema la nave se halla en reposo mientras que la Tierra se aleja de ella con v_{TB} = 0'8c (en valor absoluto) y el exoplaneta se acerca con la misma velocidad, tal y como se observa en la figura siguiente:



$$\text{Para el astronauta B}\quad \begin{cases} \text{Tierra}: \ v_{TB} = \dfrac{L_B}{\Delta t_B} = \dfrac{L}{\Delta t_0} \\ \text{Nave}: \ v_{NB} = 0 \end{cases}$$

Y despejando:

$$\Delta t_0 = \frac{L}{v_{TB}} = \frac{\frac{L_0}{\gamma}}{v_{TB}} = \frac{0'6 \cdot L_0}{v_{TB}} = \frac{0'6 \cdot 8 \text{ años luz}}{0'8 \frac{\text{años luz}}{\text{año}}} = 6 \text{ años} \rightarrow \text{Edad de B} = 40 + 6 = 46 \text{ años}$$

Para conocer la edad de A consideraremos:

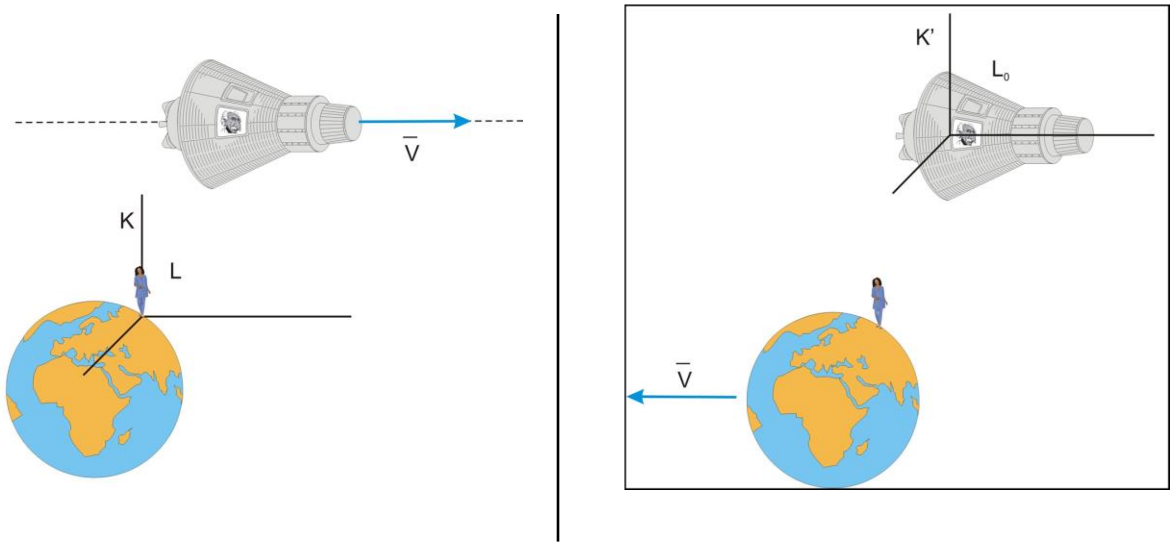
$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_0 = \frac{6}{0'6} = 10 \text{ años} \rightarrow \text{Edad de A} = 40 + 10 = 50 \text{ años}$$

Comprobamos, pues, que los resultados en cuanto a las edades del científico y de la astronauta son los mismos, tanto si se miden desde un SRI como si se miden desde el otro.

11. Se determina por métodos ópticos la longitud de una nave espacial que pasa por las proximidades de la Tierra obteniendo un valor de 100 m. En contacto radiofónico los astronautas que viajan en la nave comunican que la longitud de su nave es de 120 m. Considerando Tierra y nave como sistemas de referencia inerciales, determinad la velocidad (módulo) con que la nave se desplaza respecto de la Tierra.

Planteamiento

La longitud de la nave, que se mide por métodos ópticos en un sistema de referencia, K, ligado a un punto de la superficie de Tierra, es una longitud impropia, L, ya que los extremos de dicha nave se desplazan con respecto cualquier observador terrestre situado en ese sistema de referencia, haciéndolo en la misma dirección en la que se orienta esa longitud (dibujo situado a la izquierda). En cambio, la longitud de la nave que miden los astronautas en un sistema de referencia, K', ligado a la nave, es su longitud propia, L_0, puesto que la nave está en reposo en dicho sistema de referencia (dibujo situado a la derecha) respecto al observador (cualquier astronauta dentro de la nave). Procede, por tanto, considerar la ley de la contracción de la longitud y tratar de calcular a partir de la misma, el valor de la velocidad buscado.



Para poder abordar el problema, impondremos dos condiciones que lo simplifican: En primer lugar, consideraremos despreciable la aceleración que tiene el punto de la Tierra en el que se sitúa el observador terrestre (debida al movimiento combinado de rotación de la Tierra respecto de su eje y de traslación respecto del Sol) y, en segundo lugar, supondremos que la nave se desplaza con movimiento rectilíneo y uniforme. Todo ello, al menos, durante el tiempo que duran las mediciones. De este modo, ambos sistemas de referencia (K y K') serían inerciales uno respecto del otro

Hipótesis

Tal y como venimos haciendo, como el movimiento transcurre en una única dirección, podemos trabajar con la única componente del vector velocidad en dicha dirección (cuyo valor absoluto coincidirá con el módulo de dicha velocidad) a la que designaremos como "v".

Como es lógico, el valor de v dependerá de la longitud impropia de la nave, L, de su longitud propia, L_0, y de la velocidad de la luz, c. Más precisamente, cabe esperar que:

- ✓ Cuanto mayor sea el cociente entre L y L_0, mayor ha de ser la velocidad de la nave. En el caso límite en que dicho cociente tienda a infinito ($L_0/L \to \infty$) la velocidad, v, debería tender hacia al límite superior de velocidades, c ($v \to c$). En el caso límite opuesto, es decir, si $L_0/L \to 1$, estamos planteando que no haya contracción de la longitud, lo que sólo puede ocurrir si la nave está en reposo ($v \to 0$).

- ✓ En cuanto a la influencia de la velocidad de la luz, c, en un hipotético universo en el que c tuviese un valor más alto, mayor podría ser la velocidad de la nave para un determinado valor del cociente entre su longitud impropia y propia.

Resolución

Primero escribimos la ley de la contracción de la longitud aplicada a este caso: $L = L_0/\gamma$

Sustituyendo en la expresión anterior el factor gamma: $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$

se obtiene: $L = L_0 \cdot \sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la última ecuación y despejando v, se llega finalmente a:

$$v = c \cdot \sqrt{1-\left(\frac{L}{L_0}\right)^2}$$

Sustituyendo ahora los valores numéricos, se obtiene v = 0'4c. Es decir, si la discrepancia entre las longitudes de la nave, implica una contracción del 16'7 %, la velocidad a la que está viajando dicha nave es un 40% de la velocidad de la luz.

Análisis del resultado

Comprobad que, además de obtener una ecuación dimensionalmente homogénea (mismas dimensiones a izquierda y derecha de la igualdad), en el resultado literal anterior se cumplen todas las hipótesis y casos límite que hemos planteado.

Resulta instructivo ahora añadir en el análisis una pequeña reflexión acerca de qué ocurre con el resultado si hacemos tender la velocidad de la luz, c, hacia infinito. En efecto, a partir del resultado podríamos tener la tentación de pensar que al hacer c=∞ obtendremos también v=∞. Sin embargo, este razonamiento sería erróneo, ya que no estaría teniendo en cuenta que hacer c=∞ significa que la nave, en principio, podría alcanzar cualquier velocidad, lo que equivale a ubicar el problema en el marco de la mecánica de Newton, donde es preciso considerar que además de no existir un límite superior de velocidades, también ocurre que las longitudes son absolutas. Por tanto, en este caso, si hacemos c=∞ también debemos hacer $L=L_0$ con lo que el resultado resulta una indeterminación:

$$\text{Si } v = \infty \rightarrow L = L_0 \rightarrow v = 0 \cdot \infty \text{ (indeterminación)}$$

La velocidad quedaría indeterminada. Su valor podría ser cualquiera, con independencia de qué longitud tenga la nave, una longitud, por otra parte, absoluta, es decir, la misma para los astronautas que para los observadores terrestres.

Nuevas preguntas

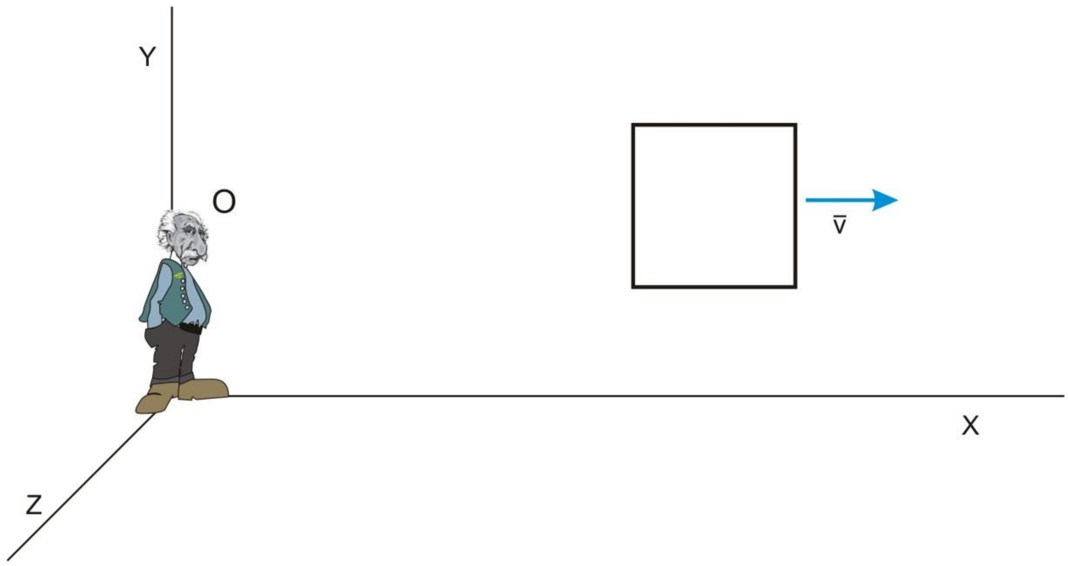
¿A qué velocidad tendría que viajar la nave considerada en este problema para que la diferencia entre las longitudes propia e impropia fuese tan solo de 8 cm?

Sustituyendo y operando se obtiene v = 0'04c. Es decir, debería moverse a una velocidad 10 veces menor que la anteriormente calculada. Aun así, esa velocidad es de $12 \cdot 10^6$ m/s, lo que equivale a 43200000 km/h.

12. La longitud propia de cada uno de los lados de un cuadrado es "a". ¿Cuánto valdrá su perímetro para un observador "O" situado en un sistema de referencia inercial que se aleja de dicho cuadrado a una velocidad constante y en dirección paralela a uno de sus lados?

Planteamiento

La situación planteada en el enunciado es totalmente equivalente a suponer que O se encuentra en reposo y es el cuadrado el que se aleja de él con velocidad constante, tal y como se representa en la figura siguiente.



Para un hipotético observador ligado al cuadrado, cualquiera de sus lados estaría en reposo y, por tanto, su longitud sería una longitud propia y su perímetro valdría P' = 4·a. Sin embargo, para el observador O, el cuadrado se encuentra en movimiento, por lo que las dos longitudes que se orientan en la misma dirección del movimiento (el eje X de la figura anterior) se contraen, mientras que las que las otras dos que son perpendiculares al movimiento, no se alteran. Consecuentemente, para O el perímetro del cuadrado será menor que 4a.

Hipótesis y casos límite

Podemos suponer que, para el observador O, el perímetro (P) del cuadrado dependerá de la longitud propia (a) de cada uno de los cuatro lados, del valor absoluto (v) de la velocidad con que se aleja el cuadrado, y de la velocidad de la luz (c). Es decir:

$$P = f(a, v, c)$$

Más precisamente, cabe pensar que, a igualdad de los restantes factores:

- ✓ Cuanto mayor sea la longitud propia de cada lado, a, mayor será el perímetro del cuadrado (y cuanto menor sea ésta, menor será dicho perímetro).

- ✓ Cuanto más grande sea v, mayor será la contracción de los dos lados paralelos al movimiento y, por tanto, menor será el perímetro correspondiente. Los dos casos límite que podemos plantear en relación con esta hipótesis son: Si $v \to 0$ el perímetro $P \to 4 \cdot a$, mientras que si $v \to c$ la contracción de las longitudes tenderá a ser máxima y el perímetro tenderá a reducirse y a ser suma de los otros dos lados ($P \to 2 \cdot a$).

- ✓ Finalmente, por lo que se refiere a la influencia que tendría que pudiera variar la velocidad de la luz, c, tenemos que cuanto mayor sea esta, mayor será también el perímetro, puesto que, lo que determina el resultado es el cociente entre la velocidad del cuadrado, v, y la velocidad de la luz, c, y este cociente es menor cuanto mayor sea c. Matemáticamente podríamos considerar dos casos límite: $c\to 0$ y $c\to\infty$. Pero desde el punto de vista de la Física, uno de ellos ($c\to 0$) es absurdo, ya que equivale a concebir un universo donde no se podría alcanzar ninguna velocidad (puesto que, como sabemos, ninguna velocidad puede superar a la de la luz) y en el que, por tanto, tampoco tendría sentido considerar que el cuadrado pudiera tener ninguna velocidad. El segundo ($c\to\infty$) implica volver a la mecánica de Newton, donde no existe un límite superior de velocidades y, en ese caso, el perímetro sería $P = 4\cdot a$.

Resolución

La longitud de los dos lados que no se contraen es a, y (aplicando la ley de contracción de longitudes) la de los que sí lo hacen es a/γ. Por tanto, el perímetro vendrá dado por:

$$P = a + a + a/\gamma + a\cdot/\gamma \;\rightarrow\; P = 2\cdot a\,(1 + 1/\gamma)$$

Sustituyendo ahora el factor γ:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

En la expresión de P, se obtiene finalmente: $$P = 2\cdot a\left(1+\sqrt{1-{v^2}/{c^2}}\right)$$

Análisis del resultado

Podemos ver que se cumplen todas las hipótesis de partida y, en particular, que al sustituir en la expresión obtenida $v = 0$ y $c\to\infty$ se obtiene un perímetro $P=4\cdot a$. Ya hemos dicho que en el primer caso, al estar el cuadrado en reposo, no aparecen “efectos relativistas” diferenciados de las predicciones de la mecánica de Newton. En el segundo caso ($c\to\infty$) estamos planteando que no exista un límite superior de velocidad, lo que también equivale a volver a la mecánica newtoniana.

También se comprueba que, si hacemos $v\to c$, se obtiene un perímetro $P\to 2\cdot a$, es decir, una tendencia a que los lados paralelos a la dirección del movimiento se contraigan totalmente.

Finalmente decir, que se podría cometer el error de suponer que al hacer $c\to 0$ se obtenga $P\to\infty$. Es un error porque este resultado se obtendría únicamente bajo la suposición de que el cuadrado pudiera tener una velocidad, v, distinta de cero, en un universo con un límite superior de velocidades nulo ($c=0$). En realidad, debemos exigir que si $c=0$, también sea $v=0$ y, entonces, el resultado matemático es una indeterminación.

13. Una partícula subatómica en reposo en un SRI (K_1) se desintegra espontáneamente con un periodo de semidesintegración determinado. ¿Cuánto valdrá dicho periodo cuando el mismo se mida desde otro SRI (K_2) respecto del cual la partícula se desplaza con velocidad constante $\vec{v}$?

Planteamiento

El periodo de semidesintegración de una partícula corresponde al tiempo que ha de transcurrir para que una cierta cantidad inicial de ellas (N_0), lo bastante numerosa como para ser estadísticamente significativa[1], se reduzca a la mitad ($N_0/2$). Esta magnitud se define siempre en un sistema de referencia ligado a la partícula.

La ley de la desintegración radiactiva, aplicada en el sistema de referencia inercial K_1 (ligado a las propias partículas), viene dada por:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda_1 \cdot \Delta t_1}$$

En la ecuación anterior, N_0 representa el número de partículas sin desintegrar existentes en cierto instante (que se toma como inicial), N corresponde al número de partículas que permanecen sin desintegrar Δt_1 segundos después de ese instante inicial, λ_1 es la constante de desintegración radiactiva, la cual podemos expresar en función del periodo de semidesintegración haciendo $N = N_0/2$. En cuyo caso:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda_1 \cdot T_1} \rightarrow T_1 = \ln 2/\lambda_1$$

En la expresión anterior T_1 es el periodo de semidesintegración de la partícula.

Como el proceso de desintegración (de N_0 a N) comienza y acaba en el mismo lugar de K_1 el intervalo de tiempo Δt_1 será un tiempo "propio", es decir:

$$\Delta t_1 = \Delta t_0$$

Consecuentemente, el periodo de semidesintegración será también "propio", de modo que:

$$T_1 = T_0 = \ln 2/\lambda_1$$

Existen diversas situaciones en las que partículas inestables (que experimentan procesos de desintegración) viajan a grandes velocidades, con lo que el estudio de dichas situaciones habría que realizarlo en el marco de la Teoría de la Relatividad. En nuestro caso concreto, la ley de la desintegración radiactiva, aplicada en el sistema de referencia inercial K_2 (respecto del cual se están moviendo las partículas), vendrá dada por:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda_2 \cdot \Delta t_2}$$

En la ecuación anterior, λ_2, es la constante de desintegración radiactiva y podemos expresarla en función del periodo de semidesintegración si hacemos $N = N_0/2$, con lo que:

[1] Aunque en el enunciado se hable de "una" partícula, debe entenderse que se trata de "un tipo" de partícula (muón, protón, pión, etc.) y que en realidad lo que se tiene es un conjunto muy numeroso de ellas.

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda_2 \cdot T_2} \rightarrow T_{2.} = \ln 2/\lambda_2$$

En la expresión anterior T_2 correspondería al periodo de semidesintegración medido desde K_2

Como el proceso de desintegración[2] (de N_0 a N) comienza y acaba en lugares distintos de K_2, el intervalo de tiempo Δt_2 será, en este caso, un tiempo "impropio", es decir:

$\Delta t_2 = \Delta t$

Consecuentemente, el periodo de semidesintegración será también "impropio" y vendrá dado por:

$T_2 = T = \ln 2/\lambda_2$

De acuerdo con la ecuación relativista que relaciona los intervalos de tiempo propio e impropio correspondientes a un mismo evento, podremos escribir que:

$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_0$$

Sustituyendo $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \boxed{\Delta t = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \cdot \Delta t_0}$ y dado que $\gamma > 1 \rightarrow \Delta t > \Delta t_0$

Resolución

Dado que el periodo de semidesintegración corresponde a un intervalo de tiempo determinado, podemos considerar dicho intervalo en la ecuación anterior y escribir que:

$$T = \gamma \cdot T_0 \rightarrow \boxed{T = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \cdot T_0}$$

Análisis del resultado

En este caso, la resolución del problema ha sido prácticamente inmediata y evidente, pues basta sustituir como intervalo de tiempo el correspondiente al periodo de semidesintegración. No obstante, vale la pena *analizar el resultado obtenido*. Si lo hacemos, nos daremos cuenta de que, además de ser dimensionalmente homogéneo, se contemplan en el mismo algunos casos particulares de especial interés, tales como:

- ✓ Si el valor de T_0 aumenta, también lo hace el valor de T (el cual siempre ha de ser mayor que T_0).

---

[2] Atención: Tanto N_0 como N representan número de partículas sin desintegrar (al comienzo y al final de un intervalo de tiempo dado) y no tienen nada que ver con valores propios ni impropios.

- ✓ Si v aumenta, también aumenta la diferencia $T-T_0$. En el caso límite en el que v tienda a c ($v \rightarrow c$), el valor de T tiende a infinito ($T \rightarrow \infty$), lo que equivale a afirmar que las partículas tienden a no desintegrarse. Como es lógico, en el caso opuesto ($v \rightarrow 0$), se debe poder aplicar la mecánica de Newton (no habría dilatación del tiempo) y se cumple que $T \rightarrow T_0$.

- ✓ En cuanto a la influencia de la velocidad de la luz, vemos que en un hipotético universo donde c fuera mayor, disminuye la diferencia $T-T_0$. En el caso límite en el que la velocidad de la luz tendiera hacia infinito ($c \rightarrow \infty$) estaríamos planteando un mundo en el que no existe un límite superior de velocidades, lo que equivale a volver a la mecánica de Newton. Por tanto, en ese caso, se cumple que $T \rightarrow T_0$.

Nuevas preguntas

El pión es una partícula muy inestable: Se observa que la vida media de los piones en reposo es tan solo de 26 ns (1 ns = 10^{-9} s). ¿Cuál sería el valor de dicha vida media si los piones fuesen acelerados hasta moverse a 0'9 c?

La vida media es un concepto diferente que el de periodo de semidesintegración que hemos visto anteriormente, aunque ambos están relacionados. Su símbolo es τ y su valor coincide con el tiempo (propio) medio de desintegración de una partícula presente en una muestra estadística (sea un núcleo o una partícula subatómica). Lo que no significa que una partícula en concreto tarde exactamente dicho tiempo, ya que se trata de un proceso probabilístico. Se demuestra que su valor coincide con la inversa de la constante radiactiva ($\tau = 1/\lambda$).

Para contestar la pregunta planteada, basta con utilizar la misma ecuación que en el ejercicio anterior, identificando en este caso el tiempo transcurrido con la vida media, con lo que:

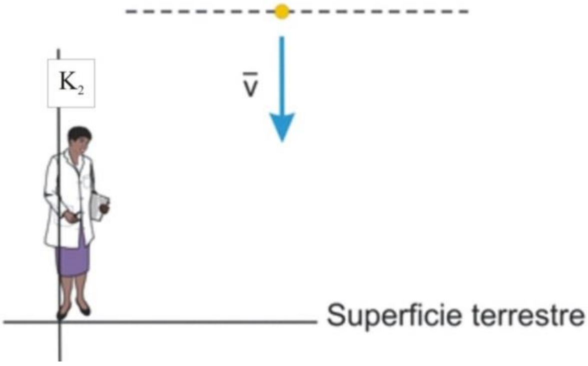
$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \tau_0 \rightarrow \tau = \frac{26 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{1-\frac{0'81 \cdot c^2}{c^2}}} = 5'96 \cdot 10^{-8} \text{ s} = 59'6 \text{ ns.}$$

El muón es una partícula subatómica inestable que en reposo se desintegra en 2'2· 10^{-6} s (tiempo propio). En la parte alta de la troposfera (a unos 10 km de la superficie terrestre) se originan muones de alta velocidad (0'999c) y la mayoría de ellos son capaces de llegar a la superficie terrestre sin desintegrarse. ¿Cómo se puede explicar este hecho siendo que durante 2'2·10^{-6} s apenas podrían recorrer 1 km sin desintegrarse? (comprobadlo).

En efecto, si fuera posible aplicar la mecánica newtoniana a esos muones, se tendría que la distancia que podrían recorrer antes de desintegrarse vendría dada por:

$$D = v \cdot \Delta t_0 = 0'999 \cdot c \cdot 2'2 \cdot 10^{-6} = 0'999 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2'2 \cdot 10^{-6} = 659'3 \text{ m}$$

Este dato no cuadra con el hecho de que una gran parte de esos muones (muchos más de los esperados si aplicamos la mecánica clásica), lleguen a la superficie terrestre antes de desintegrarse. Naturalmente, la explicación es que al moverse a unas velocidades tan próximas a la de la luz, se produce el efecto de la dilatación del tiempo, de tal modo que para un hipotético observador ligado a los muones la vida media de estos es un tiempo propio, pero para un observador situado en la superficie terrestre esa vida media es un tiempo impropio, puesto que los muones se originan y se desintegran en puntos distintos de su sistema de referencia (la propia Tierra que, para simplificar, consideraremos como SRI K_2 al cual está ligado dicho observador) y, como sabemos, el tiempo impropio es siempre mayor.



Para calcular la vida media de los muones según el observador situado en la superficie terrestre:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \tau_0 \rightarrow \tau = \frac{2'2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{1-0'999^2}} = 5'96 \cdot 10^{-8}\ \text{s} = 49'2 \cdot 10^{-6}\ \text{s.}$$

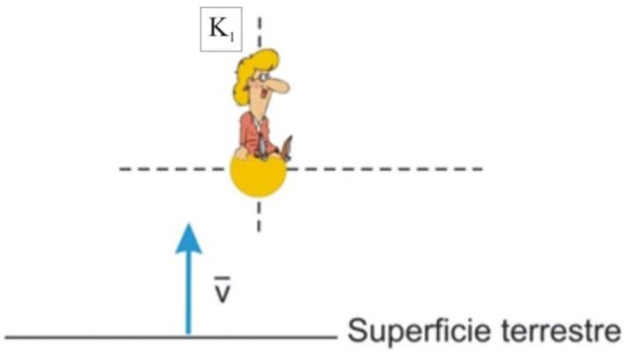
En cuanto a la distancia que podría ser cubierta durante ese tiempo sería:

$L = v \cdot \Delta t = 0'999 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 49'2 \cdot 10^{-6} = 14745\ \text{m} = 14'745\ \text{km}$

Como vemos, una distancia sensiblemente mayor que los 10 km que separan la zona de la atmósfera en la que se originan esos muones de la superficie terrestre.

Con una vida media más de veinte veces superior a la correspondiente a la de los muones en reposo, no es de extrañar que la mayoría de los muones puedan alcanzar la superficie terrestre antes de desintegrarse. Esta conclusión, consecuencia de la teoría de la relatividad especial, se pudo constatar experimentalmente por primera vez en 1940 por el científico italiano Bruno Rossi (junto con David, B Hall) en los Estado Unidos (donde se vio obligado a emigrar huyendo del fascismo). Posteriormente se realizaron otros experimentos mucho más precisos y en todos ellos se pudo constatar esa dilatación temporal relativista.

Para terminar, podemos analizar lo que diría un hipotético observador ligado a uno de dichos muones:



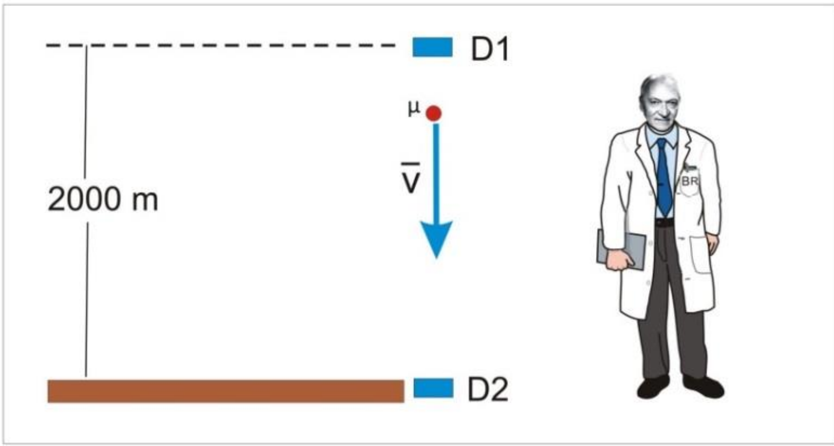
Según dicho observador, el muón estaría en reposo (en un SRI K_1) y sería la superficie de la Tierra la que se movería hacia el mismo. La distancia inicial entre el muón y la Tierra sería una longitud impropia la cual viene dada por:

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \rightarrow L = L_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Sustituyendo valores numéricos obtenemos: $L = 10^4 \cdot \sqrt{1 - 0'999^2}$ = 447’1 m

Si nos fijamos en el resultado anterior es fácil concluir que, desde el punto de vista de ese hipotético observador ligado a esos muones, una gran parte de estos puedan encontrarse con la superficie terrestre antes de su desintegración puesto que el tiempo que, según él, la superficie de la Tierra (a 0’999c) tardaría en cubrir esa distancia sería tan solo de L/v = 447’1/0’999·3·10^8 = 1’49·10^{-6} s (inferior a la vida media del muón, que es de 2’2·10^{-6} s).

14. En su histórico experimento los científicos Rossi y Hall colocaron un detector de muones a 2000 m de altura (D1) y otro al nivel del mar (D2). De esta forma pudieron comprobar que el número de muones registrados por el detector D1 era de 563 muones/hora. De acuerdo con la teoría de la relatividad ¿cuántos muones por hora debieron registrar en el detector D2?



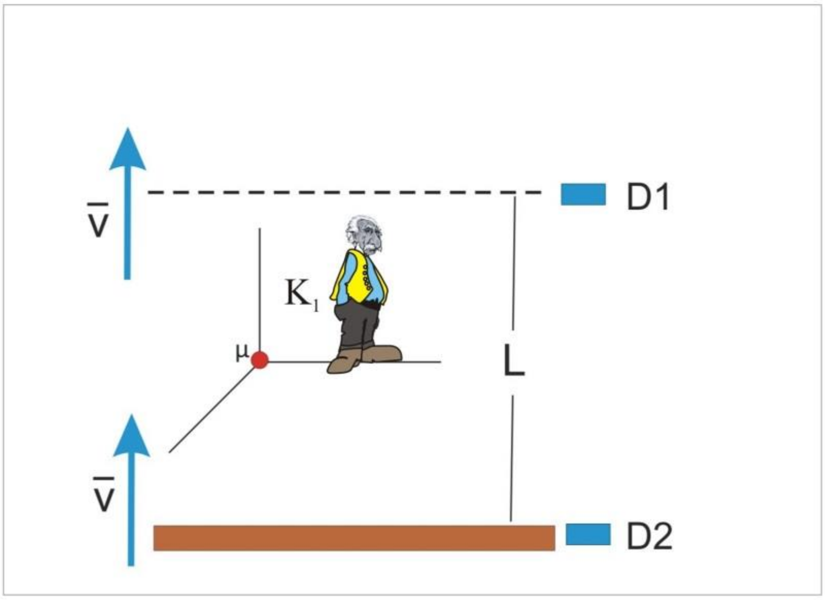
Datos: Vida media del muón 2’2 μs. Módulo de la velocidad de los muones 2’985·10^8 m/s.

Planteamiento

La vida media de los muones, al igual que su periodo de semidesintegración, se definen siempre en un sistema de referencia inercial K_1 ligado a estas partículas, es decir, respecto del cual los muones se encuentran en reposo.

Como los muones se desplazan a una velocidad muy elevada con respecto a la Tierra, cuando el problema se trate de resolver adoptando el sistema de referencia ligado a la Tierra, K_2, se ha de tener en cuenta la dilatación del tiempo, ya que, con respecto a este sistema de referencia, la duración del viaje (tiempo impropio, Δt) es mayor que la duración medida desde el sistema de referencia ligado a los muones (tiempo propio, Δt_0). Por tanto, en la ley de desintegración se ha de sustituir un tiempo "dilatado" (Δt), y esto se puede considerar equivalente a considerar que lo que se dilata es la vida media de los muones. Es decir, los muones decaerán[3] en menor cantidad de la que se esperaría si no se aplicara la relatividad.

Alternativamente, se puede plantear el problema según el punto de vista de un hipotético observador situado en el sistema de referencia ligado a los muones, K_1. Desde ese sistema de referencia, cambia la distancia entre los dos detectores, ya que, respecto del mismo, los muones están en reposo y es la Tierra (y con ella los dos detectores), la que se desplaza en sentido ascendente con $v = 2'985 \cdot 10^8$ m/s.



De acuerdo con las consideraciones anteriores, la distancia entre ambos detectores es una longitud impropia, *L*, y, en consecuencia, contraída con respecto a la longitud propia, L_0, de 2000 m que proporciona el enunciado. Por supuesto, se obtiene la misma consecuencia, de que los muones decaerán en menor cantidad de la esperada si no se aplicase ninguna consideración relativista y se utilizasen exclusivamente las ecuaciones de la mecánica clásica

Finalmente debemos decir que para aplicar estas leyes relativistas es necesario aceptar que los muones se desplazan con una velocidad constante (lo cual es casi exacto) y también es necesario despreciar la aceleración de los dos detectores. Afortunadamente, la aceleración centrípeta de cada punto de la superficie de la Tierra es suficientemente pequeña (en comparación con las otras velocidades implicadas en el problema), para que sea bastante razonable aceptar esta segunda simplificación. Estas dos condiciones simplificadoras permiten tomar ambos sistemas de referencia como inerciales.

Hipótesis

La magnitud buscada es la cantidad, N, de muones por hora que se registran en el segundo detector, D2, ligado al suelo. Es lógico plantear que esta magnitud dependa de la cantidad inicial de muones por hora, N_0, (registrados por el detector D1), de la longitud, L_0, o distancia entre los dos detectores, de la vida media, τ, de los muones en reposo, del valor absoluto de la velocidad de los muones, v, y de la velocidad de la luz, c.

---

[3] El muon es la partícula con carga negativa y con una masa unas 200 veces la del electrón. Se trata de una partícula inestable que decae (se desintegra) produciendo un electrón y otras partículas.

Más precisamente. A igualdad de los restantes factores, cabe esperar que:

- ✓ Cuanto mayor sea el número inicial de muones, N_0, mayor será la cantidad final de muones, N.

- ✓ Cuanto mayor sea la altura o distancia entre los dos detectores, L_0, más muones se desintegrarán y, por tanto, menor será la cantidad de muones final, N.

- ✓ Cuanto mayor sea la vida media de los muones en reposo, τ, decaerán más lentamente y, por tanto, mayor será la cantidad de muones final, N.

- ✓ Cuanto mayor sea el valor absoluto v de la velocidad a la que se desplazan los muones, menor número de ellos se desintegrarán y, por tanto, mayor será la cantidad de muones final, N.

- ✓ Finalmente, en un hipotético universo en el que la velocidad de la luz, c, fuera mayor, el cociente entre la velocidad de los muones, v, y dicha velocidad de la luz, c, sería menor y, en consecuencia, menor sería la cantidad de muones final, N.

Algunos casos límite interesantes que podemos plantear son:

- ✓ Si la vida media de los muones tendiera a 0 ($\tau \to 0$), tenderían a desintegrarse inmediatamente y no llegaría ninguno al detector D2, es decir, $N \to 0$.

- ✓ Si dicha vida media tendiera a ∞ ($\tau \to \infty$) tenderían a no desintegrarse y todos llegarían al detector, es decir: $N \to N_0$.

- ✓ Si la velocidad de los muones tendiera a ser nula ($v \to 0$) y/o si la distancia entre los dos detectores tendiera a ser infinita ($L_0 \to \infty$), el tiempo que tardarían los muones en atravesar la capa atmosférica tendería hacia también hacia infinito, y todos se desintegraran antes de llegar al detector D2, es decir: $N \to 0$.

- ✓ Si la velocidad de los muones tendiera hacia el límite superior de velocidades ($v \to c$), los muones tenderían no decaer y, en el caso extremo que fuera v=c (realmente sólo lo puede ser la propia luz), simplemente no se desintegrarían ($N=N_0$).

- ✓ Si $c \to \infty$ estamos planteando que no exista un límite superior de velocidad, lo que supone volver a la mecánica de Newton. Entonces, el número de muones final debería ser el mismo que calcula la ley de desintegración sin considerar la relatividad.

Resolución

Adoptamos el SRI ligado a los muones (K_1). Respecto de este sistema de referencia, según hemos visto, el tiempo que transcurre desde que coincide la posición del detector D1 con el muón hasta que lo hace la posición del detector D2, es propio (Δt_0), mientras que la distancia será impropia (L).

El módulo de la velocidad será: $v = \dfrac{L}{\Delta t_0} \;\to\; \Delta t_0 = \dfrac{L}{v}$

Dado que $L = \frac{L_0}{\gamma}$ $\rightarrow$ L = $L_0 \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

Sustituyendo L en la expresión de Δt_0 anterior, queda: $\Delta t_0 = \frac{L_0}{v} \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ (1)

Este es el tiempo transcurrido hasta el encuentro de los muones con el detector D2 (medido por el observador ligado a los muones en el SRI K_1). Para obtener cuántos de ellos son registrados por dicho detector, solo falta sustituir este tiempo en la ley de desintegración:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda_0 \cdot \Delta t_0} \quad = \quad N = N_0 \cdot e^{-\frac{\Delta t_0}{\tau_0}} \quad (2)$$

($\lambda_0 = 1/\tau_0$ es la constante de desintegración de los muones en reposo)

Sustituyendo (1) en (2), queda finalmente:

$$N = N_0 \cdot e^{-\frac{L_0}{v \cdot \tau_0} \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Análisis del resultado

Comprobad que el resultado obtenido, además de ser dimensionalmente homogéneo, contempla todas las hipótesis y casos límites anteriormente considerados.

Al sustituir los datos numéricos del enunciado en la ecuación anterior se obtiene un valor aproximado de N = 415 muones/hora, coincidente con el obtenido experimentalmente.

Vale la pena detenerse brevemente en analizar el caso particular de que se hiciese tender la velocidad de la luz a ∞ (o, lo que es equivalente, si se hiciera tender el cociente v/c a 0 en la ecuación anterior). Es fácil constatar que la ecuación anterior se transforma, de modo que se obtiene el mismo resultado que proporciona la física no relativista:

$$N = N_0 \cdot e^{-\frac{L_0}{v \cdot \tau}}$$

Al sustituir los datos del problema, en esta última ecuación, se obtiene un valor de 27 muones/hora, es decir, unas 15 veces menos del valor real.

Puede decirse que la experiencia llevada a cabo por los científicos Rossi y Hall (cuyos resultado publicaron en la revista Physical Review en 1941) fue un experimento histórico que adquirió un carácter polifacético, porque confirmó a la vez tres predicciones relativistas: la dilatación del tiempo, la contracción de la longitud, y, el comportamiento relativista de toda clase de relojes (entendiendo aquí por tales a los muones).

Ampliación

En 1963 Frisch y Smith realizaron una versión filmada de esta investigación. En Internet se puede ver la **película del experimento**.

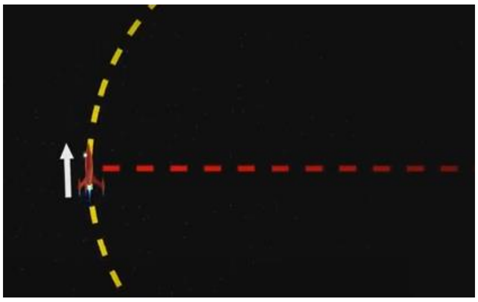
15. Una nave describe una órbita circular a gran velocidad alrededor de un determinado cuerpo celeste. ¿Cuánto vale, en el sistema de referencia de la nave, el cociente (C) entre la longitud (L) y el diámetro (D) de la órbita?

Planteamiento

Para poder aplicar las leyes de la relatividad especial en el sistema de referencia de la nave tendría que ser dicho sistema de referencia inercial y no lo es porque la nave, como describe una órbita circular, tiene aceleración centrípeta o normal, $\vec{a}_n$. Como $a_n = v^2/R$ (donde v es el módulo de la velocidad de la nave y R el radio de la órbita) y queremos estudiar un caso en que la velocidad de la nave sea elevada, para poder considerar despreciable esta aceleración hemos de suponer que se trata de una órbita con un radio muy grande.

En cuanto al cociente que pide el enunciado, para un observador inercial exterior, la longitud de la órbita que describe la nave es, como sabemos, $L = \pi \cdot D$, y, por tanto, dicho cociente es: $C = L/D = \pi = 3'1416$. La situación es diferente para los astronautas, porque se mueven recorriendo la órbita cuya longitud quieren determinar y, en consecuencia, hay que considerar que dicha longitud, que pueden obtener, es impropia y, por tanto, menor (ley de contracción de longitudes).

Así, por ejemplo, podemos imaginar que obtienen la longitud de la órbita completa sumando las de longitudes muy pequeñas (casi rectilíneas) en que dicha órbita se puede dividir. Cada una de estas longitudes se mueve con respecto a la nave y la atraviesa en sentido opuesto a su orientación (dibujo adjunto, debajo).



En cambio, el diámetro de la órbita es en cada punto perpendicular a la nave (dibujo adjunto, a la izquierda de este texto), y, por tanto, su valor es el mismo para los astronautas que para el observador exterior [Si se conoce el radio del cuerpo celeste, los astronautas podrían obtener este diámetro, por ejemplo, enviando una señal al cuerpo celeste y determinando el tiempo que tarda en ir y volver].

En consecuencia, se concluye que en el sistema de referencia de la nave, el valor del cociente C será menor que π.

Hipótesis

Teniendo en cuenta que la longitud de la circunferencia es proporcional al diámetro, ambos factores se compensarán en el cálculo del cociente y, por tanto, cabe considerar que dicho cociente. C, dependa únicamente del valor de la velocidad de la nave, v, o, más precisamente, del cociente entre dicha velocidad y la velocidad de la luz, c.

Más precisamente:

- ✓ Cuanto menor sea v y/o mayor pudiera ser c, más próximos estaremos a poder aplicar la mecánica de Newton, de forma que en el caso extremo en que $v/c \rightarrow 0$ (bien porque $v=0$ o porque $c \rightarrow \infty$) deberá ser $C \rightarrow \pi$.

- ✓ En cambio, cuanto mayor sea v, mayor deberá ser la contracción de la longitud de la órbita y por tanto menor será el cociente, C. En el caso extremo en que $v \rightarrow c$ tendría que ser $C \rightarrow 0$.

Resolución

La longitud de la órbita que obtienen los astronautas en la nave, L_N, (impropia) es: $L_N = L_0/\gamma$

Siendo: L_0 la longitud propia de la órbita y el factor gamma: $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$

El diámetro de dicha órbita que obtienen los astronautas en la nave es: $D_N = D_0$

Como $L_0/D_0 = \pi$, el cociente C, entre L_N y D_N, resulta:

$$C = \frac{L_N}{D_N} = \frac{L_0}{\gamma \cdot D_0} \rightarrow C = \pi \cdot (1 - {v^2}/{c^2})$$

Comprobad que se cumplen las hipótesis enunciadas y todos los casos particulares considerados anteriormente.

Resultados cuantitativos

La discrepancia entre el resultado obtenido y el valor π es significativa en la medida en que el factor γ se separe de la unidad. Como sabemos, esto ocurre únicamente cuando el valor de la velocidad, v, llega a ser comparable a al valor de la velocidad de la luz, c.

Obviamente, nuestras experiencias espaciales están absolutamente alejadas de estos órdenes de magnitud. Por ejemplo, la estación espacial internacional tiene una velocidad de traslación alrededor de la Tierra que no llega a los 8 km/s (0'000027c), cuando la sonda New Horizons pasó por Plutón en 2017 su velocidad (respecto del Sol) era próxima a su velocidad de exceso hiperbólica y apenas llegó a unos 14 km/s (0'000047c) y la nave espacial más rápida creada hasta ahora, que es la Voyager 1, se aleja del Sol a unos 17 km/s (0'000057c). Obviamente en todos estos casos, el factor γ es prácticamente igual a la unidad y el resultado del cociente es, simplemente, π.

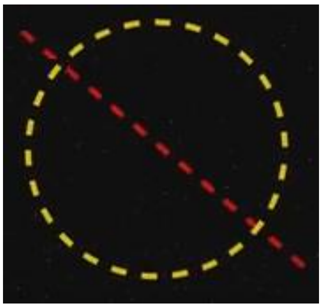
En la física de partículas, en cambio, sí se manejan haces que realizan movimientos circulares a velocidades muy elevadas, no ya comparables a la velocidad c, sino muy próximas a ella. En el anillo del LHC, considerado como el "circuito más rápido del planeta", los protones que lo recorren, viajan al 99'9999991% de la velocidad c. Es decir:

$$v=0'999999991c \rightarrow (v/c)^2 = 0'999999982$$

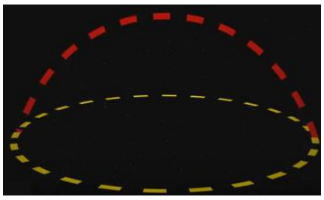
Y, por tanto, el valor del cociente C en su sistema de referencia es:

$$C = \pi \cdot \left(1 - {v^2}/{c^2}\right) = 1'8 \cdot 10^{-8} \cdot \pi = 0'0000000565$$

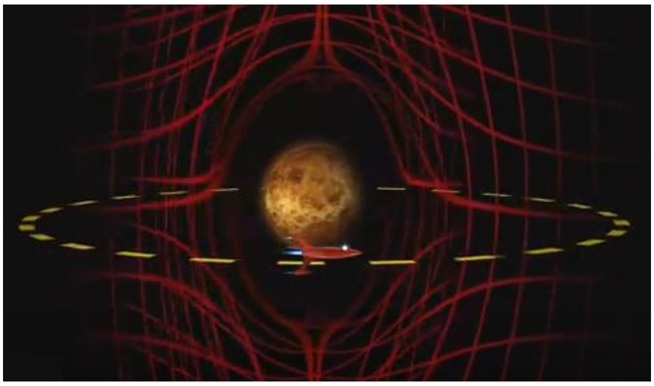
Ampliación



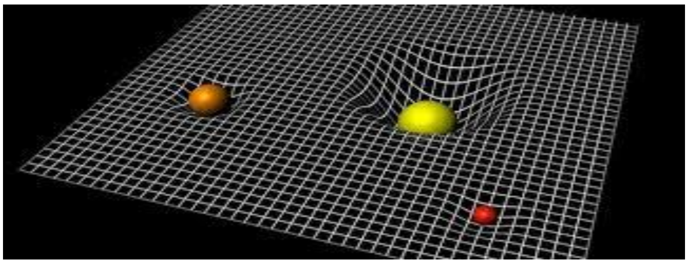
Este ejercicio se puede utilizar a modo de experimento mental para tratar cualitativamente la curvatura del espacio-tiempo. Como en el sistema de referencia ligado al cuerpo que rota la longitud del diámetro se mantiene en el valor a que estamos acostumbrados y, en cambio, la longitud de la circunferencia disminuye, cuando se representan ambos en una superficie plana (dibujo adjunto) los extremos de dicho diámetro (de color rojo) no se pueden hacer coincidir con dos puntos opuestos de la circunferencia (de color amarillo), sino que la desbordan.



Si queremos realizar esa unión hemos de salirnos de la superficie plana y dibujar el diámetro como una línea curva, con una curvatura que será tanto mayor cuanto mayor sea, en este ejemplo, la velocidad del movimiento circular de la nave.



Ahora bien, el sistema de referencia ligado a la nave tiene aceleración centrípeta, $\vec{a}_n$, dirigida hacia el interior de la circunferencia que describe dicha nave. De acuerdo con el principio de equivalencia de la relatividad general, es equivalente a un campo gravitatorio de intensidad $\vec{g} = -\vec{a}_n$, por tanto, dirigida hacia fuera de la órbita. Todo campo gravitatorio curva el espacio-tiempo y éste lo hace del mismo modo que se produce la curva del mencionado diámetro (dibujo adjunto) Se concluye, pues, que para un observador en rotación, el espacio circundante es curvo, siendo su curvatura tanto mayor cuanto mayor sea la velocidad de su movimiento.



Obsérvese que esta curvatura del espacio-tiempo es de sentido opuesto a la que se tiene alrededor de cualquier objeto celeste, producida por su gravedad (figura adjunta). Esto es así porque el campo gravitatorio del cuerpo celeste se orienta hacia él y, por tanto, tiene un sentido opuesto al campo gravitatorio equivalente al sistema de referencia de la nave en este problema.

Nota: Los dibujos incluidos en este problema, excepto el último (que es una imagen libre de Wikipedia), son capturas de imagen de un capítulo de la serie divulgativa "Quantum Fracture", disponible en YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=ESveYNa4OMk .