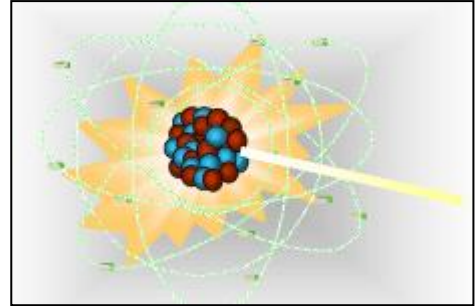


El núclido Cs-137 es un isótopo radiactivo del cesio que se produce principalmente por fisión nuclear. Tiene un periodo de semi-desintegración de 30'23 años y se utiliza en física nuclear experimental para calibrar detectores de partículas. El Cs-137 decae emitiendo partículas  $\beta$  (electrones) a un isómero nuclear metaestable de Ba-137, que tiene una vida media de 2'55 minutos y se “des-excita” emitiendo fotones gamma de 0'661657 MeV, que son utilizados en la técnica de calibración. ¿Cuánto valdrá la velocidad de retroceso de un núcleo Ba-137 después de haber emitido un fotón?



### Planteamiento:

Lo más sencillo es adoptar el sistema de referencia, respecto al cual el núcleo Cs-137 excitado (lo llamaremos núcleo padre) está inicialmente en reposo. Como el fotón emitido por dicho núcleo porta energía e impulso, el núcleo hijo (des-excitado) ha de tener una masa menor que el núcleo padre y un impulso opuesto al del fotón emitido. Para obtener ambas magnitudes cabe exigir el principio de conservación del impulso-energía antes y después de la emisión.

### Hipótesis:

Aunque el enunciado proporciona los datos concretos del proceso y estos implican una solución numérica del problema, podemos plantear hipótesis acerca de cómo variaría esta solución, si tales datos pudieran ser otros diferentes. Así podemos plantear que la velocidad de retroceso buscada,  $v$ , dependerá de la masa,  $m^*$ , del núcleo padre de Ba-147 (excitado) y de la energía que porte el fotón emitido,  $E_{\text{fotón}}$ . Es decir:  $v = f(m^*, E_{\text{fotón}})$  Más precisamente:

- Cuanto mayor sea la masa del núcleo padre,  $m^*$ , mayor también será la masa del núcleo hijo,  $m$ , y, en consecuencia, menor será su velocidad de retroceso,  $v$ . Si  $m^* \rightarrow \infty$ , deberá ser  $v \rightarrow 0$ , mientras que el caso extremo opuesto, es decir, si  $m^* = 0$ , estamos suponiendo que no existe el núcleo padre; entonces, el problema “desaparece” y debemos exigir también que no se emita ningún fotón ( $E_{\text{fotón}} = 0$ ).

- Cuanto mayor sea la energía del fotón emitido,  $E_{\text{fotón}}$ , mayor tiene que ser el módulo de la velocidad de retroceso, ya que se ha de conservar la componente cinética del impulso del sistema, antes y después de la emisión. El caso extremo en el que  $E_{\text{fotón}} = 0$ , es equivalente a suponer que no se emite ningún fotón y, por tanto, que el núcleo padre no se des-excita. Entonces, debemos exigir también que la masa del núcleo hijo sea igual a la masa del núcleo padre, es decir,  $m^* = m$  y se ha de obtener que este núcleo adquiriera ninguna velocidad de retroceso, es decir,  $v = 0$ . ¿Se puede plantear un caso extremo opuesto?

### Resolución:

El impulso-energía del sistema inicial (núcleo de Ba-147, excitado) es:

$$\mathbf{P}_{\text{inicial}} = (m^* \cdot c^2, 0)$$

Teniendo en cuenta que  $E_{\text{fotón}} = p_{\text{fotón}} \cdot c$ , el impulso-energía del sistema final (núcleo de Ba-147, des-excitado, y fotón) es:

$$\mathbf{P}_{\text{final}} = (E_{\text{núcleo hijo}}, p_{\text{núcleo hijo}} \cdot c) + (E_{\text{fotón}}, E_{\text{fotón}}) = (E_{\text{núcleo hijo}} + E_{\text{fotón}}, p_{\text{núcleo hijo}} \cdot c + E_{\text{fotón}})$$

Imponiendo la conservación del impulso-energía, se obtiene:

$$E_{\text{núcleo hijo}} + E_{\text{fotón}} = m^* \cdot c^2 \rightarrow E_{\text{núcleo hijo}} = m^* \cdot c^2 - E_{\text{fotón}}$$

$$p_{\text{núcleo hijo}} \cdot c + E_{\text{fotón}} = 0 \rightarrow p_{\text{núcleo hijo}} \cdot c = - E_{\text{fotón}}$$

A partir del impulso y la energía del núcleo hijo, se obtiene directamente su velocidad:

$$v = \left( \frac{p_{\text{núcleo hijo}} \cdot c}{E_{\text{núcleo hijo}}} \right) \cdot c = \left( \frac{- E_{\text{fotón}}}{m^* \cdot c^2 - E_{\text{fotón}}} \right) \cdot c$$

### Análisis del resultado:

*Comprobad que se cumplen las hipótesis*

Para empezar, conviene observar que, puesto que  $m^* \cdot c^2 - E_{\text{fotón}} > 0$  (ya que la energía del fotón emitido no puede ser superior a la energía inicialmente disponible) y al ser el numerador negativo, la velocidad obtenida,  $v$ , tiene siempre un valor negativo, opuesto al criterio de signos establecido en el problema. Esto significa que el núcleo hijo se mueve, como no puede ser de otra forma, en sentido opuesto al fotón emitido, correspondiendo en efecto a una velocidad de retroceso.

En segundo lugar, una vez comprobado que se cumplen las hipótesis planteadas para ambas magnitudes y los casos extremos cuando  $m^* \rightarrow \infty$  y cuando  $E_{\text{fotón}} = 0$ , podemos analizar los casos extremos opuestos:

- Si  $m^* = 0$ , significa que no hay núcleo padre, entonces tampoco puede haber un fotón ( $E_{\text{fotón}} = 0$ ). En este caso, el problema deja de tener sentido y el resultado matemático es una indeterminación.

- Si  $E_{\text{fotón}} = m^* \cdot c^2$  (valor máximo de la energía total disponible) se obtendría  $v \rightarrow \infty$ , lo que es, desde luego, imposible. En efecto, entre las condiciones necesarias para que el hecho tenga lugar hay que exigir al menos dos condiciones: a) Que la emisión del fotón sea consecuencia del proceso de des-excitación del núcleo padre, la cual termina con otro núcleo hijo de masa no nula (de donde se deriva que, en ningún caso la energía del fotón puede igualar a la energía propia del núcleo excitado). b) que la velocidad de retroceso del núcleo no alcance el límite superior de velocidades,  $c$  (de donde se deriva que la energía del fotón tampoco puede alcanzar un valor suficientemente elevado como para que ello ocurriera)

Además de estas disquisiciones que pueden hacerse mediante un análisis meramente matemático del resultado, hay que considerar, por supuesto, otras de carácter físico que son fundamentales. Particularmente hay subrayar el hecho de que, en realidad, los valores posibles de la energía que puede tener el fotón

emitido, se limitan a los que corresponden a los únicos saltos de energía que pueda tener el núcleo para cumplir con las leyes de la mecánica cuántica.

### **Resultados cuantitativos:**

Terminamos aplicando el resultado al caso que plantea el enunciado correspondiente al proceso de desexcitación del Ba-137. En este proceso se emite un fotón gamma de 0.661657 MeV. Por tanto, tenemos:

$$m^*c^2 \text{ (en unidades)} \approx 137u \approx 137 \cdot 931.5 \text{ MeV} = 127615.5 \text{ MeV}$$

$$E_{\text{fotón}} = 0.661657 \text{ MeV}$$

Por tanto, se puede estimar una velocidad de retroceso del núcleo hijo del siguiente orden:

$$v = \left( \frac{-E_{\text{fotón}}}{m^* \cdot c^2 - E_{\text{fotón}}} \right) \cdot c = \frac{-0.661657}{127615.5 - 0.661657} = 5.185 \cdot 10^{-6} c = 1555.44 \text{ m/s}$$

Como vemos, la velocidad de retroceso obtenida es muy pequeña comparada con la velocidad de la luz, y, también lo es a nivel atómico (por ejemplo, no sería suficiente para afectar a la estructura del Ba-137 en estado sólido), aunque si la comparamos con las velocidades de otros objetos cotidianos en nuestro mundo macroscópico, el valor resulta ciertamente elevado.