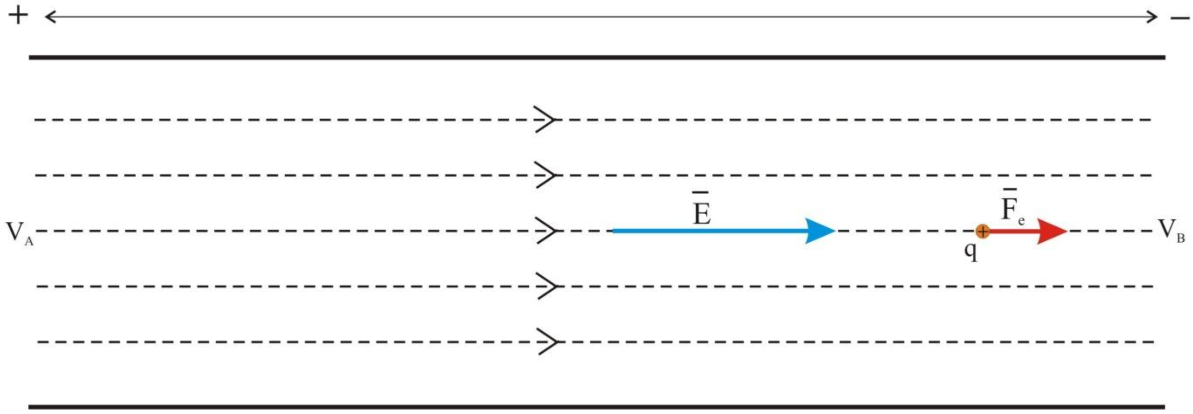
En un acelerador lineal se quiere conseguir que un haz de partículas cargadas adquiera una velocidad elevada. ¿Qué diferencia de potencial eléctrico hay que aplicar?

Planteamiento

Los aceleradores lineales consiguen haces de partículas de alta velocidad que son muy útiles para investigar la estructura subatómica de la materia. En su versión más simplificada están conformados por un tubo largo, en el que se hace el vacío para que las partículas cargadas se puedan desplazar sin encontrar ningún obstáculo. Dentro de dicho tubo se aplica un campo eléctrico, $\vec{E}$, que se produce entre dos o más placas cargadas y que ejerce sobre cada partícula con carga "q" una fuerza eléctrica $\vec{F}_e$ (dada por $\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$), mientras esta avanza por el tubo, tal y como se muestra en la figura siguiente (en la que las líneas punteadas representan las líneas de fuerza del campo eléctrico dentro del tubo y hemos supuesto una partícula con carga positiva).



Si se considera despreciable el peso de la partícula, el trabajo realizado por la fuerza resultante que actúa sobre la misma vendrá dado por:

$$W_{res\,A}^{\;\;B} = W_{campo\,A}^{\;\;B} = \Delta E_c \rightarrow Ep_A - Ep_B = \Delta E_c \rightarrow q \cdot (V_A - V_B) = \Delta E_c$$

Sabemos que las cargas positivas siempre se mueven espontáneamente hacia potenciales decrecientes (como ocurre en la figura anterior), mientras que con las cargas negativas ocurre justo lo contrario. Ello equivale a afirmar que en este tipo de transformaciones (espontáneas) la diferencia $V_A - V_B$ siempre tendrá el mismo signo que q (positivo si q es positiva y negativo si q es negativa), con lo que el producto $q \cdot (V_A - V_B)$ siempre será positivo, lo que permite en la expresión anterior, por comodidad, expresar q en valor absoluto y el valor absoluto de $(V_A - V_B)$ como ΔV, con lo que, si designamos como W el trabajo realizado por la fuerza resultante, podemos escribir que:

$$W = q \cdot \Delta V = \Delta E_c$$

El acelerador suministra una energía eléctrica sobre cada una de las partículas cargadas dada por $W = q \cdot \Delta V$, siendo ΔV la diferencia de potencial eléctrico entre los extremos del acelerador y q la carga de la partícula (ambas en valor absoluto). Dicha energía se convierte en energía cinética de la partícula y la suma de todas ellas en energía cinética del haz de partículas considerado.

Hipótesis

La magnitud que queremos obtener es la diferencia de potencial eléctrico, ΔV, que habrá que aplicar para que una determinada partícula cargada adquiera una cierta velocidad. Suponiendo que dicha partícula esté inicialmente en reposo, es lógico plantear que ΔV dependa del módulo de la velocidad, v, que se quiere que alcance; de la carga, *q*, de la partícula; de su masa, m, y, teniendo en cuenta que existe un límite superior de velocidades, del valor de éste, es decir, de la velocidad de la luz, c. Todo ello se puede expresar como: $\Delta V = f(v, q, m, c)$.

Podemos tratar de precisar un poco más y suponer que:

- ✓ Cuanto mayor sea la masa, m, de la partícula, mayor ha de ser también la diferencia de potencial que se le aplique, ΔV. Mayor masa significa mayor inercia y, por tanto, que sea necesario aportar a la partícula una energía mayor para cambiar su velocidad, desde el reposo. En el caso extremo en que $m \to \infty$, entonces también $\Delta V \to \infty$. En el caso extremo opuesto ($m \to 0$) la diferencia de potencial necesaria también tendería a ser nula.

- ✓ Cuanto mayor sea la carga, *q*, de la partícula, menor podrá ser la diferencia de potencial, ΔV necesaria. Como la energía suministrada es: $W = q \cdot \Delta V$, dicha energía es mayor de por sí, si la carga, *q*, aumenta. Por tanto, en el caso extremo en que $q \to \infty$, entonces $\Delta V \to 0$. En el caso extremo opuesto, $q \to 0$, tendríamos $\Delta V \to \infty$, debiendo precisar que si fuera exactamente $q=0$, la partícula sería neutra y no sería sensible al campo eléctrico, es decir, no se podría acelerar con este dispositivo.

- ✓ Cuanto mayor sea la velocidad, *v*, que se quiera que adquiera la partícula, mayor ha de ser la diferencia de potencial, ΔV, que se aplique. En el caso extremo en que $v \to c$, dicha diferencia de potencial debería ser cada vez más elevada ($\Delta V \to \infty$). En el caso opuesto, es decir, si $v \to 0$, no sería necesario aplicar diferencia de potencial alguna ($\Delta V \to 0$).

Conviene relacionar estas hipótesis acerca de la influencia de la velocidad, v, del haz, con la influencia que también tendría un valor diferente de la velocidad de la luz, c. En efecto, en un hipotético universo donde c pudiera ser mayor, aumentaría la diferencia entre v y c, lo que supone aproximarnos a la situación que concibe la mecánica de Newton, según la cual no existiría un límite superior de velocidades. Aquí lo relevante es el valor del cociente v/c, de tal forma que si $v/c \to 0$ (o, lo que es equivalente, si $c \to \infty$), el resultado del problema debería ser el que proporciona la mecánica newtoniana, donde la energía cinética, como sabemos, viene dada por: $\frac{1}{2} m v^2$. En este último caso, si igualamos dicha energía a la energía eléctrica aportada, se obtiene:

$$\tfrac{1}{2} m v^2 = q \cdot \Delta V \rightarrow \Delta V = mv^2/2q$$

Resolución

Como hemos considerado que las partículas parten del reposo, la energía que tiene cada una de ellas antes de que se les aplique el potencial eléctrico es:

$$E_0 = m \cdot c^2$$

Esta energía se va incrementando a medida que avanzan acelerando por el tubo y al final de él, cuando alcanzan una determinada velocidad, v, es:

$$E = m \cdot \gamma \cdot c^2$$

Siendo el factor gamma:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Por tanto, la energía cinética que adquieren las partículas, corresponderá exactamente a la diferencia entre las dos energías anteriores. Esto es:

$$E_c = E - E_0 = m \cdot \gamma \cdot c^2 - m \cdot c^2 = m \cdot c^2 (\gamma - 1) = m \cdot c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right]$$

Para obtener la diferencia de potencial eléctrico sólo falta igualar la energía suministrada por el acelerador ($q \cdot \Delta V$) a esta dicha energía cinética y luego despejar, ΔV:

$$q \cdot \Delta V = m \cdot c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right] \rightarrow \Delta V = (m/q) \cdot c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right]$$

Análisis del resultado

Es muy sencillo comprobar que se cumplen las hipótesis y los casos límite que hemos planteado relativos a la influencia por separado de la carga, *q*, y de la masa, *m*, de la partícula. Conviene tener en cuenta que si la masa fuese nula (*m* = 0), deberíamos imponer la condición que la carga también lo fuese (*q* = 0). En este caso la partícula sería un fotón y el resultado obtenido una indeterminación, lo cual es coherente con el hecho de que un fotón viajaría, en su caso, a la velocidad de la luz con independencia de cual fuese la diferencia de potencial aplicada.

En cuanto a la influencia de las velocidades, v y c, el resultado confirma que lo que influye es el cociente v/c y que cuanto menor sea dicho cociente (es decir, cuando v → c, pero sin llegar a ser v = c) mayor ha de ser la diferencia de potencial ΔV. En el caso extremo opuesto, es decir, cuando v → 0, para calcular ΔV hay que hacer:

$$\Delta V = \lim_{\left(\frac{v}{c}\right)\to 0} \left(\frac{m}{q}\right)\cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right) \quad (1)$$

Este cálculo resulta más sencillo si aplicamos el desarrollo del binomio al término:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Y, teniendo en cuenta que estamos planteando el límite cuando *v/c*→0, obtenemos:

$$(1 - v^2/c^2)^{-1/2} \approx 1 + \tfrac{1}{2}\, v^2/c^2 \quad (2)$$

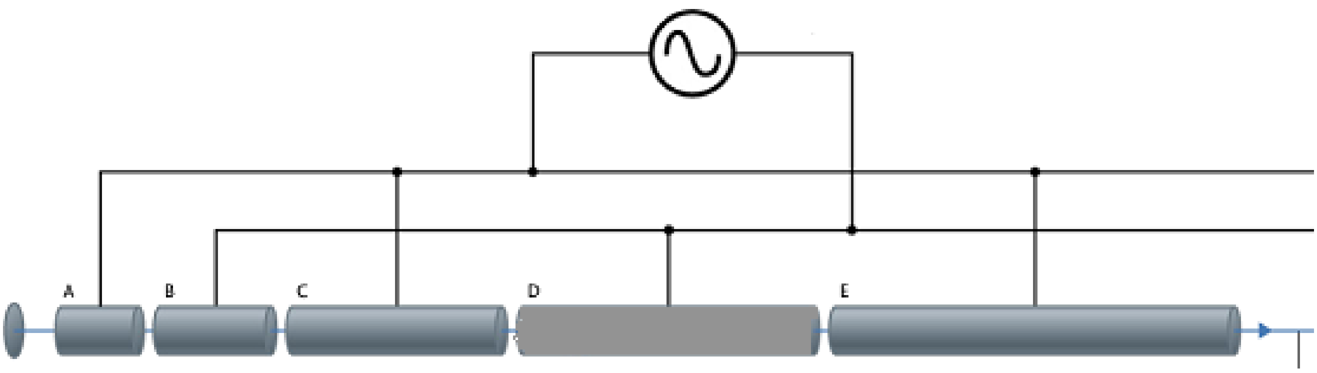
Para terminar este análisis, solo falta sustituir (2) en (1), con lo que se obtiene:

$$\Delta V = \lim_{\left(\frac{v}{c}\right)\to 0} \left[\frac{m}{q}\right]\cdot c^2 \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right] = \left[\frac{m}{q}\right]\cdot c^2 \cdot \left[1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2} - 1\right] \to \Delta V = \frac{1}{2}\cdot\frac{m}{q}\cdot v^2$$

Tal y como se esperaba se obtiene el mismo resultado que prevé la mecánica de Newton.

Ampliación

En realidad, los aceleradores de altas energías son más sofisticados que el modelo totalmente simplificado que hemos planteado aquí. De hecho, se pueden esquematizar mejor mediante el dibujo adjunto, en el que, en lugar de por un solo tubo, el haz de partículas cargadas, va pasando sucesivamente por el interior de varios tubos metálicos de longitud creciente, A, B, C, D, E,.., que están conectados a una tensión alterna.



Para entender cómo funciona este sistema más complejo podemos suponer que se quiere acelerar un haz de partículas de carga positiva. Entonces, cuando se emite el haz, el primer tubo A tiene carga negativa y lo atrae produciéndole una aceleración antes de que el haz penetre en el tubo. Cuando el haz viaja por el interior del tubo, lo hace pasando justo por su eje, ya que el tubo lo atrae con la misma fuerza eléctrica en todas las direcciones y, por tanto, no modifica su trayectoria. Justamente cuando el haz llega al punto medio del tubo A cambia el sentido de la corriente que alimenta todos los tubos lo que provoca que el tubo A, que tenía carga negativa, tenga carga positiva, el tubo B pase a tener carga negativa, el C positiva, etc. De esta manera, cuando el haz sale del tubo A, es repelido por él y es atraído por el tubo B, lo que implica que el haz es acelerado en su trayecto de A hacia B. El mismo proceso se repite en cada etapa, es decir, cuando el haz llega a la mitad del tubo B, vuelve a cambiar de sentido de la corriente. B pasa a tener carga positiva, y A y C vuelven a tener carga negativa. Así cuando el haz sale del tubo B, es repelido por él y atraído por C, con lo que vuelve a ser acelerado al pasar de B a C. Y así sucesivamente. Cada nuevo tubo tiene una longitud mayor que el anterior, porque la carga de los tubos cambia de signo a intervalos de tiempo iguales (determinados por la frecuencia de la corriente alterna que los carga) y en cada nueva etapa el haz viaja a mayor velocidad.

Teniendo en cuenta este modelo, para resolver un problema real, deberíamos ir considerando sucesivamente el tránsito de las partículas cargadas por el interior de cada uno de los tubos y, entre otras consideraciones, habría que tener en cuenta, cuando menos, que el haz ya penetra en cada tubo con una velocidad inicial no nula.

Diremos para terminar que el acelerador lineal más largo del mundo es el colisionador Stanford Linear Accelerator (SLAC), ubicado al sur de San Francisco. Acelera electrones y positrones a lo largo de algo más de 3 km y los dirige hacia varios blancos, anillos y detectores ubicados en su finalización. Se construyó originalmente en 1962, y se ha ido ampliando y mejorando para seguir siendo uno de los centros de investigación de Física de partículas más avanzados del mundo. Los experimentos realizados en el centro han ganado el premio Nobel en nueve ocasiones.