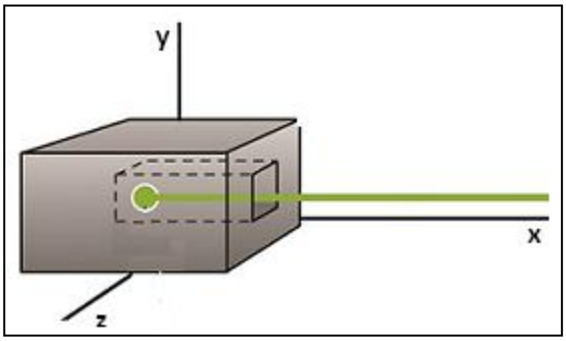
5. Un haz de partículas se mueve conjuntamente (respecto de un determinado SRI) a una velocidad próxima a la de la luz. Se pide: a) Energía cinética de una de dichas partículas. b) Comparad la expresión obtenida con la correspondiente de la mecánica de Newton, considerando para ello distintos valores crecientes de la velocidad (0'1c, 0'2c, 0'3c…). c) Utilizad la expresión obtenida para calcular la energía total, la energía cinética y la cantidad de movimiento de un electrón (energía en reposo 0'511 MeV) que se mueve a velocidad v = 0'8c



Planteamiento e hipótesis

La energía cinética de un haz de partículas no es una propiedad de ellas, sino que depende del SRI con respecto al cual se determina. En su sistema de referencia propio, las partículas están en reposo y la energía cinética es cero. En cualquier otro sistema de referencia, las partículas tienen velocidad y la energía cinética es mayor cuanto mayor sea esa velocidad relativa de las partículas con respecto al SRI adoptado (existiendo como sabemos un límite inalcanzable, dado por la velocidad de la luz c).

En consecuencia, es lógico plantear que la energía cinética de cada partícula del haz dependa de su masa, m, de su velocidad con respecto al sistema de referencia adoptado, v, y del límite superior de velocidades, c. Lo cual se puede expresar como: $E_c = f(m, v, c)$.

Cabe esperar que, a igualdad de los restantes factores:

- ✓ Cuanto mayor sea la masa, m, de la partícula, mayor será su E_c y viceversa. Si la masa tendiera hacia infinito, también debería hacerlo la E_c (siempre que las partículas no estén en reposo). Si la masa tendiera a cero, la energía cinética también debería hacerlo, pero si fuera exactamente m=0, serían partículas de luz (fotones) y, en ese caso, su energía tendrá que ser, independientemente del SRI considerado $E = p \cdot c$
- ✓ Cuanto mayor sea la velocidad, v, de la partícula mayor ha de ser su E_c y viceversa. En el caso extremo en que $v \rightarrow 0$, la E_c también debería hacerlo. Además, en este caso estaríamos en el límite clásico, donde tiene que ser aplicable la mecánica de Newton y por tanto, la E_c debe tender a ser $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$. En el caso extremo opuesto (v = c) las partículas serían otra vez fotones por lo que su energía vendría dada por: $E = p \cdot c$.
- ✓ Finalmente, si el límite superior de velocidades pudiera aumentar, la energía cinética debería disminuir, ya que aquí lo que cuenta es el cociente v/c. Cuanto mayor sea este cociente (como v ha de ser inferior o, en el caso de la luz, igual a c, su valor máximo es 1) mayor será la energía cinética y cuanto menor sea, menor ha de ser la energía cinética. En caso extremo en que $c \rightarrow \infty$, debería ser otra vez aplicable la mecánica de Newton, con lo que, en ese caso, tendríamos: $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

Resolución

En el sistema de referencia propio de cada partícula su energía es:

$$E_0 = m \cdot c^2$$

En cualquier otro SRI, con respecto al cual la partícula tenga una cierta velocidad, v, su energía viene dada por:

$$E = m·\gamma·c^2$$

Siendo el factor gamma:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Por tanto, la energía cinética de la partícula será la diferencia entre las dos anteriores:

$$E_c = E – E_0 = m·\gamma·c^2 - m·c^2 = m·c^2 (\gamma -1) = m \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right)$$

Comprobad que se cumplen las hipótesis y los casos límite

Conviene detenerse, en primer lugar en el concepto de que si la masa es nula (m=0) hemos de imponer que la velocidad sea la de la luz (v=c), ya que en ese caso la partícula será un fotón. Entonces se obtiene $E_c = 0·\infty$ (indeterminación). Esto es coherente con el hecho de que el fotón tiene una energía $E = p·c$ que no depende del SRI adoptado.

En cuanto a la influencia v y c, el resultado confirma que lo que influye es el cociente v/c y que cuanto mayor sea este cociente (es decir, cuando $v \rightarrow c$, pero sin llegar a ser $v = c$) mayor es E_c. En el caso extremo opuesto, es decir, cuando $v \rightarrow 0$, para calcular la E_c hay que hacer:

$$Ec = \lim_{\left(\frac{v}{c}\right) \to 0} m \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right)$$

El cálculo anterior resulta más sencillo aplicando el desarrollo del binomio al término:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Para hacerlo hay que recordar que:

$(1+x)^n = 1 + nx +$ términos de base x con exponentes progresivamente superiores (x^2, x^3, etc.)

Como en este caso $x = -\frac{v^2}{c^2}$ y estamos planteando el límite cuando $v/c \rightarrow 0$, los términos de potencias superiores a 1 son despreciables frente al término de exponente unidad y podemos escribir:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{v^2}{c^2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$$

Y sustituyendo esta última expresión en la E_c se obtiene:

$$Ec = \lim_{\left(\frac{v}{c}\right) \to 0} m \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) = m \cdot c^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} - 1\right) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Como era de esperar, se obtiene la expresión correspondiente a la E_c en el marco de la mecánica de Newton.

En el caso opuesto, es decir, al ir aumentando el cociente v/c aumenta también la discrepancia entre el valor de la E_c correcta (relativista) y el que prevé la mecánica de Newton. Para ver en qué grado lo hace vamos ahora a responder a la segunda cuestión del enunciado, la cual replantearemos de la siguiente forma:

Calculad la relación entre energía cinética relativista de una partícula y su energía cinética según la mecánica de Newton para velocidades crecientes de la partícula: 0'1c, 0'2c, 0'3c,...

La relación buscada es:

$$\frac{E_c}{E_{c\ (Newton)}} = \frac{m \cdot (\gamma - 1)c^2}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2} = \frac{2 \cdot (\gamma - 1)c^2}{v^2}$$

Al aplicar esta expresión a las sucesivas velocidades se obtienen los resultados recogidos en la tabla adjunta. Estos resultados muestran la influencia de la velocidad en la discrepancia entre el resultado correcto que proporciona la Teoría de la relatividad y el que proporcionaría la mecánica de Newton. Dicha discrepancia, apenas es apreciable hasta que se alcanzan velocidades comparables a la velocidad de la luz, pero llegados a ese punto aumenta de forma notable (ya que el factor gama tiene una dependencia exponencial con el cociente v/c).

Para terminar, responderemos a última cuestión que plantea el enunciado de este problema.

v	$\frac{E_c}{E_{c\ (Newton)}}$
0'1c	1'01
0'2c	1'03
0'3c	1'07
0'4c	1'14
0'5c	1'24
0'6c	1,39
0'7c	1'63
0'8c	2'08
0'9c	3'20
0'99c	12'42

Calculad la energía total, la energía cinética y el momento lineal (impulso) de un electrón (energía en reposo 0'511 MeV) que se mueve con una velocidad v = 0'8c.

Como $E = m\gamma c^2 = \gamma \cdot E_0$ determinamos γ:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0'8^2}} = \frac{1}{0'6}$$

Sustituyendo:

$E = E_0/0'6 = 0'511/0'6 = 0'852$ MeV

La energía cinética será: $E_c = E - E_0 = 0'852 - 0'511 = 0'341$ MeV

La masa: $m = \frac{E_0}{c^2} = \frac{0'511}{c^2} = 0'511\ \frac{MeV}{c^2}$

Y la cantidad de movimiento: $p = m \cdot \gamma \cdot v = \frac{0'511}{c^2} \cdot \frac{1}{0'6} \cdot 0'8c = 0'68\ \frac{MeV}{c}$