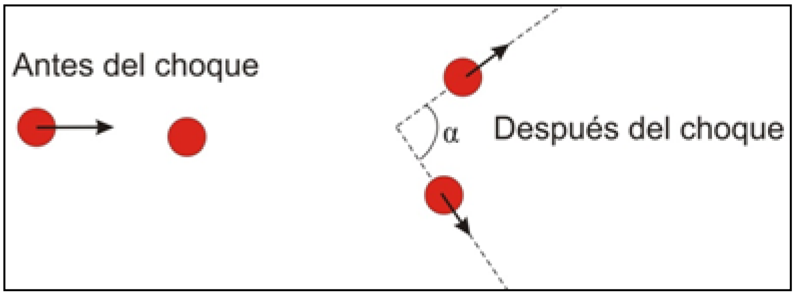
COLISIÓN ELÁSTICA DE DOS PARTÍCULAS DE IGUAL MASA

Una partícula impacta contra otra de igual masa e inicialmente en reposo. Obtened el ángulo, α, que forman las trayectorias de ambas partículas después de la colisión, suponiendo que el choque sea perfectamente elástico (sin pérdida de energía) y que las trayectorias de las partículas antes y después del choque están en un mismo plano XY. Resolved primero el problema utilizando la mecánica de Newton y, luego en el marco de la relatividad especial



a) En el marco de la Mecánica de Newton

Planteamiento:

Las velocidades que tengan las dos partículas (módulo y dirección) inmediatamente después de la colisión y sus masas, dependerán de las velocidades y de las masas de las partículas inmediatamente después.

De acuerdo con el enunciado del problema:

Las masas de las dos partículas son iguales entre sí ($m_1 = m_2 = m$), e iguales también inmediatamente antes e inmediatamente después de la colisión (con esta condición, las masas dejan de ser una variable en el problema, puesto que m será un factor de multiplicación de todos los términos intervinientes en el principio de conservación)

El módulo de la velocidad de la segunda partícula antes de la colisión es cero

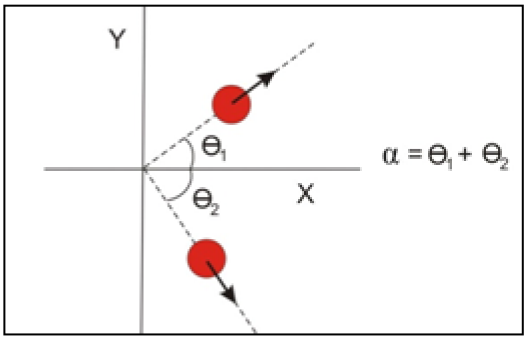
Las velocidades de las dos partículas después de la colisión están en el mismo plano XY

Con todas estas condiciones, del estado inicial cabe considerar sólo una magnitud variable, que es la velocidad de la partícula 1 inmediatamente antes de la colisión ($\vec{v}_1$) y el estado final (inmediatamente después de la colisión) está determinado por otras tres magnitudes variables: los módulos de las velocidades de ambas partículas (v_1' y v_2') y el ángulo que se quiere obtener (α).

Puesto que se ha de conservar el momento lineal o cantidad de movimiento (sobre el plano XY esto se concreta en dos ecuaciones) y, al ser la colisión elástica, también se ha de conservar la energía cinética (una ecuación), resulta que se han de cumplir tres ecuaciones que relacionan las cuatro magnitudes del problema, lo que significa que, en estas condiciones, el ángulo α solicitado ha de tener un valor único.

Estrategia de resolución:

Impondremos la verificación de las dos componentes del impulso (x, y) y la de la energía del sistema, antes y después de la colisión. Como queremos obtener el ángulo, α, entre las velocidades de las dos partículas salientes, y el movimiento inicial de la partícula 1 tiene lugar en la dirección del eje X, expresaremos las dos componentes de la ley de conservación del impulso lineal en función de los ángulos que tienen las velocidades de salida de cada una de ellas (θ_1 y θ_2) con respecto a dicho eje X. El ángulo α, será igual a la suma de θ_1 y θ_2.



Resolución:

La conservación del impulso lineal del sistema formado por ambas partículas, implica que dicho impulso (vector) ha de ser el mismo en el estado inicial o entrante (inmediatamente antes de la colisión) que en el estado final o saliente (inmediatamente después de la colisión):

$$\vec{p}_{sis} = \vec{p}_{sis}^{\,'} \;\rightarrow\; \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1^{\,'} + \vec{p}_2^{\,'} \;\rightarrow\; m\cdot\vec{v}_1 + m\cdot\vec{v}_2 = m\cdot\vec{v}_1^{\,'} + m\cdot\vec{v}_2^{\,'} \rightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_1^{\,'} + \vec{v}_2^{\,'} \rightarrow$$

$$(v_{1x}\ ,0) = (v_{1x}^{'}\ , v_{1y}^{'}) + (v_{2x}^{'}\ , v_{2y}^{'}) \;\rightarrow\; (v_1\ ,0) = (v_1^{'}\cdot\cos\theta_1\ , v_1^{'}\cdot sen\theta_1) + (v_2^{'}\cdot\cos\theta_2\ , v_2^{'}\cdot sen\theta_2)$$

Descomponiendo la última ecuación vectorial según componentes cartesianas escalares:

Eje X: $v_1 = v_1^{'}\cdot\cos\theta_1 + v_2^{'}\cdot\cos\theta_2$ (1)

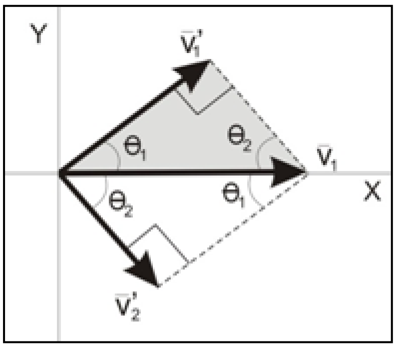
Eje Y: $0 = v_1^{'}\cdot sen\theta_1 + v_2^{'}\cdot sen\theta_2 \;\rightarrow\; v_1^{'}\cdot sen\theta_1 = -v_2^{'}\cdot sen\theta_2$ (2)

La ecuación (2) anterior, muestra que las componentes según el eje Y de las velocidades de salida son iguales y de distinto signo, por lo que se anulan.

La conservación de la energía, al tratarse de un choque elástico, implica que la energía cinética del sistema inmediatamente antes de la colisión valga lo mismo que inmediatamente después:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^{'2} + \frac{1}{2}mv_2^{'2} \;\rightarrow\; v_1^2 = v_1^{'2} + v_2^{'2} \quad (3)$$

Ahora deberíamos proceder a despejar θ_1 y θ_2, para luego obtener $\alpha = \theta_1 + \theta_2$. Sin embargo, si nos fijamos en la ecuación (3) veremos que su significado es equivalente al cumplimiento del teorema de Pitágoras en un triángulo cuyos catetos son $v_1^{'}$ y $v_2^{'}$ siendo v_1 la hipotenusa, tal y como se muestra en la figura adjunta. De dicha figura, queda claro que $\alpha = \theta_1 + \theta_2 = 90º$.



Conviene saber que muchas veces el ángulo experimental será diferente, porque los choques entre objetos cotidianos (por ejemplo, dos bolas de billar) no son perfectamente elásticos. En estos procesos cotidianos, la pérdida de energía en la interacción suele ser considerable y, por tanto, deja de cumplirse la ecuación (3).

b) En el marco de la Teoría de la relatividad.

Planteamiento:

La dinámica relativista requiere la conservación del impulso-energía. Este principio de conservación no es idéntico al de la mecánica de Newton, por lo que es lógico suponer que la solución del problema será diferente. Además, en relatividad se ha de tener en cuenta que las partículas tienen una energía propia que pasó desapercibida para la física newtoniana. Por tanto, se agregan dos variables adicionales con lo que es lógico esperar que la solución del problema no sea única, sino dependiente de dos variables independientes que podamos adoptar.

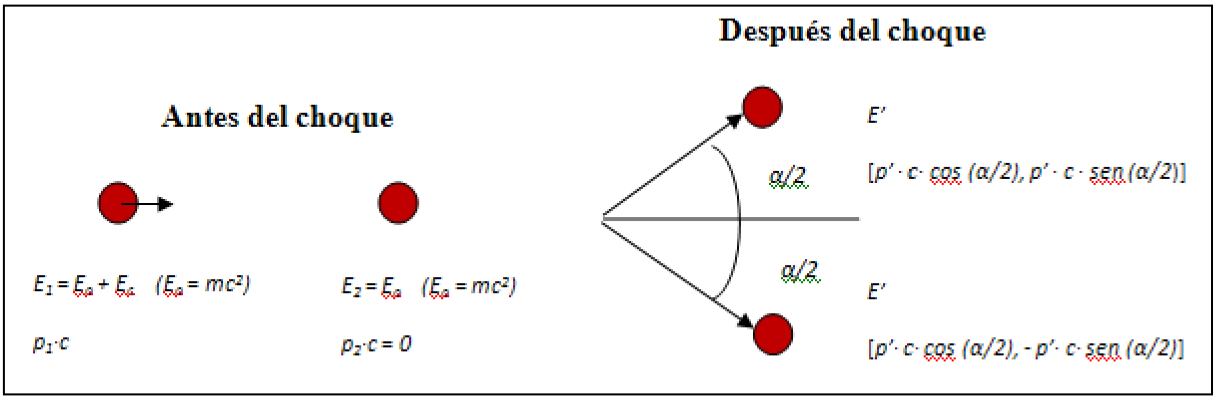
Hipótesis:

Teniendo en cuenta lo expresado en el apartado anterior, podemos plantear que el ángulo buscado dependa de la relación entre la energía cinética de la partícula incidente antes del choque, E_c y la energía propia de esa misma, E_0. De hecho, si ese cociente tiende a cero $E_c/E_0 \rightarrow 0$, estamos planteando que la velocidad de la partícula incidente sea muy pequeña comparada con el límite superior de velocidades, c. Es decir, estamos acercándonos al límite newtoniano y, por tanto, teniendo en cuenta el resultado obtenido en ese caso ha de ser $\alpha \rightarrow 90º$. En cambio, al crecer este cociente, es decir, al ser mayor la E_c de la partícula incidente, nos alejamos de la predicción de la mecánica de Newton y el ángulo, α, debería cambiar.

Resolución:

En este caso, para tener una mayor sencillez en la aplicación del principio de conservación del impulso-energía, vamos a suponer que ambas partículas, después de la colisión tienen velocidades de igual módulo y, por tanto, al exigir la conservación del impulso-energía, sus trayectorias forman el mismo ángulo, con respecto a la dirección del movimiento de la partícula que impacta.

La situación antes y después del choque, tenemos:



La conservación del impulso-energía $\vec{P}_{sis} = \vec{P}'_{sis}$ requiere que se conserven sus componentes de energía e impulso:

$E_1 + E_2 = 2 \cdot E'$ (componente de la energía) (1)

$p_1 = 2 \cdot p' \cdot \cos(\alpha/2)$ (componente X del impulso) (2)

$0 = p' \cdot \operatorname{sen}(\alpha/2) - p' \cdot \operatorname{sen}(\alpha/2)$ (componente Y del impulso) (3)

Además de cumplirse lo que dictan las expresiones anteriores, se ha de verificar la ley fundamental que relaciona masa (o energía propia, E_0) con el impulso y la energía de cada partícula, tanto antes y como después del choque:

$E_1^2 = Eo^2 + (p_1 \cdot c)^2$ (partícula 1 antes del choque) (4)

$E'^2 = Eo^2 + (p' \cdot c)^2$ (partículas 1 y 2 después del choque) (5)

Teniendo en cuenta que $E_1 = E_o + E_c$ (E_c es la energía cinética de la partícula incidente), de las ecuaciones (1), (4) y (5) resulta:

$(p_1 \cdot c)^2 = (E_o + E_c)^2 - E_o^2 = E_c\,(2 \cdot E_o + E_c)$ (6)

$(p' \cdot c)^2 = (E_o + E_c/2)^2 - E_o^2 = E_c\,(E_o + E_c/4)$ (7)

Ahora, sustituimos (6) y (7) en (2), para obtener:

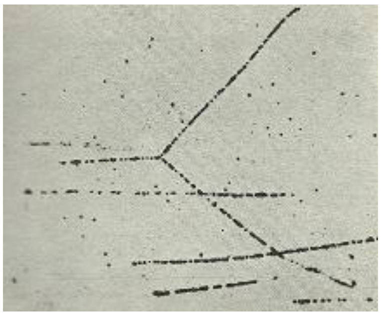
$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2E_o + E_c}{4E_o + E_c}$$

Usando $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$, se obtiene finalmente:

$$\cos\alpha = \frac{E_c}{4E_o + E_c}$$

Análisis del resultado:

El resultado muestra la variación que tiene el aspecto del choque dependiendo de que las partículas tengan energías bajas (caso no relativista) o altas (para velocidades próximas a la velocidad de la luz).



Así, si la energía cinética de la partícula incidente es pequeña ($E_c << E_o$) se obtiene cos$\alpha \rightarrow 0$ y por tanto $\alpha \rightarrow 90$º. La fotografía adjunta (1) muestra un ejemplo de esta situación. Corresponde a la colisión de un protón incidente con energía del orden de *5MeV* con otro protón, inicialmente en reposo en una emulsión fotográfica. El choque en este caso fue "no relativista" ($E_c/m_oc^2<<1$) y, como se observa, se obtuvo un ángulo experimental muy próximo a 90º entre las trayectorias de salida de los protones después del choque.

En cambio, si la energía cinética de la partícula es muy alta ($E_c>>E_o$), resulta cos$\alpha \rightarrow 1$ y por tanto $\alpha \rightarrow 0$º. Esta disminución relativista de la dispersión fue comprobada experimentalmente por primera vez en 1932 por Champion (2), para radiación β (electrones muy rápidos). Utilizó una cámara de niebla y estudió los choques elásticos de los electrones de la radiación con electrones de los átomos de aire de la cámara.

Ampliación:

La solución que aporta la mecánica clásica se puede practicar con una animación *Modellus* disponible en este apartado de la página Web: http://rsefalicante.umh.es/Animaciones/Animaciones03.htm